La sucesión de Fibonacci: Una mirada histórica e interdisciplinar para el aula

Juliana Andrea **Marín** Mosquera
Universidad de Antioquia
Colombia
andrea.marin5@udea.edu.co
Juliana **Ramírez** Ramírez
Universidad de Antioquia
Colombia
juliana.ramirez7@udea.edu.co
Alejandra **Marín-Ríos**
Universidad de Antioquia
Colombia
alejandra.marinr@udea.edu.co

Resumen

Este trabajo presenta un estudio histórico de la sucesión de Fibonacci, recopilando algunos elementos, conceptos y situaciones que anteceden y contribuyen a la consolidación de dicha construcción como objeto matemático. A partir de los elementos de análisis de una práctica matemática, se analiza el problema de la reproducción de los conejos presente en el libro *Liber Abaci*, escrito por Fibonacci; y se comparten algunas propuestas para ser llevadas al aula, a través de las cuales se pueda generar procesos interdisciplinarios entre las áreas de Matemáticas y ciencias naturales.

Palabras clave: Educación secundaria; Investigación documental; Historia de las Matemáticas; Pensamiento numérico; Interdisciplinariedad; Práctica matemática.

Definición y relevancia del problema

La sucesión de Fibonacci, planteada en el siglo XIII por Leonardo de Pisa, es un objeto matemático relacionado con patrones en la naturaleza, el arte y la arquitectura. Por ello, esta sucesión puede considerarse un medio para promover la interdisciplinariedad entre las

Matemáticas y las ciencias naturales, pues le permite al maestro conectar los conceptos con aplicaciones del mundo real. Esto favorece una mayor receptividad y motivación en los estudiantes, ya que, como destacan Minnaard y Condesse (2005), la sucesión de Fibonacci es capaz de despertar interés, atención y admiración en los estudiantes, debido a su belleza y su relación con el entorno natural.

En este trabajo se realiza un análisis histórico de la sucesión de Fibonacci, algunas implicaciones para su enseñanza, y especialmente, su potencial para promover interdisciplinariedad entre las Matemáticas y las ciencias naturales. Estudiar la sucesión de Fibonacci desde la concepción de práctica matemática permite comprender acciones humanas, eventualidades e intereses que han contribuido a su construcción. El estudio histórico posibilita determinar elementos fundamentales para comprender la sucesión, sus aplicaciones y posibilidades para la enseñanza, con el fin de que los estudiantes perciban la Matemática como una disciplina viva, conectada con el medio y con diversos saberes (Córdoba, 2015).

Referencial teórico

Para alcanzar el objetivo del presente estudio, se parte de considerar la construcción de la sucesión de Fibonacci desde los elementos de análisis de una práctica matemática. Esta última es comprendida como el conjunto de acciones de los individuos que, en medio de sus actividades matemáticas, guían y orientan sus procesos de subjetivación y objetivación de la cantidad, la forma y la variación de una u otra (Obando, 2015). Por otra parte, Flores (2016) afirma que la práctica es fundamental en la creación matemática, lo que permite comprender la importancia del análisis de la práctica matemática; constituyendo no sólo un campo de estudio más amplio, considerando aspectos históricos, culturales y cognitivos que permite comprender la forma en la que ha cambiado la Matemática.

El análisis de la práctica matemática resulta importante en el estudio histórico de las Matemáticas, debido a que, a través de este, se logra aproximar cómo piensan los sujetos situados en un lugar y momento particular con diversas influencias. Además, las ideas teóricas que necesita acoger o desarrollar, así como las relaciones y representaciones que se establecen con los elementos tangibles (material físico) e intangibles (lenguaje) a los que se acude para elaborar una determinada construcción intelectual o ejecución de sus acciones.

En lo que respecta a la sucesión de Fibonacci se caracteriza por ser una sucesión recurrente de segundo orden, dado que cada elemento es construido con la suma de los dos anteriores (Markushévich, 1986). 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, … son algunos de sus términos. De esta manera, la definición formal de esta sucesión está dada por la expresión $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$, y parte de dos términos predeterminados $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$, siendo a el término de la sucesión en la posición n. Así pues, para $n = 3$, $a_3 = a_{3-1} + a_{3-2}$, es decir, $a_3 = a_2 + a_1$, por lo tanto, $a_3 = 1 + 1 = 2$. Consecuentemente, pueden ser determinados los demás términos de la sucesión utilizando dicho procedimiento. Este objeto matemático está caracterizado por la sencillez de su expresión y su reiterada aparición en patrones inmersos en la cotidianidad, entre ellos, la reproducción de algunos animales, los frutos, y el crecimiento armónico y la configuración de la estructura de diversas plantas; como en el caso de las flores, piñas, conchas de moluscos o de nautilus, semillas del girasol, entre otras (Viggiani, 2006).

Método y desarrollo conceptual

El estudio es de carácter histórico y se empleó la técnica de análisis de contenido. La fuente primaria utilizada es el *Liber Abaci,* escrito por Fibonacci, y su análisis se realizó a partir de los elementos constitutivos de una práctica matemática. Así pues, Obando et al. (2014) identifican varios elementos a tener en cuenta para el análisis de prácticas matemáticas, los cuales se pueden condensar en tres marcos principales e interrelacionados entre sí, basados en la propuesta de Ferreirós (2010):

- **Marco teórico**: relacionado con el objeto de conocimiento sobre el que se actúa, los conceptos ligados a este, el discurso o lenguaje a través del cual se le da soporte epistémico a la práctica matemática, el conjunto de estructuras y modelos teóricos que justifican su quehacer y los problemas planteados en función de su estructura y la forma de la actividad de los individuos.
- **Marco simbólico:** ligado a los instrumentos físicos y simbólicos y a los procedimientos formales e informales que les facilitan la acción matemática a los sujetos, así como las técnicas o métodos que permiten usar esos instrumentos.
- **Agencia:** relacionado con el sujeto, el contexto en el que está situado, las visiones metamatemáticas que orientan la toma de decisiones sobre la práctica matemática, las instituciones que inciden en su construcción, las cosmovisiones, las valoraciones y las posturas filosóficas y ontológicas.

Este estudio está enmarcado en la primera mitad del siglo XIII, periodo en el cual el italiano Leonardo de Pisa publicó su obra titulada *Liber Abaci*, traducida como *El libro del ábaco.* Dicho libro es uno de los textos matemáticos más importantes de la Edad Media, pues contribuyó a la expansión y difusión de los números indoarábigos y los algoritmos para realizar cálculos aritméticos con ellos (Sigler, 2002).

El libro está dividido en quince capítulos, en los que se presentan alrededor de 200 problemas relacionados con las actividades comerciales, económicas, mercantiles y cotidianas de aquella época en Europa (Falconi, 2012). El Liber Abaci posee dos versiones, una de ellas publicada en 1202, y otra en 1228 (Ugarte, 2011). En el presente trabajo se utiliza la segunda versión, tomando como referencia la traducción del latín al inglés moderno, realizada por Sigler (2002). La elección de dicho libro se debe a que, en el capítulo 12, se plantea un problema relacionado con la reproducción de una pareja de conejos, cuya solución emplea la conocida sucesión de Fibonacci.

Resultados

En este apartado se exponen los hallazgos encontrados a partir de los tres marcos de análisis de una práctica matemática (agencia, marco teórico y marco simbólico) y un apartado relacionado con las lecciones pedagógicas, en el que se presentan algunas propuestas para llevar al aula la interdisciplinariedad antes descrita.

Agencia

Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, nació en Pisa alrededor del año 1175, en una familia de mercaderes. Su padre, Guglielmo Bonacci, fue nombrado cónsul de la comunidad de mercaderes pisanos en la ciudad argelina de Bugía alrededor de 1190, y se llevó a Leonardo junto a él para que se instruyera en el arte del cálculo. Leonardo recibió educación de maestros árabes, quienes le enseñaron el sistema de numeración indoarábigo y técnicas para operar con él. Además, le mostraron textos matemáticos árabes sobre álgebra como el *Hisâb al-jabr w'al-muqabalah* escrito por al-Khwarizmi (Koshy, 2001).

Posteriormente, viajó por Egipto, Siria, Grecia, Sicilia y Provenza para realizar negocios, donde amplió sus conocimientos matemáticos y estableció discusiones con eruditos locales. En 1200, regresó a Pisa y escribió el *Liber Abaci*, donde exaltó las ventajas del sistema de numeración indoarábigo y presentó algunos métodos aritméticos y geométricos para operar con este sistema. También, incluyó numerosos problemas sobre el comercio, tales como la conversión entre monedas e intereses, y situaciones relacionadas con el movimiento de barcos y animales.

El *Liber Abaci* marcó un hito en la forma en que muchos europeos utilizaban y operaban los números. Si bien, el sistema de numeración indoarábigo ya había llegado a España a través de los musulmanes, su uso aún era limitado y los números romanos seguían predominando en las prácticas matemáticas del continente. El problema de este sistema es que no permitía escribir las operaciones paso a paso en papel, y su cálculo era largo y tedioso.

A partir del siglo X, Europa comenzó a recuperarse económicamente tras la llamada Edad Oscura. El comercio jugó un rol importante, particularmente en las ciudades italianas de Venecia, Génova y Pisa (Ugarte, 2011). El uso de la Matemática era fundamental, por lo que utilizar un sistema numérico y un algoritmo más sencillo, les permitiría a los comerciantes realizar su trabajo de una manera más eficiente. Poco después de la muerte de Fibonacci en 1240, el sistema indoarábigo y los problemas del *Liber Abaci*, empezaron a apreciarse y a adoptarse gradualmente en actividades comerciales (Koshy, 2001).

Marco teórico

Uno de los problemas planteados en el capítulo 12 del *Liber Abaci* está relacionado con la reproducción de una pareja de conejos durante un año. Dicho problema versa así:

> Un hombre tenía un par de conejos en un lugar cerrado y deseaba saber cuántos pares se crean a partir de este par en un año, considerando que en un mes cada par da lugar a otro par, y al segundo mes, los nacidos comienzan también a reproducirse. (Sigler, 2002, p. 404)

La solución a dicho problema es de la siguiente manera: se parte de una pareja sin reproducirse; para el primer mes habrá dos pares dado que la pareja inicial tiene el primer par de crías; en el segundo mes habrá tres parejas, (las dos anteriores del primer mes y una nueva cría de la pareja inicial); en el tercer mes, dos parejas reproducirán dos parejas más para un total de cinco pares; en el cuarto mes se añaden tres pares más, pues hay tres parejas adultas que dan a luz a tres parejas jóvenes, para un total de ocho pares; en el quinto mes hay ocho parejas de las cuales cinco pueden reproducirse, por lo que habrá cinco pares de crías adicionales, para un total de trece parejas. Siguiendo el algoritmo anterior se determina la forma aditiva de reproducción de pares de conejos al cabo de un año, a los pares que se tienen, se suman los pares nacientes que corresponde, de igual manera, a la cantidad de parejas adultas en el mes anterior (ver Figura 1). Al finalizar la ejecución de los procedimientos para cada mes, se concluye que al cabo de un año se tendrá un total de 377 parejas.

Según Rincón (2004) la situación planteada parece ser una excusa para revelar la sucesión encontrada, en lugar de un estudio experimental. Las condiciones con las que es construida no incluyen la posibilidad de la muerte de los conejos, el sexo de las crías, la cantidad posible de crías por apareamiento, etc. Por lo que su uso como modelo de este fenómeno biológico es impreciso. Aunque Fibonacci no denomina el patrón como una secuencia recurrente, sí reconoce que existe un comportamiento regular entre los números y lo explica así: "puedes ver en el margen cómo operamos, es decir, que sumamos el primer número al segundo…el segundo al tercero, y el tercero al cuarto, y el cuarto al quinto, y así sucesivamente hasta que sumamos el décimo al undécimo" (Sigler, 2002, p. 405).

Growth of Rabbit Colony			
Months	Adult Pairs	Young Pairs	Total
1	1	1	2
2	2	1	3
3	3	2	5
4	5	3	8
5	8	5	13
6	13	8	21
7	21	13	34
8	34	21	55
9	55	34	89
10	89	55	144
11	144	89	233
12	233	144	377

Figura 1. Tabla que registra la reproducción de los conejos al cabo de un año (Burton, 2006).

En el prólogo del libro, Fibonacci declara su intención de mostrar "pruebas ciertas de casi todo lo que se incluyó" (Sigler, 2002, p. 404). Sin embargo, el problema de los conejos carece de una justificación similar a la de otros problemas del capítulo y del libro. Ninguno de los demás problemas presentes en el capítulo estaba relacionado con la sucesión; no obstante, dicho capítulo registra algunos problemas sobre el comercio, que refieren otras categorías de sucesiones, como las progresiones geométricas.

Fibonacci fundamentó su trabajo en diversas obras: las Matemáticas de Euclides, estudios árabes, estudios indios y egipcios, incluyendo la del matemático persa al-Khwarizmi y la teoría de números de Diofanto. Según Koshy (2001), no hay evidencia de que Fibonacci haya tenido acercamiento previo a la sucesión presentada en el problema de los conejos. No obstante, antes de la publicación del libro, los números de Fibonacci ya se encontraban en trabajos matemáticos indios como el Chandaḥśāstra, texto escrito por el matemático indio Pingala. Dicho texto es un tratado relacionado con la métrica poética de la poesía sánscrita, donde retrata un problema sobre las métricas poéticas que se forman para un cuarto de estrofa con un determinado número de matras o moras.

La matra es una unidad de medida que determina la duración de una sílaba o sonido, las sílabas pueden clasificarse en función de esto: la sílaba Laghu (corta) tiene una duración de una matra y la sílaba Guru (larga) una duración de dos matras. Pingala encontró que las posibles combinaciones de sílabas largas y cortas en un verso pueden modelarse matemáticamente

(Singh, 1985). Así es cómo Virahānka, a partir de este trabajo, desarrolló dicho modelo que permite calcular el número total de esas combinaciones M_n para un valor dado n de matras, y demostró que $M_n = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$, lo cual corresponde con los números de Fibonacci que, según Dutta y Sriramb (2016), pueden estar inspirados por el trabajo de Pingala.

Marco simbólico

El problema citado presenta la cuestión de la reproducción y crecimiento de una población de conejos bajo un supuesto particular y muestra cómo se da la sucesión de Fibonacci en función de la cantidad de pares de conejos cada mes. Se utiliza el número de parejas de conejos como variable, representada con números indoarábigos, y los meses como unidad de medida de tiempo.

La descripción es secuencial y progresiva, de tal forma que el desarrollo del problema es ordenado y cuenta con un apoyo ilustrativo que sistematiza el desarrollo y solución del problema (ver Figura 2). Cuenta con un estilo retórico en el que se usa vocabulario coloquial que sugiere una intención pedagógica, pues se dirige a un público general. Además, no se utiliza simbología matemática que exprese el algoritmo para obtener los términos de la sucesión (Livio, 2016). En cuanto a la representación numérica, emplea el sistema de numeración indoarábigo en la notación de la época.

beginning	1
first	2
second	3
third	5
fourth	8
fifth	13
sixth	21
seventh	34
eighth	55
ninth	89
tenth	144
eleventh	233
end	377

Figura 2. Nota que apoya la solución del problema (Sigler, 2002).

Lecciones pedagógicas

La sucesión de Fibonacci tiene un gran potencial para ser llevado al aula, para lo cual debe definirse previamente su objetivo pedagógico. Una alternativa es el enfoque de las Matemáticas recreativas, entendidas como juegos y problemas diseñados para generar conocimiento a través del disfrute y la diversión (Bernuy, 2022). Según Ugarte (2011), los problemas del *Liber Abaci* pertenecen a este ámbito, así el problema de los conejos podría presentarse tal cual como lo plantea Fibonacci. Su solución fomenta el razonamiento lógico, el empleo de las sucesiones numéricas, la modelación y la generalización. En este sentido, su uso es valioso si el objetivo de aprendizaje es comprender la definición de ciertos casos de sucesiones recurrentes o crecimientos poblacionales.

Por otro lado, el problema de los conejos no tiene que aplicarse de manera literal, sino que puede servir como punto de partida para desarrollar otras estrategias que fomenten procesos interdisciplinarios. Aunque la sucesión de Fibonacci no modela con fidelidad la reproducción de conejos, esta situación puede inspirar a la creación de modelos matemáticos más realistas que consideren otras variables relevantes en algún tipo de población de conejos. Así que, desde un enfoque interdisciplinario, se podría realizar una modelación matemática que dé cuenta de la reproducción de cierto número de parejas de conejos, reconociendo factores como el tiempo en alcanzar la madurez sexual según la raza o el periodo de gestación, y buscando que los estudiantes realicen proyecciones e interpretaciones matemáticas a partir de la generalización del patrón encontrado en el fenómeno biológico.

Uribe (2008) señala que los números de la sucesión de Fibonacci están presentes en la disposición en espiral de las ramificaciones de los tallos de algunas plantas, lo que les permite optimizar su exposición al sol, la lluvia y el aire. Por ejemplo, cierta planta ha requerido de tres giros completos para atravesar ocho ramificaciones, obteniendo una razón filotáctica de 3/8, siendo el denominador el número de ramificaciones atravesadas, y el numerador indica la cantidad de giros completos; esta y demás razones que emergen del número de giros y ramificaciones suelen estar relacionadas con los términos alternos de la sucesión de Fibonacci (Livio, 2016).

Esta situación puede ser llevada al aula a través de una de las actividades enunciadas por Pallchisaca y Zhimnay (2019) que consiste en realizar un ejercicio exploratorio alrededor de la institución educativa, donde los estudiantes busquen tallos con ramificaciones. En primera instancia, se les enseña la sucesión de Fibonacci, su definición como sucesión recurrente, sus características y algunas de sus apariciones en la naturaleza. Luego, indicarán si la proporción filotáctica de las ramificaciones de la planta que encontraron en la exploración cumple o no con los números de la sucesión Fibonacci, además, pueden indagar información adicional sobre la planta.

Las aplicaciones mencionadas enriquecen el aprendizaje en el aula y promueven la relación de objetos y conceptos matemáticos con situaciones de diversos contextos, mostrando que las Matemáticas no son ajenas a la vida cotidiana, son una respuesta a la necesidad humana de identificar patrones, generar regularidades y estandarizar los eventos que ocurren alrededor de las prácticas sociales y culturales. De este modo, las Matemáticas surgen como un lenguaje que permite interpretar el entorno, comprender los fenómenos que en él se desarrollan y proyectar soluciones ante las problemáticas que surgen en la vida misma. La sucesión de Fibonacci resulta ser entonces un objeto matemático idóneo para transversalizar las Matemáticas con otras áreas del conocimiento, en particular, con las ciencias naturales. La exploración de los antecedentes históricos y los componentes de la práctica matemática alrededor de este objeto de estudio dan valor agregado al conocimiento del profesor de Matemáticas y ofrece distintas posibilidades para su enseñanza.

Conclusiones

La sucesión de Fibonacci es una sucesión recurrente de segundo orden que se popularizó en Europa durante el siglo XIII a través de un problema relacionado con la reproducción de un par de conejos, planteado en el *Liber Abaci*, un libro escrito por Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci. Aunque se le atribuye a él, esta sucesión ya era conocida siglos antes, por los hindúes, y era usada en la métrica poética de la poesía sánscrita. Sin embargo, esto no reduce la importancia que posee la publicación de Fibonacci para la historia de las Matemáticas, pues permitió su reconocimiento y fue el punto de partida para la realización de estudios posteriores que muestran la presencia de la sucesión en otros contextos.

El análisis de la sucesión de Fibonacci como práctica matemática permitió dar cuenta de ciertos elementos y actores sociales, geográficos, culturales, políticos y económicos que pudieron incidir en su construcción. Es a través del análisis de estos elementos que se encontró una notoria relación entre esta sucesión y demás ramas del conocimiento, lo cual puede ser llevado al aula para contribuir en la interdisciplinariedad, particularmente junto a ciencias naturales, procesos que se requieren en la educación básica y media colombiana. Así pues, la sucesión de Fibonacci puede ser utilizada en el aula tanto para trabajar su definición por recurrencia y su tipo de crecimiento, como para analizar su relación directa con patrones inmersos en la naturaleza. Esto permite a los estudiantes desarrollar procesos de modelación y generalización que, a su vez, les posibiliten comprender fenómenos como la reproducción de ciertos animales o las características filotácticas de diversas plantas.

Se sugiere continuar realizando estudios de carácter histórico que enriquezcan la Educación Matemática y ayuden a comprender el origen de los objetos matemáticos. Finalmente, se exhorta a la investigación de producciones históricas que permitan el desarrollo de procesos interdisciplinarios, un reto aún latente en Colombia, cuyo potenciamiento y expansión se espera alcanzar.

Referencias

Bernuy, M. Y. (2022). *La matemática recreativa* [Tesis de grado]. Universidad Nacional del Santa.

Burton, D. M. (2006). *The history of mathematics: An introduction* (6ª ed.). McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

Córdoba, C. (2015). *La sucesión de Fibonacci y su aplicación didáctica en las matemáticas de la educación secundaria.* [Especialidad: matemáticas]. Universidad San Pablo.

Dutta, A. K., & Sriramb, M. S. (2016). *Mathematics and Astronomy in India before 300 BCE.*

Falconi, P. (2012). Liber Abaci Leonardo Pisano´ s Book of Calculation. *Perspectivas docentes*, (48), 65-67.

Feirrerós, J. (2010). Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices EPSA Philosophical Issues in the Sciences. In M. Suárez, M. Dorato y M. Rédei (Eds.), *EPSA Philosophical Issues in the Sciences.* Dordrecht: Springer Netherlands.

Flores, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, 30-34.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons.

Livio, M. (2016). *La proporción áurea: La historia de Phi, el número más sorprendente del mundo*. Grupo Planeta (GBS).

Markushévich, A. I. (1986). *Sucesiones recurrentes* (C. Vega, Trad.). Editorial MIR. (Obra original publicada en ruso).

Minnaard, C., y Condesse, V. (2005). La sucesión de Fibonacci en los distintos campos conceptuales. *Revista Iberoamericana de Educación*, *37*(3), 1-6.

Obando, G. (2015). Sistemas de prácticas matemáticas en relación con la Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica. Doctorado Interinstitucional en Educación, *Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali (Colombia).*

Obando, G., Arboleda, L. C., & Vasco, C. E. (2014). Filosofía, matemáticas y educación: una perspectiva histórico-cultural en educación matemática. *Revista Científica*, (20), 72-90.

Pallchisaca, S. A., y Zhimnay, E. O. (2019). E*strategia educativa para fomentar la interdisciplinariedad entre las asignaturas de matemática y ciencias naturales mediante la sucesión de fibonacci.* [Trabajo de grado]. Universidad Nacional de Educación.

Rincón, A. (2004). Fibonacci y el número áureo. *Manual formativo de ACTA*, (34), 73-81.

Sigler, L. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation.* Springer Science & Business Media.

Singh, P. (1985). The so-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India. *Historia Mathematica, 12*(3), 229-244.

Ugarte, A. (2011). *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci*. Lulu. com.

Uribe, J. (2008). El pene áureo. La razón áurea y su relación con la anatomía interna del pene. *Urología Colombiana*, 4-6.

Viggiani, M. I. (2006). La sucesión de Fibonacci. *Revista de Educación Matemática, 21*(3).