



Significados atribuidos a las variables aleatorias. Un estudio con futuros profesores

Federico **De Olivera** Lamas
Consejo de Formación en Educación
Uruguay
fededeo@gmail.com

Luciana **Olesker** Pérez
Consejo de Formación en Educación
Uruguay
lucianao05@gmail.com

Daniela **Pagés** Rostán
Universidad de la República
Uruguay
danielapages@gmail.com

Resumen

Se presentan resultados de un estudio que indagó qué significados construyen futuros profesores de matemática de Uruguay sobre el concepto de variable aleatoria. Se realizó una revisión bibliográfica sobre la conceptualización de las variables aleatorias y las principales dificultades reportadas por la investigación sobre su enseñanza. Con base en esta revisión se diseñó un cuestionario, que se aplicó a estudiantes de profesorado que habían cursado la asignatura Probabilidad y Estadística. Se presenta, como resultado del análisis del cuestionario y de la revisión bibliográfica, una secuencia de enseñanza diseñada para la primera parte de la unidad de variable aleatoria, basada en el análisis de las respuestas al cuestionario y en la revisión bibliográfica. Se describen y fundamentan las distintas actividades de la secuencia y se analiza su potencialidad para superar las dificultades encontradas.

Palabras clave: Futuros profesores de Matemática; Variables aleatorias; Enseñanza de la Probabilidad; Secuencia didáctica.

Introducción

En este artículo reportamos una investigación vinculada con la enseñanza del concepto de variable aleatoria en la formación de profesores. Las variables aleatorias tienen el potencial de modelizar situaciones de la realidad. Existen situaciones muy cercanas que dan lugar a variables discretas y absolutamente continuas. Sin embargo, hay otros problemas en los que los modelos discretos o absolutamente continuos resultan insuficientes, y se debe recurrir a modelos de variables aleatorias mixtas para describirlos. Por lo tanto, la distinción entre variables absolutamente continuas y mixtas es un contenido importante dentro de la unidad y aporta a una mejor comprensión del trabajo con variables aleatorias.

Los autores de este trabajo, formadores de profesores, notaron ciertas dificultades vinculadas al concepto de variable aleatoria. En especial en el manejo no algorítmico de conceptos asociados a variables aleatorias, por ejemplo, al momento de modelizar situaciones. Esto motivó la necesidad de realizar una investigación que diera cuenta de qué ideas tienen los futuros profesores sobre la variable aleatoria, si se evidencian las dificultades que reseñan investigaciones en otros países o emergen dificultades no reportadas. A partir de este estudio se podría rediseñar la enseñanza de este concepto.

Fundamentación teórica y objetivos del estudio

A continuación, presentamos, a modo de fundamentación teórica del estudio, los principales trabajos analizados en la revisión bibliográfica. Heitele (1975) señala tres aspectos esenciales sobre el funcionamiento del concepto de variable aleatoria como modelo explicativo: la distribución de una variable aleatoria, su esperanza, y la composición de variables aleatorias para obtener nuevas variables.

Los significados del concepto de variable aleatoria

Ortiz (2002) reporta un estudio de los significados del concepto de variable aleatoria (entre otros conceptos probabilísticos) en los libros de texto, basándose en la teoría de significados institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994). Como elementos intensionales (atributos o rasgos) del concepto de variable aleatoria enumera los siguientes:

VA1: La variable aleatoria toma sus valores dependiendo de los resultados de un experimento aleatorio.

VA2: Es una función del espacio muestral en R .

VA3: Queda caracterizada mediante la distribución de probabilidad, que es el conjunto de valores que toma junto con su probabilidad.

VA4: Se requiere que, para cada intervalo I de R , el conjunto original a dicho intervalo sea un suceso del espacio muestral.

VA5: Una variable aleatoria define una medida de probabilidad sobre el conjunto de números reales.

VA6: Para cada variable aleatoria podemos definir una función de distribución de la forma siguiente:

$$R \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow F(x) = P(\zeta \leq x)$$

VA7: La función de distribución de una variable aleatoria es una función real de variable real, monótona no decreciente.

VA8: La función de distribución de una variable aleatoria determina en forma biunívoca la distribución de probabilidad.

VA9: Sea (x_i, p_i) con $i \in I$ la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Se define la media o esperanza matemática como $E(\zeta) = \sum_{i \in I} x_i p_i$. Este concepto extiende la idea de media en una variable estadística.

VA10: La moda es el valor más probable de la variable.

VA11: La mediana es el valor de la variable para el cual la función de distribución toma el valor $\frac{1}{2}$. Por tanto, la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor menor o igual que la mediana es exactamente $\frac{1}{2}$. (Ortiz, 2002, p. 121)

Dificultades reportadas sobre la enseñanza del concepto de variable aleatoria

El primer problema señalado en relación con la comprensión del concepto de variable aleatoria es su propia definición (Kachapova, 2012; Ruiz, 2006; Ruiz et al., 2006). En particular, Kachapova (2012) afirma que la definición de variable aleatoria genera la concepción errónea en los estudiantes de que toda función de un espacio muestral en el conjunto de los reales es una variable aleatoria. Agrega que esta concepción errónea surge del hecho de considerar que un suceso es cualquier subconjunto de un espacio muestral, generalizando así algo que es cierto para un espacio muestral finito, pero no en el caso general. Kachapova recomienda un enfoque axiomático de la probabilidad, bajo el que un subconjunto del espacio muestral es considerado un suceso si existe la medida de su probabilidad. Por otra parte, Ruiz et al. (2006) y Ruiz (2006) plantean que, para que una función de un espacio muestral en $\mathbb{R}$ sea una variable aleatoria se requiere que el inverso de un intervalo en dicha relación sea un conjunto medible. Este hecho se vincula de forma directa con los significados intensionales VA1, VA2 y VA4 (Ortiz, 2002). Pero también se relaciona con los significados VA3 y VA5, que establecen el nexo entre el concepto de variable aleatoria y el de función de distribución.

Ruiz et al. (2006), en relación con la necesidad de que el inverso de un intervalo sea un suceso en la definición de variable aleatoria, explicitan que esto es necesario para poder definir una función de distribución a partir de cierta variable aleatoria. Esta relación entre los dos conceptos aporta sentido a la condición mencionada, y podría llevar a pensar en definir y enfatizar por igual los dos conceptos al mismo tiempo (Kachapova, 2012).

Kachapova (2012) describe algunas concepciones erróneas acerca de las definiciones de los distintos tipos de variables aleatorias. En particular, la definición de variable aleatoria continua como aquella cuyo conjunto de valores es no numerable, lleva a la concepción de que toda variable aleatoria es discreta o continua, no considerando las variables aleatorias mixtas. La autora propone, para ayudar a los estudiantes a superar esta concepción errónea, hacer énfasis en la siguiente definición de variable aleatoria continua: “Una variable aleatoria X es continua si su función de distribución F puede ser expresada como $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ para cierta función f no negativa, llamada la función de densidad de X .” (Kachapova, 2012, p. 5). Cabe aclarar que en este trabajo, a este tipo de variable le llamamos absolutamente continua por poseer densidad. La autora afirma que es necesario trabajar con variables aleatorias mixtas para clarificar más aún esta concepción errónea.

Otra concepción errónea sobre las variables aleatorias continuas es la de que una variable aleatoria continua es aquella que tiene una función de distribución continua, condición que es necesaria pero no suficiente (Kachapova, 2012). En este sentido, se propone el trabajo con contraejemplos.

En relación con la formación de profesores, Pérez y Parraguez (2013) presentan algunas consideraciones acerca de las dificultades del concepto de variable aleatoria en la formación de profesores. Sobre el estudio de los fenómenos aleatorios destacan como factor esencial para su comprensión, la identificación del tipo de variable en juego. También señalan que la noción de variable aleatoria tiende a identificarse con la de variable algebraica, y no con una función; que los textos se focalizan en un tratamiento cuantitativo de la variable y fuera de contexto; y que los profesores de matemática están poco preparados en la enseñanza de la estadística, lo que influye en las dificultades sobre este concepto en la educación secundaria.

Con base en el estudio de antecedentes, formulamos los siguientes objetivos para el estudio:

- 1) Determinar los significados que los futuros profesores de matemática asignan al concepto de variable aleatoria, a partir de cuál definición consideran válida y en qué contextos la aplican.
- 2) Identificar ideas erróneas vinculadas a los tipos de variables, en particular a las discretas y absolutamente continuas.
- 3) Indagar sobre el reconocimiento de las variables mixtas, en especial si las diferencian de las absolutamente continuas en contextos de aplicación.

Metodología

El estudio fue cualitativo y exploratorio. Se llevó adelante a través de un cuestionario que se aplicó a estudiantes de profesorado de matemática que ya habían cursado la asignatura Probabilidad y Estadística. Esta asignatura es parte del tercer año de la formación, y es un curso anual, cuyo programa prevé 6 horas semanales de clase. La primera unidad del programa se propone trabajar con la teoría axiomática de la probabilidad, y la segunda unidad está destinada al estudio de las variables aleatorias. Se contactó a los estudiantes compartiendo el enlace al formulario con los profesores de los distintos centros de formación. El cuestionario se estructuró en tres bloques de preguntas. Fue compartido a través de un formulario de Google y fue respondido por 18 estudiantes, quienes respondieron de forma voluntaria (https://docs.google.com/forms/d/1-UKdH1fICZ61SABXFbb-5_6LC9K2p_hPA1qjKaGpL6E/edit).

Descripción del cuestionario y categorías de análisis

El primer bloque hace referencia a la definición de variable aleatoria. El segundo bloque, en formato verdadero o falso, recorre aspectos como el concepto de variable aleatoria, el vínculo entre el recorrido y las probabilidades y algunas cuestiones relacionadas con la función de probabilidad de variables aleatorias discretas y absolutamente continuas, ya sea cuantía, densidad o la propia función de distribución. El tercer bloque indaga sobre los significados asociados a variables aleatorias discretas, absolutamente continuas y en qué medida los estudiantes manejan la noción de variables aleatorias mixtas.

Las categorías de análisis para el primer bloque de preguntas se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1

Categorías primer bloque del cuestionario

Categorías	Descripción
C1: Reconoce el carácter funcional de la variable aleatoria	Se elige alguna de las tres primeras definiciones y se rechaza la cuarta explícitamente porque no es una función.
C2: Reconoce la necesidad de exigirle a esta función que la preimagen de un boreliano sea un elemento de A .	Se elige como correcta la definición dos, o la definición tres o ambas.
C3: Comprende la equivalencia entre la definición 2 y 3.	Esto implica una comprensión del concepto de σ -álgebra y tener en cuenta que los intervalos $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$ engendran una σ -álgebra que es, justamente, la σ -álgebra de Borel. Se elegirán las definiciones 2 y 3.

En el segundo bloque se plantean una serie de enunciados, y el estudiante debe señalar, para cada uno, si lo considera verdadero o falso. Los enunciados se vinculan con las ideas acerca del concepto de variable aleatoria, la relación entre el valor que da una variable y la probabilidad, el recorrido de una variable aleatoria discreta, las funciones de densidad y de distribución. En la Tabla 2 presentamos las categorías para el análisis.

Tabla 2

Categorías del segundo bloque del cuestionario

Categorías	Descripción
C2: Reconoce la necesidad de exigirle a esta función que la preimagen de un boreliano sea un elemento de A .	Indican como falsa la primera proposición.
C4: Percibe el carácter funcional de la variable aleatoria, distingue la variable de la función de probabilidad.	Indican como falsas las proposiciones 2 (<i>Una variable aleatoria es una función que a cada resultado de un experimento aleatorio le hace corresponder su probabilidad</i>) y 5 (<i>Dado un experimento aleatorio que consiste en tirar 2 dados, es correcto definir una variable aleatoria como "al tirar los dados la suma de los puntos es 4"</i>).
C5: Maneja una visión limitada de las variables discretas.	Indican como verdaderos los enunciados 3 y/o 6.
C6: Maneja una visión limitada de las variables absolutamente continuas.	Indican como verdaderas las proposiciones 4 y/o 7.

Finalmente, en el tercer bloque se presentan experiencias aleatorias y se define una variable aleatoria. En cada una de ellas los estudiantes deben indicar si se trata de una variable discreta, absolutamente continua o ninguna de las dos. En la tabla 3 presentamos las categorías de análisis correspondientes.

Tabla 3
Categorías tercer bloque del cuestionario

Categorías	Descripción
C7: Reconoce las variables discretas con recorrido finito e infinito.	Indican que las variables planteadas en la 3 y la 4 son variables discretas.
C8: Reconoce una variable absolutamente continua.	Señalan como absolutamente continua la situación 1: <i>Una persona está esperando a ser atendida en un negocio, sea X la variable que mide el tiempo que transcurre hasta que la persona sea atendida.</i>
C9: Reconoce las variables mixtas, esto es, variables que en el formulario indicamos como ni discretas ni absolutamente continuas.	Eligen la opción “ninguna de las dos” en la experiencia planteada en el punto 2 y 5.

Las distintas respuestas a las preguntas del cuestionario fueron analizadas con base en las categorías anteriores.

Análisis de las respuestas al cuestionario

Por razones de espacio, presentamos una tabla donde se muestra la concordancia entre el significado institucional de referencia, expresado en términos de las categorías presentadas, y el significado personal declarado por cada estudiante de la muestra manifestado en sus respuestas al cuestionario de investigación.

Tabla 4
Concordancia de significados

Concordancia entre el significado institucional de referencia y el personal declarado										
Estudiante	<i>Categorías primer bloque del cuestionario</i>			<i>Categorías segundo bloque del cuestionario</i>				<i>Categorías tercer bloque del cuestionario</i>		
	C1	C2	C3	C2	C4	C5	C6	C7	C8	C9
E1	x	x		x		x		x	x	
E2	x	x	x	x		x			x	

E3	x	x		x	x		x	x	x	
E4	x			x	x	x	x	x	x	
E5				x		x	x		x	
E6	x	x				x	x	x	x	
E7	x			x		x	x	x	x	
E8	x	x		x			x	x	x	
E9	x			x	x	x	x	x	x	
E10	x	x	x			x	x	x	x	
E11	x	x		x			x	x	x	
E12	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
E13				x		x	x	x	x	
E14	x	x	x	x				x	x	
E15	x	x	x	x		x				
E16	x	x	x	x		x	x	x		
E17	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
E18		x	x	x		x	x	x	x	

Uno de los primeros aspectos a evaluar fue si los estudiantes reconocen la necesidad de imponerle a la variable aleatoria la condición de que la preimagen de un boreliano debe pertenecer a la σ -álgebra. Al igual que las investigaciones reportadas, se notó que una proporción importante de los estudiantes (72%) manifiestan la creencia de que cualquier función de Ω en $\mathbb{R}$ sería una variable aleatoria. Esto lleva al convencimiento de insistir en esta condición y sobre todo en su necesidad, para luego poder definir de forma coherente y consistente los conceptos asociados como el de probabilidad inducida y función de distribución. Se considera también que sería apropiado mostrar algún no ejemplo, es decir, una función de Ω en $\mathbb{R}$ que no sea variable aleatoria, al menos en contextos teóricos.

Otro aspecto que quedó evidenciado es la dificultad de reconocer variables que no sean discretas ni absolutamente continuas. Las respuestas de la mayoría de los estudiantes (89%) parecen mostrar la creencia de que solo existen dos categorías para las variables aleatorias. La gran mayoría de los estudiantes que contestaron el cuestionario no lograron reconocer las variables mixtas. Se sugiere entonces que, a la hora de la enseñanza de los tipos de variables

aleatorias, se analicen en profundidad las definiciones de variable discreta y de variable absolutamente continua, reflexionando sobre el hecho de que sus definiciones implican que hay otros tipos de variables aleatorias. En segundo lugar, se propone incluir más ejemplos y problemas con variables mixtas, que surgen naturalmente en contextos de transformaciones.

Finalmente se buscaba una aproximación al significado personal que los estudiantes atribuyen a las variables discretas y a las absolutamente continuas. En el caso de las variables discretas algunas respuestas parecen mostrar que los estudiantes las reducen a las que tienen recorrido finito. En cuanto a las variables absolutamente continuas, los futuros profesores parecen no manejar una definición matemáticamente adecuada. Esto queda al descubierto en algunas afirmaciones sobre que la función densidad es siempre continua o que basta con tener un recorrido continuo.

La secuencia diseñada

A partir de la revisión bibliográfica realizada, y del análisis de las respuestas al cuestionario, se elaboró un REA para trabajar con las variables aleatorias en el curso de Probabilidad y Estadística de la formación de profesores de matemática en Uruguay.

La idea que subyace a este recurso es aproximarse al concepto de variable aleatoria a partir de funciones con dominio el espacio muestral de un experimento y codominio el conjunto de los reales, para proponer una definición provisoria. Esta se complementará más adelante en el recurso para llegar a una definición más completa.

La secuencia se puede encontrar completa en: <https://semur.edu.uy/recursos/VA/>.

Esta parte del recurso culmina con una definición provisoria de variable aleatoria, y el comentario de que se necesitarán más condiciones para definirla de forma definitiva. Este primer bloque de actividades que hemos diseñado se vincula con el desarrollo de las categorías C1 y C4, definidas anteriormente. Estas implican reconocer el carácter funcional de la variable aleatoria, donde a cada elemento del espacio muestral se le asigna un real, y también diferenciarla de una función de probabilidad.

Conclusiones

El estudio exploratorio realizado permitió profundizar en las dificultades que conlleva el concepto de variable aleatoria y su enseñanza. Esto llevó al equipo investigador a reflexionar acerca de qué tareas son adecuadas para trabajar esta temática. Se buscó considerar todas las dificultades reportadas, así como diseñar actividades que permitieran que estas salieran a la luz al tiempo que los estudiantes las resuelven.

Se tomó como punto de partida el concepto de espacio muestral, conocido por los estudiantes, para introducir a través de ejemplos el concepto de variable aleatoria, a través de ciertas funciones de dominio Ω . Se destacan las tareas de similitudes y diferencias, que apuntan a determinar las propiedades de la función de distribución, y que permiten construir su definición.

Se espera que este abordaje lleve a los estudiantes a conceptualizar mejor las ideas vinculadas con el concepto de variable aleatoria.

Finalmente, cabe señalar que este recurso no ha sido puesto en práctica en la clase, se espera poder hacerlo en un estudio posterior.

Referencias y bibliografía

- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastic ideas. *Educational Studies of Mathematics*, 6, 187 - 205. Dordrecht, D. Reydel Publishing Company. <https://doi.org/10.1007/BF00302543>
- Kachapova, F. (2012). A general approach to teaching random variables. *Mathematics teaching research journal online*, 5(2), 1 - 16.
- Ortiz, J.J. (2002). *La Probabilidad en los Libros de Texto [Probability in Textbooks]*; Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada: Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias.
- Pérez, B. y Parraguez, M. (2013). Construcciones mentales de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 589 - 598). México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de maestría (no publicada). Instituto Politécnico Nacional de México.
- Ruiz, B., Albert, J. y Batanero, C. (2006). An exploratory study of students' difficulties with random variables. En A. Rossman y B. Chance (Eds), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía). International Association of Statistical Education.