Dificuldades de licenciandos em Matemática em uma atividade investigativa com uso da realidade aumentada

William **Vieira**
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos
Brasil
wvieira@ifsp.edu.br
Igor Rocha **Siqueira**
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos. Bolsista de IC da FAPESP.
Brasil
igor.rocha@aluno.ifsp.edu.br
Roberto Seidi **Imafuku**
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos
Brasil
roberto.imafuku@ifsp.edu.br

Resumem

Discute-se, neste artigo, as dificuldades reveladas por estudantes de licenciatura em Matemática em uma atividade investigativa sobre geometria plana e espacial com o uso da realidade aumentada. A atividade foi aplicada para 16 estudantes durante a Semana da Matemática ocorrida do campus onde eles estudam. Para as análises, são consideradas as fichas preenchidas e as gravações das telas dos celulares dos participantes. O raciocínio matemático e o desenvolvimento de seus processos é o referencial teórico adotado nas análises das respostas. De maneira geral, foram identificadas dificuldades dos participantes com os processos de classificar e justificar e dificuldades em definir um losango. Além disso, observou-se que alguns participantes justificaram conclusões baseados apenas na visualização dos objetos construídos.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino e Aprendizagem; Raciocínio Matemático; Atividades Investigativas; TDIC; Realidade Aumentada; Formação de Professores; Brasil.

Introdução

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) têm, cada vez mais, participado e transformado os diversos âmbitos da vida cotidiana e dos meios educacionais. A área da Educação Matemática também sofre a influência das TDIC, e professores e pesquisadores têm investigado sobre as possibilidades para os processos de ensino e de aprendizagem e a formação de professores que são colocadas com o desenvolvimento de novos recursos tecnológicos.

Para a área da Geometria, pesquisadores apontam a importância do uso de softwares de geometria dinâmica no ensino de diversos temas, pois estes podem potencializar processos de visualização de objetos, identificação de conceitos e propriedades, e formulação de conjecturas (Amorim; Reis; Ferreira, 2024; Soares, Santana, Santos, 2022).

Mais recentemente, a ferramenta de realidade aumentada (RA) tem se apresentado como um novo recurso tecnológico e suas potencialidades para o ensino de geometria espacial vêm sendo investigadas. Por exemplo, Blass e Junqueira (2023) avaliaram o desenvolvimento do pensamento visual-espacial a partir de atividades de envolveram o uso da calculadora GeoGebra com o recurso da RA (GeoGebraAR). Segundo os eles, os resultados indicaram que "(...) houve diferenças significativas na percepção visual-espacial dos sujeitos participantes da oficina com a inserção dos recursos de visualização GeoGebra Calculadora 3D e RA" (p. 11).
.

Gomes, Reis e Ferreira (2024) trabalharam atividades exploratórias sobre cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros, cones e esferas com uso do GeoGebraAR para estudantes do segundo ano do Ensino Médio. Segundo os autores, as atividades aplicadas na investigação permitiram que os participantes trabalhassem o processo de visualização de objetos por diferentes perspectivas e foi uma nova maneira de desenvolver ideias, conceitos e propriedades dos sólidos geométricos. Em investigação junto a professores da educação básica, Batista e Monteiro (2023) desenvolveram atividades de ensino com o uso da RA e destacam, entre suas conclusões, que o uso desta tecnologia incentivou o trabalho coletivo, a partilha de descobertas e a discussão de ideias entre os docentes, situações que podem favorecer processos de ensino e de aprendizagem.

Embora, no período recente, diversos avanços tenham sido observados no ensino de Matemática com o uso de tecnologias, Lecrer e Pazuch (2020) destacam a necessidade de expansão de pesquisas que desenvolvam atividades de ensino com o uso de softwares de geometria dinâmica e que investiguem a formação de futuros professores.

Estes trabalhos indicam potencialidades do uso da RA para o ensino de Matemática e também colocam a necessidade de se pensar novas atividades, com o uso de tecnologias, que colaborem com os processos de ensino e de aprendizagem e a formação de professores. Pensando em colaborar com essas perspectivas, neste trabalho discutimos as dificuldade e ideias apresentadas por estudantes de Licenciatura em Matemática para uma atividade investigativa que envolve geometria plana e espacial com uso da RA. O desenvolvimento do raciocínio matemático e de seus processos é o referencial teórico adotado na pesquisa.

Referencial teórico

A partir de uma revisão sobre as diversas ideias e teorias que tratam da definição e/ou significado do raciocínio matemático, Jeannotte e Kieran (2017) identificam quatro perspectivas principais: a dicotomia entre atividade e produto, a natureza inferencial do raciocínio matemático, os objetivos e funções do raciocínio matemático, e os aspectos estruturais e processuais da Matemática. Trabalhando estas perspectivas com a perspectiva comportamental (commognitive perspective), definem o desenvolvimento do raciocínio matemático, e seus processos, na sala de aula como "(...) um processo de comunicação com os outros ou consigo mesmo, que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos" (Jeannotte & Kieran, 2017, p. 7). De maneira geral, os aspectos estruturais incluem as formas dedutiva, indutiva e abdutiva, e os aspectos processuais envolvem processos de identificação de semelhanças e diferenças (como generalizar, conjecturar, identificar padrões, comparar e classificar), processos de validação (como validar, justificar e provar), e o processo de exemplificação (Jeannotte & Kieran, 2017).

Sobre o desenvolvimento de processos do raciocínio matemático, Stylianides (2009) aponta que o processo de generalização e o de justificação das afirmações matemática desempenham papel essencial para a compreensão da Matemática em todos os níveis educacionais. Este autor define as atividades de conjecturar, de generalizar e de provar como fundamentais no processo de dar sentido e estabelecer conhecimento matemático, o que não envolve apenas a investigação de ideias ou objetos matemáticos, mas sim o levantamento de hipóteses e a identificação de relações que sustentam a veracidade ou a falsidade de uma determinada afirmação matemática.

Segundo Jeannotte e Kieran (2017), os processos de exemplificar, conjecturar, comparar e de classificar apoiam o desenvolvimento de generalizações e justificativas. O processo de exemplificar permite estabelecer afirmações sobre um problema ao produzir elementos que apoiam conjecturas, generalizações e justificativas. Os processos de comparar e de classificar permitem agrupar e/ou separar objetos matemáticos, com base em propriedades, características ou definições, a partir da identificação de pontos comuns e distintos. (Jeannotte & Kieran, 2017).

Na atividade investigativa discutida neste trabalho buscamos observar o desenvolvimento dos processos de conjecturar, comparar, classificar e justificar devido ao papel central que estes desempenham no desenvolvimento do raciocínio matemático.

Materiais e métodos

Para atingir nossos objetivos, realizamos um minicurso durante a Semana de Matemática de uma instituição federal de ensino, que teve duas horas e quarenta minutos de duração. Tivemos a participação de 16 estudantes da Licenciatura em Matemática. Os participantes trabalharam em duplas e algumas foram previamente selecionadas para realizarem a gravação de tela e áudio de seus celulares, e utilizaram o gravador de tela do próprio celular. O critério de escolha das duplas gravadas foi a disposição e interesse destes em realizar as gravações. Quatro duplas realizaram as gravações. Embora tenham trabalhado em duplas, cada estudante respondeu sua própria ficha de atividade. Todos os celulares utilizados na investigação tinham o recurso da

RA disponível. Nenhum dos participantes havia tido contato com a RA anteriormente. Todos assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) de participação na pesquisa e são tratados por pseudônimos na discussão dos resultados.

No início do minicurso realizamos uma explanação sobre a RA na calculadora 3D do aplicativo GeoGebra para celular e sobre ferramentas que seriam utilizadas na atividade. Em seguida, entregamos uma ficha com orientações de uma construção a ser realizada no GeoGebraAR, conforme destacado Figura 1. A ficha também apresenta duas questões que deveriam ser investigadas, discutidas e respondidas pelos participantes com base na construção realizada. Após a realização da atividade pelos participantes houve uma discussão coletiva, conduzida pelos pesquisadores, e dificuldades e dúvidas dos estudantes foram sanadas.

Construção:

- **Abra o GeoGebra 3D e projete o ambiente da realidade aumentada (AR);**
- **Esconda os eixos coordenados;**
- **Construa dois pontos A e B;**
- **Utilizando a ferramenta "CUBO", construa um cubo clicando nos pontos A e B;**
- **Obtenha os pontos médios dos segmentos AE e CG;**
- **Construa os segmentos HI, IB, BJ, JH (você pode digitar o comando segmento(H,I) direto na caixa de comandos).**

1) Qual a figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH? Justifique sua resposta.

2) A figura construída é plana? Justifique sua resposta.

Figura 1. Logo reducido de REDUMATE.

Com a questão 1, esperávamos que os participantes concluíssem, com base em seus conhecimentos sobre quadriláteros e apoiados pelas ferramentas de medição (ângulo e distância) do GeoGebraAR, que a figura formada é um losango. Entendemos que, ao resolverem a questão os estudantes mobilizariam os processos de classificação e justificação, uma vez que deveriam, a partir da identificação das medidas dos ângulos e dos lados, reconhecer que o quadrilátero formado é um losango e, resgatando a definição deste quadrilátero, justificar sua decisão.

Com a questão 2, esperávamos que os participantes, usando a ferramenta plano por três pontos do GeoGebraAR, construíssem planos usando três pontos distintos do losango e observassem na janela de álgebra do GeoGebraAR que as equações obtidas são equivalentes e, então, concluíssem que a figura formada é plana. Entendemos que, ao utilizarem a ferramenta plano por três pontos, os participantes deveriam mobilizar a definição de figuras planas e, a partir de um processo de comparação das equações obtidas e do resgate de conhecimentos sobre equações do plano e equações equivalentes, seriam capazes de classificar a figura e justificar suas conclusões. Seguimos com a discussão dos resultados.

Discussão dos resultados

Conforme destacamos anteriormente, nenhum dos participantes havia tido contato com a RA anteriormente, contudo não tiveram dificuldades em realizar a construção proposta neste ambiente. Além disso, o novo recurso tecnológico foi recebido com bastante entusiasmo e interesse pelos estudantes e, nas discussões que se seguiram à realização da atividade, muitos indicaram querer usar este tipo de recurso e de atividade em suas futuras aulas. A Figura 2 apresenta a construção realizada pela dupla João e Maria.

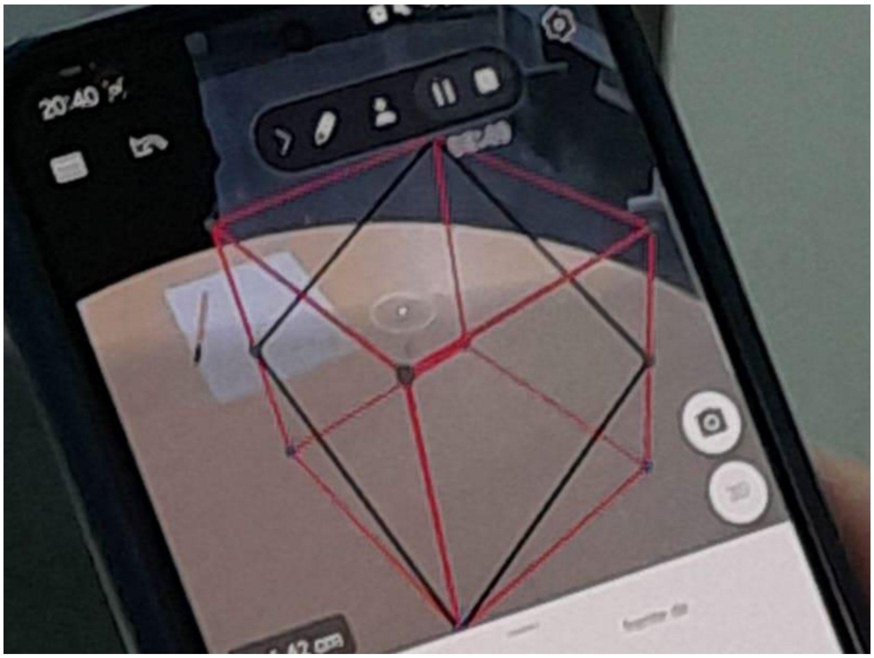
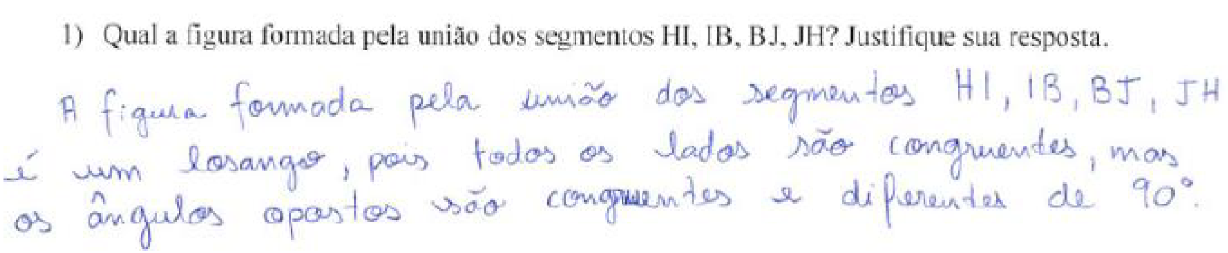


Figura 2. Construção realizada pela dupla João e Maria

Para a questão 1, apenas cinco dos 16 participantes conseguiu conjecturar, classificar e justificar que o quadrilátero construído é um losango, o que evidencia bons conhecimentos desses estudantes sobre a definição de quadriláteros, o estabelecimento de conjecturas e dos processos de classificação e justificação. A Figura 3 apresenta a resposta de Andrea, que exemplifica essa situação.

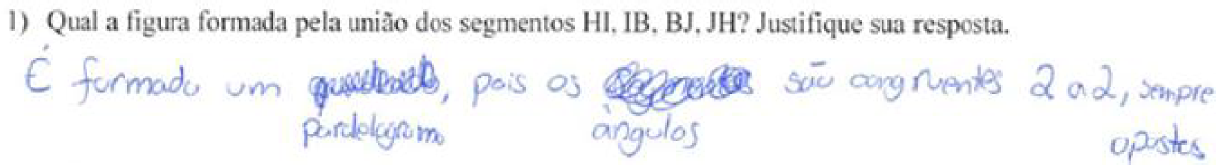

1) Qual a figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH? Justifique sua resposta.

A figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH é um losango, pois todos os lados são congruentes, mas os ângulos opostos são congruentes e diferentes de 90°.

A figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH é um losango, pois todos os lados são congruentes, mas os ângulos opostos são congruentes e diferentes de 90°.

Figura 3. Resposta da participante Andrea para a questão 1.

Quatro participantes classificaram o quadrilátero como losango, porém não apresentaram justificativas que sustentassem suas conclusões. Dois participantes observaram apenas as medidas dos ângulos internos do quadrilátero e o classificaram como paralelogramo. A resposta de Beto (Figura 4) exemplifica essa situação.

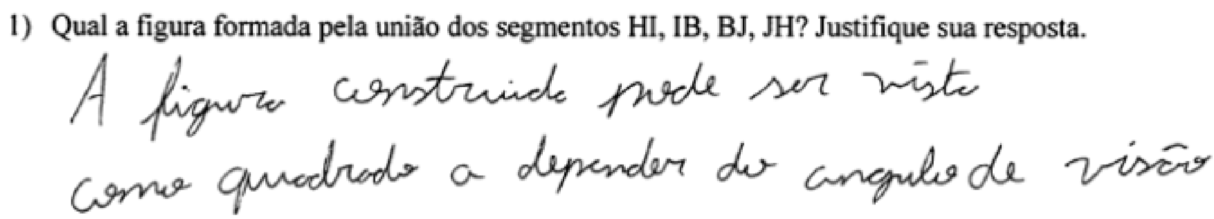

1) Qual a figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH? Justifique sua resposta.

É formado um paralelogram, pois os ângulos são congruentes 2 a 2, sempre opostos

É formado um paralelogramo, pois os ângulos são congruentes 2 a 2, sempre opostos.

Figura 4. Resposta do participante Beto para a questão 1.

Outros dois participantes classificaram a figura apenas com quadrilátero, sem apresentar justificativa. Três participantes classificaram o quadrilátero como quadrado e a justificativa de Carlos (Figura 5) chama a atenção, pois está baseada na perspectiva da observação do objeto construído.


1) Qual a figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH? Justifique sua resposta.

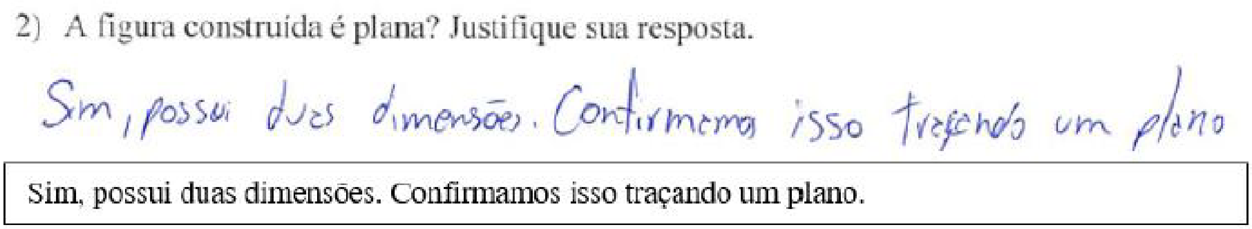
A figura construida pode ser vista como quadrado a depender do angulo de visão

A figura construída pode ser vista como quadrado a depender do ângulo de visão.

Figura 5. Resposta do participante Carlos para a questão 1.

Embora o processo de visualização seja um dos grandes beneficiados pelo uso das TDIC e particularmente pelo recurso da RA, a resposta de Carlos indica que os limites e usos das tecnologias digitais para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática precisam ser cuidadosamente trabalhados junto aos futuros professores, para que estes possam utilizá-las de forma coerente e significativa em suas aulas, e para que sejam, também, capazes de discutir esses limites com seus estudantes.

Para a questão 2 (Figura 1), oito participantes apontaram que a figura é plana, pois possui duas dimensões e está contida num plano. A resposta de Daniela (Figura 6) exemplifica essa situação.

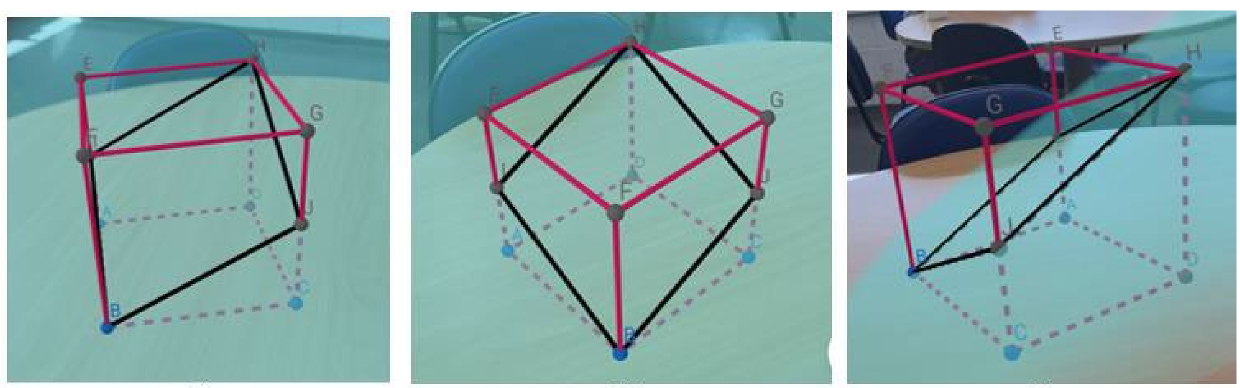

2) A figura construída é plana? Justifique sua resposta.

Sim, possui duas dimensões. Confirmamos isso traçando um plano

Sim, possui duas dimensões. Confirmamos isso traçando um plano.

Figura 6. Resposta da participante Daniela para a questão 2.

Na gravação da dupla Daniela e Eduardo verificamos que eles observam o losango construído de várias perspectivas e conjecturam que trata-se de uma figura plana. Para confirmar a conjectura, constroem um plano pelos pontos I, J (pontos médios de AE e CG) e H (Figura 7a). Então, Daniela diz: “Veja se passa no B (quarto vértice do losango)” e, ao ouvir uma confirmação de Eduardo a partir de uma vista que avalia como pouco conveniente (Figura 7b), aponta: “Não, você tem que ver de lado”. Em seguida, recebe o celular das mãos de seu colega, muda a perspectiva de visualização da construção (Figura 7c) e destaca, com entusiasmo: “É plano! É plano!”.



(a) (b) (c)

Figura 7. Vistas observadas pela dupla Daniela e Eduardo.

Em sua resposta, a dupla Daniela e Eduardo repete o problema observado para Carlos (Figura 5) e baseia sua decisão somente na observação da imagem. Nesse caso, é verdade que o ponto B pertence ao plano construído (e que a figura é plana), contudo apenas a visualização da construção não é suficiente para garantir este fato. Nenhuma das duplas gravadas construiu mais de um plano ou observou equações na janela de álgebra, conforme era esperado. Quatro participantes afirmaram que o quadrilátero construído é plano pois “não tem profundidade” e os demais quatro não apresentaram justificativa para suas decisões.

As respostas para a questão 2 indicam que boa parte dos participantes tem a ideia de que, para uma figura ser plana, ela precisa estar contida num plano. No entanto, também fica evidenciado pelas respostas dificuldades com o processo de justificação e uma tendência em pautar as decisões pela visualização dos objetos. O processo de comparação, que esperávamos observar no trabalho com as equações dos planos, não pode ser avaliado uma vez que nenhum dos participantes realizou a construção de mais de um plano.

Conclusões

Uma avaliação geral das respostas indica que, embora alguns estudantes tenham sido capazes de conjecturar, classificar e justificar corretamente que o quadrilátero da questão 1 é um losango, para a maioria dos participantes ficaram evidenciadas dificuldades com relação aos processos de classificação e de justificação do raciocínio matemático, além de dificuldades com os elementos necessários para definir um quadrilátero.

No caso da questão 2, boa parte dos participantes mostrou entender o que garante uma figura ser plana, contudo as justificativas apresentadas para isso se mostraram frágeis, pois foram baseadas apenas na visualização de objetos construídos.

Potencialidades da RA foram evidenciadas na realização da atividade, principalmente no que diz respeito ao desenvolvimento do processo de visualização e corroboram as posições defendidas por Blass e Junqueira (2023) e Gomes, Reis e Ferreira (2024). No entanto, o desenvolvimento da atividade também revelou que os limites do processo de visualização como suporte para a elaboração de justificativas em Matemática precisam ser cuidadosamente trabalhados e discutidos com estudantes e futuros professores. As conclusões tomadas por Carlos e pela dupla Daniela e Eduardo nas questões 1 e 2, respectivamente, evidenciam essa perspectiva.

Por fim, entendemos que a atividade investigativa aplicada na investigação cumpriu seu papel, pois foi recebida com bastante entusiasmo pelos participantes, possibilitou trocas e discussões entre eles, além de ter permitido que muitas dificuldades e confusões fossem reveladas e pudessem ser dirimidas.

Agradecimentos

À FAPESP, pela bolsa de Iniciação Científica concedida (processo no. 2023/14362-3)

Referências

Amorim, S. L. G.; Reis, F. S. & Ferreira, N. (2024). A utilização integrada da realidade aumentada no software GeoGebra por meio de dispositivos móveis para a aprendizagem de geometria espacial no ensino médio. *VIDYA*, 44(1), 211–230. DOI: https://doi.org/10.37781/vidya.v44i1.4771

Batista, C. C. y Paulo, R. M. (2023). Formação do professor para ensinar matemática com Realidade Aumentada: o que se mostra? *Boletim GEPEM*. n. 82, 66–82. https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/704

Blass, L.; Junqueira y S. M. S. (2023). Os modos do pensamento visual-espacial na inserção da calculadora GeoGebra 3D e realidade aumentada. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 18(2), 1-11. DOI: https://doi.org/10.54343/reiec.v18i2.362

Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 1–16.

Lecrer, O. P. V. G. y Pazuch, V. (2020). O ensino de Geometria Espacial: um panorama de pesquisas por meio de uma metassíntese. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 20(9), 38-61. DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.20.38-61

Soares, F. R., Santana, J. R. & Santos, M. J. C. (2022). A realidade aumentada na aprendizagem de Geometria Espacial e as contribuições da Sequência Fedathi. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 13(4), 1-25.

Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288. DOI: https://doi.org/10.1080/10986060903253954