



Características del aprendizaje de la práctica profesional específica de planificar lecciones: el caso de la razón y proporción

Jonasthan **Espinoza** González

Universidad Nacional

Costa Rica

jonathan.espinoza.gonzalez@una.cr

Ángela **Buform**

Universidad de Alicante

España

angela.buform@ua.es

Salvador **Llinares**

Universidad de Alicante

España

sllinares@ua.es

Resumen

El estudio caracteriza cómo estudiantes para profesor de Matemáticas aprenden la práctica profesional específica de planificar una lección. Catorce estudiantes para profesor participaron en una propuesta formativa dirigida a aprender la práctica de diseñar, analizar y modificar un plan de lección para promover el razonamiento proporcional como un aspecto de su competencia docente. Una característica identificada en el aprendizaje de esta práctica es la relación entre cómo es usado el conocimiento matemático para justificar la secuencia de problemas, la anticipación de estrategias de resolución y las dificultades en la interpretación del impacto de los problemas en el desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes. Esta característica es ilustrada a través de un estudio de caso mostrando que, aprender esta práctica profesional se apoya en la articulación entre el conocimiento de Matemáticas y sobre la progresión del razonamiento proporcional y que además afecta a sus decisiones de mejora de la planificación.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Planeamiento educativo; Investigación de casos; Razones y proporciones; Mirar profesionalmente; Costa Rica.

Definición y relevancia del problema

La planificación de lecciones es una práctica profesional docente específica que influye en la calidad de la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. En el caso de la enseñanza de razones y proporciones, una planificación adecuada permite a los docentes prever estrategias que fomenten el razonamiento proporcional en sus estudiantes, un concepto clave en el currículo de secundaria y base para el desarrollo del pensamiento algebraico (Lamon, 2007). Sin embargo, la planificación de este contenido presenta desafíos específicos, principalmente porque su enseñanza debe desligarse del uso de reglas para la resolución de problemas que no garantiza un razonamiento proporcional (Lamon, 2007; Rivas et al., 2012). Por ello, es esencial que las propuestas formativas oferten oportunidades de aprendizaje de esta práctica profesional que ayude a los futuros profesores a aprender a usar el conocimiento matemático para la enseñanza de la razón y proporción para diseñar lecciones con estrategias pedagógicas adecuadas (Amador et al., 2024; Castillo y Burgos, 2022).

En este sentido, la práctica profesional docente específica de planificar lecciones como parte de la competencia docente del profesor es crucial para que estos puedan analizar y mejorar sus decisiones pedagógicas. Esta práctica consiste en identificar aspectos relevantes en los problemas que conforman la planificación e interpretarlos en términos del apoyo de los problemas al desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes, para tomar decisiones fundamentadas que contribuyan al aprendizaje de los estudiantes (Spitzer y Phelps-Gregory, 2024). En particular, permite a los futuros profesores valorar si el plan de la lección fomenta el desarrollo del razonamiento proporcional (Castillo y Burgos, 2024).

Estudiar la articulación entre los diferentes dominios del conocimiento de Matemáticas para la enseñanza (MKT - Ball et al., 2008) de la razón y la proporción es clave para comprender cómo los futuros docentes aprenden a diseñar lecciones que promuevan este tipo de razonamiento. La integración de estas dimensiones permite no solo estructurar las tareas matemáticas considerando la progresión del desarrollo del razonamiento proporcional, sino también anticipar dificultades y tomar decisiones informadas sobre los recursos y enfoques didácticos más adecuados.

Aprender a diseñar planes de lecciones sobre la razón y proporción: Articulación entre las destrezas de identificar, interpretar y decidir

La práctica profesional específica de planificar lecciones, como un aspecto de la competencia docente implica tres destrezas que articulan la mirada profesional del docente: identificar, interpretar y decidir. En el tema específico de la razón y proporción, la destreza identificar consiste en reconocer, en la secuencia de problemas de la planificación, elementos matemáticos como tipos de razones, tipos de problemas, estrategias de resolución, representaciones y aspectos que influyen en la dificultad de los problemas. La destreza interpretar conlleva analizar en qué medida la secuencia de problemas favorece el desarrollo del razonamiento proporcional. Por último, la destreza decidir refiere a los ajustes realizados en los problemas para aumentar las oportunidades de desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes.

Esta competencia se caracteriza por el uso del conocimiento de Matemáticas y de didáctica de las Matemáticas que apoyan las tres destrezas (Llinares et al., 2019). Este conocimiento vinculado a la razón y proporción incluye el conocimiento matemático de la idea de razón como una relación multiplicativa entre dos cantidades y su extensión a otro par de cantidades (Lamon, 1993) y el reconocimiento de situaciones proporcionales y no proporcionales (van Dooren et al., 2005). También conocimientos sobre tipos de problemas proporcionales y no proporcionales, estrategias correctas e incorrectas para resolver estos problemas, aspectos que intervienen en la dificultad de los problemas y diferentes formas de representar la relación funcional. Además, implica comprender el aprendizaje de la razón y proporción a través de las transiciones, entre diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional (Espinoza-González et al., 2024; Lamon, 2007; Lobato et al., 2010). La primera transición va desde un razonamiento no proporcional (nivel 0) a considerar la razón como una relación multiplicativa entre dos cantidades (nivel 1); la segunda, desde el uso de una razón (nivel 1) a formar múltiples razones escalares, empezando a comprender las razones funcionales, y la idea de la constante de proporcionalidad (nivel 2); y la tercera transición va de usar la constancia de las razones funcionales (nivel 2) a representarla de varias maneras (tabular, algebraica y verbal) (nivel 3). Estos conocimientos matemáticos y didácticos de la razón y proporción permiten al docente justificar el diseño o selección de problemas que promuevan el razonamiento proporcional, prever dificultades de aprendizaje, anticipar acciones instruccionales o seleccionar estrategias didácticas adecuadas (Ball et al., 2008).

El aprendizaje de la práctica profesional específica de planificar y analizar lecciones de Matemáticas requiere la articulación entre dominios de conocimiento en las destrezas (identificar, interpretar y decidir) de la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza. La articulación se entiende como la relación coherente entre el uso de los elementos del conocimiento en las diferentes destrezas. Es decir, la capacidad de definir y conectar de manera clara los elementos de conocimiento que deben intervenir en los diferentes contextos de uso. Por ejemplo, cuando se identifican los elementos matemáticos relevantes de la situación, su interpretación desde las transiciones en la progresión del razonamiento proporcional, que a su vez, permitirán justificar las decisiones en cada momento.

Con base en lo anterior, el objetivo de esta investigación es identificar características de cómo estudiantes para profesor aprenden a planificar lecciones sobre la razón y proporción como un aspecto de la competencia docente. En particular, considerando como se articula diferentes elementos del conocimiento necesario para enseñar en el desarrollo de las destrezas que configuran la competencia docente (identificar, interpretar y decidir)

Método

En este estudio participaron 14 estudiantes para profesor de Matemáticas de educación secundaria (EPs) en el tercer año de formación de un total de cinco años. Los EPs participaron en una propuesta formativa de 17 semanas de duración (una sesión semanal de 150 minutos cada una y 7 horas de estudio independiente posterior a cada sesión) en la cual se discutieron dos documentos con información teórica (DOC1 y DOC 2) y los EPs resolvieron una actividad introductoria (Act.int) y seis prácticas profesionales (PR1, PR2, ..., PR6) (Figura 1) con el propósito de desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el razonamiento proporcional en tres ámbitos: el pensamiento matemático de los estudiantes, la planificación

curricular y la reflexión sobre la implementación de la planificación (Espinoza-González et al., 2024). Esta comunicación se centra en el foco específico de la planificación de una lección para favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de secundaria.

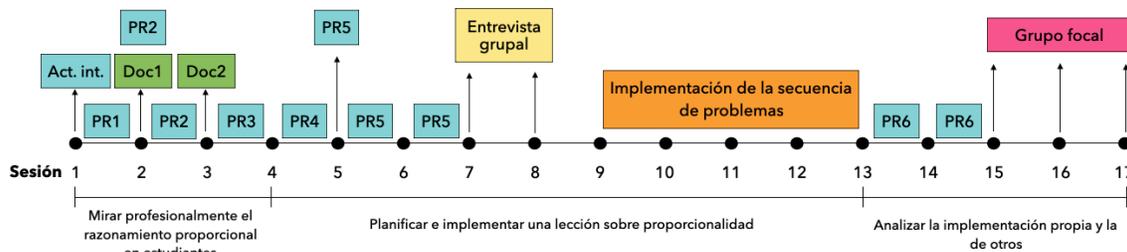


Figura 1. Estructura de la propuesta formativa

En las cuatro primeras sesiones, se introdujeron los conceptos de razón y proporción (Act.int), se resolvieron seis problemas proporcionales (PR1) y se discutieron las características de problemas proporcionales y no proporcionales, los factores que dificultan su resolución y características de estrategias correctas e incorrectas (Doc1) analizando los problemas resueltos en la PR1 (PR2). Además, se discutieron las transiciones en el desarrollo del razonamiento proporcional (Doc2) a través de los aspectos clave en las respuestas de tres estudiantes, con distintos niveles de comprensión, a cinco problemas de razones y proporciones, interpretando su comprensión y proponiendo decisiones de qué hacer en cada caso (PR3). Finalmente, los EPs analizaron y propusieron acciones de mejora al tema de proporcionalidad de un libro de texto de secundaria (PR4). En las sesiones 5 y 6 los EPs, en cuatro grupos de dos integrantes (G1, G2, G3 y G4) y dos de tres integrantes (G5 y G6), diseñaron y analizaron una secuencia de problemas (plan de una lección) para desarrollar el razonamiento proporcional en estudiantes de primer año de educación secundaria en Costa Rica (PR5) (Figura 2). Las cuestiones de la 1 a la 5 se vinculan con la destreza identificar, mientras que la cuestión 6 con la destreza interpretar. Por su parte, los ajustes efectuados a la planificación inicial se relacionan con la destreza decidir.

<p>En grupos de dos integrantes diseña/selecciona/adapta una secuencia de problemas para promover en dos lecciones de 40 minutos cada una, la habilidad específica del programa de estudios de Matemática para primer año de Educación Secundaria, <i>Analizar relaciones de proporcionalidad directa de forma verbal, tabular, gráfica y algebraica</i>. Para su diseño considera los aspectos estudiados en los documentos 1 y 2. Posteriormente, para cada una de los problemas diseñados indica y JUSTIFICA:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Tipos de razones involucradas. 2. Tipos de representaciones utilizadas para relacionar las cantidades. 3. Tipo de problema: proporcional o no proporcional. 4. Características de los problemas que influyen en su dificultad. 5. Estrategias correctas e incorrectas que podrían utilizar los estudiantes para resolverlas. 6. Transiciones en el pensamiento de los estudiantes que apoyan el desarrollo del razonamiento proporcional involucradas en la resolución del problema.

Figura 2. Cuestiones planteadas a los EPs

En las sesiones 7 y 8, se realizó una entrevista semiestructurada donde los EPs justificaron su planificación. Como consecuencia de la entrevista, los EPs realizaron modificaciones a la planificación inicial (la entrevista fue grabada en audio para su análisis). En las sesiones 9 a 12, los EPs implementaron el plan revisado en una aula de primero de secundaria durante 80 minutos y analizaron de forma individual su implementación (PR6) y la de sus compañeros (sesiones 13 y hasta la 17) (Figura 1). La implementación de la planificación y su valoración no son consideradas en este informe. Los datos del estudio son (i) las justificaciones de la secuencia de

problemas diseñada, (ii) las respuestas a la entrevista y (iii) las modificaciones realizadas a la planificación inicial. Para realizar el análisis, se elaboraron comentarios preanalíticos sobre los elementos del razonamiento proporcional que usaban los EPs para justificar la secuencia de problemas que diseñaron (cuestiones de la 1 a la 5) y sobre la interpretación de cada problema para determinar en qué medida la secuencia de problemas apoyaba las transiciones en el desarrollo del razonamiento proporcional (cuestión 6). Posteriormente, se identificaron las modificaciones realizadas a la planificación inicial.

En esta comunicación se presentará el análisis de las respuestas del G6 como un caso que ejemplifica la articulación entre las destrezas de identificar los elementos matemáticos a lo largo del proceso de diseño, justificación y modificación, las interpretaciones generadas y las decisiones tomadas con los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza al planificar una lección para desarrollar el razonamiento proporcional.

Resultados

El G6 diseña una secuencia de problemas para desarrollar el razonamiento proporcional combinando problemas proporcionales y no proporcionales. Este grupo identifica características en los problemas como tipos de razones, formas de representación de la razón funcional, tipos de problemas, aspectos que intervienen en la dificultad de los problemas y estrategias correctas e incorrectas. Además, en algunos casos interpretan el apoyo de los problemas a las transiciones del desarrollo del razonamiento proporcional y ajustan los problemas enfocándose en su estructura numérica. El G6 propone tres problemas (Figura 3). El problema 1 es de comparación numérica con dos razones funcionales no enteras ($7.5/4$ y $12/5$) y dos escalares no enteras ($7.5/12$ y $4/5$) con números decimales. El problema 2 es una situación no proporcional de tipo constante. El problema 3 es de valor perdido en una tabla proporcional que presenta una razón funcional no entera ($12/16.2$) y razones escalares enteras ($2/8$, $2/12$, $5.4/16.2$) y no enteras ($8/12$, $5.4/24.3$) con algunos valores decimales y solicita determinar la representación algebraica de la relación funcional.

Problema 1	Problema 2	Problema 3														
<p>Marcelo y Felipe un día deciden ver quien es más fanático del anime basándose en cuanto de su tiempo libre invierten consumiendo este producto, tras hacer sus obligaciones a Marcelo le quedan 7,5 horas libres de las cuales invierte 240 minutos en ver animes, mientras que a Felipe le quedan 12 horas libres y de estas invierte 5 horas en ver anime, según el criterio determinado por los chicos, ¿cuál de los dos es más fanático del anime?</p>	<p>Un grupo coreográfico que posee 6 integrantes presenta la coreografía de una obra en 2 sesiones de 40 minutos. ¿Cuántos minutos tardará un grupo de 12 integrantes en presentar la misma coreografía?</p>	<p>Anne tiene una piscina inflable la cual puso a llenar con un flujo constante de agua, dado que estaba aburrida decidió medir la cantidad de agua de la piscina cada 2 minutos y decidió apuntar algunos de los datos en la siguiente tabla. Sin embargo, omitió algunos de los datos porque a veces olvida escribir las cosas por lo que la tabla quedo incompleta. Complete la siguiente tabla:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>Minutos</td> <td>2</td> <td></td> <td>8</td> <td>12</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Cantidad de agua</td> <td></td> <td>5.4</td> <td></td> <td>16.2</td> <td>24.3</td> <td>x</td> </tr> </tbody> </table>	Minutos	2		8	12			Cantidad de agua		5.4		16.2	24.3	x
Minutos	2		8	12												
Cantidad de agua		5.4		16.2	24.3	x										

Figura 3. Problemas en la propuesta inicial de G6

Cuando analizan estos problemas, el G6 identifica las razones funcionales enteras y no enteras, pero no reconocen las razones escalares. Sin embargo, son conscientes que las razones no enteras aumentan la dificultad de los problemas. Por ejemplo, en la entrevista cuando se le pide que justifiquen por qué colocaron los números 12 y 16.2 (razón funcional $12/16.2$) en el

problema 3, uno de los miembros del grupo menciona “*procuré que la razón no fuera entera [...] dado que si hacemos la división no es entera. Entonces eso le iba a proporcionar como cierta dificultad más al ejercicio*”. Además, el G6 reconoce que las razones funcionales enteras sin valores decimales facilitan la resolución del problema, comentando en la entrevista que si en el problema 1 se cambia “*las 7.5 horas por un 2 quizá y los 240 minutos por un 4, esto le va a dar más sencillez [a la resolución del problema]*”. Por otra parte, en el caso del problema 2, que es una situación no proporcional, durante la entrevista indican que incluyen los números 6 y 12, que en caso de ser un problema proporcional correspondería a la razón escalar entera 6/12, para “*hacer creer que es directamente una razón de 1 a 2, [pero] en realidad no lo es, porque este no es un problema proporcional*”. Estos EPs, además de las razones no enteras, también identifican que los números decimales en las razones, números pequeños y la familiaridad del contexto intervienen en la dificultad de los problemas, aunque no detallan en qué forma el contexto interviene en la resolución del problema. Respecto a los números decimales, en la entrevista indicaron que en el problema 1 incluyeron el valor 7.5 “*más que todo pensando en la dificultad [del problema]*” y sobre el problema 3 mencionan que “*al utilizar decimales queríamos aumentar la dificultad del ejercicio*”. En relación con el uso de números pequeños, mencionan que en el problema 1 “*se decidió utilizar números que fueran relativamente pequeños para que permitieran la conversión [de horas a minutos]*”.

Respecto a los modos de representación de la relación funcional, identifican la representación tabular en el problema 3, pero no la representación algebraica de la razón funcional que solicita este problema en la última columna de la tabla. Este grupo también reconoce los tipos problemas proporcionales que proponen (comparación numérica en el problema 1 y valor perdido en el problema 3) y señalan que el problema 2 es una situación no proporcional, pero sin especificar que es de tipo constante.

Acerca de las estrategias correctas para resolver los problemas, el G6 propone estrategias acordes con el tipo de problema proporcional que propone. Por ejemplo, para el problema 1 de comparación numérica menciona que puede utilizarse “*unificación de antecedentes o consecuentes y reducción a la unidad*” y para el problema 3 de valor perdido menciona “*el enfoque escalar, enfoque funcional, reducción a la unidad, estrategia constructiva y regla de tres*”. No obstante, en ningún caso detalla los procedimientos asociados a estas estrategias. Para el caso del problema 2, que es una situación no proporcional de tipo constante, no mencionan una estrategia en particular, sino que indica que se debe “*hacer el análisis de que no es una situación proporcional*”. Este grupo también reconoce estrategias incorrectas que se relacionan con el tipo de problema propuesto. Por ejemplo, mencionan “*comparar únicamente antecedentes o consecuentes*” en el problema 1 de comparación numérica, “*tratar como si fuese una proporcionalidad y aplicar algún método de resolución para estas*” en el problema 2 que es una situación no proporcional y la estrategia aditiva para el problema 3 de valor perdido.

En relación al potencial de los problemas para apoyar el desarrollo del razonamiento proporcional, el G6 interpreta y justifica de forma correcta que el problema 3 promueve la transición 3 porque implica representar de forma algebraica la razón funcional pero sin usar estos términos. Al respecto indica “*transición 3 ya que [el estudiante] debe rellenar la casilla del valor x*”. Sin embargo, este grupo tiene dificultades para justificar que el problema 1 de comparación numérica apoya la transición 2, ya que los EPs relacionan la transición 2 con el establecimiento de una relación multiplicativa, siendo la construcción de múltiples razones la

característica principal de esta transición. Al respecto mencionan “*transición 2 debido a que la asociación entre las dos cantidades se da de una forma multiplicativa*”. En el caso del problema no proporcional (problema 2) no interpretan cómo este problema apoya alguna transición, sino que mencionan que “se requiere de un conocimiento profundo sobre proporcionalidad para poder distinguir una situación que es proporcional de una que no lo es”.

Por último, las modificaciones a los problemas de la planificación inicial no se realizan con el propósito que el problema apoye de una mejor manera alguna de las transiciones, sino que buscan disminuir la complejidad de los problemas y facilitar la comprensión de las relaciones entre las cantidades (como un objetivo de aprendizaje que favorece la comprensión inicial de la idea de razón). En la tabla 1 se muestran las modificaciones realizadas a los problemas 1 y 3. El problema 2 no fue modificado.

Tabla 1

Modificaciones realizadas por G6 a los problemas 1 y 3 de la propuesta inicial

Problema	Modificaciones														
<p>Problema 1. Marcelo y Felipe un día deciden ver quien es más fanático del anime basándose en cuanto de su tiempo libre invierten consumiendo este producto, tras hacer sus obligaciones a Marcelo le quedan 7,5 horas libres de las cuales invierte 240 minutos en ver animes, mientras que a Felipe le quedan 12 horas libres y de estas invierte 5 horas en ver anime, según el criterio determinado por los chicos, ¿cuál de los dos es más fanático del anime?</p>	<p>-Cambiar el valor 7.5 por 6, lo cual produce que la razón escalar no entera 7.5/12 sea ahora la razón escalar entera 6/12 (lo que hace más evidente que Felipe tiene el doble de horas libres que Marcelo). -Remplazar todos los valores con decimales por números enteros.</p>														
<p>Problema 3. Anne tiene una piscina inflable la cual puso a llenar con un flujo constante de agua, dado que estaba aburrida decidió medir la cantidad de agua de la piscina cada 2 minutos y decidió apuntar algunos de los datos en la siguiente tabla. Sin embargo, omitió algunos de los datos porque a veces olvida escribir las cosas por lo que la tabla quedo incompleta. Complete la siguiente tabla:</p> <table border="1" data-bbox="354 1339 885 1438"> <tbody> <tr> <td>Minutos</td> <td>2</td> <td></td> <td>8</td> <td>12</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Cantidad de agua</td> <td></td> <td>5.4</td> <td></td> <td>16.2</td> <td>24.3</td> <td>x</td> </tr> </tbody> </table>	Minutos	2		8	12			Cantidad de agua		5.4		16.2	24.3	x	<p>-Cambiar la razón funcional no entera 12/16.2 por la razón funcional entera 12/48 (lo que hace más evidente que la cantidad de agua es cuatro veces la cantidad de minutos) -Remplazar todos los valores con decimales por números enteros.</p>
Minutos	2		8	12											
Cantidad de agua		5.4		16.2	24.3	x									

Como se observa en la Tabla 1, las modificaciones se enfocan en cambiar los valores para que las razones funcionales o escalares sean enteras y que los valores en las razones sean números enteros.

Conclusiones

Este estudio se centró en comprender cómo estudiantes para profesor articulan las destrezas de la competencia mirar profesionalmente la planificación curricular con el conocimiento matemático para la enseñanza de la razón y proporción, durante la planificación de una lección para desarrollar el razonamiento proporcional en estudiantes de secundaria. Los resultados señalan como una característica de la articulación, el uso de elementos del conocimiento para la

enseñanza de la razón y proporción para justificar el diseño de una secuencia de problemas que promueve tanto el establecimiento de relaciones multiplicativas entre cantidades (problemas 1 y 3) como el reconocimiento de situaciones no proporciones (problema 2). Además, conocimiento sobre el desarrollo del razonamiento proporcional permitió a los EPs enlazar las características de los problemas (proporcionales y no proporcionales) con la identificación anticipada de estrategias correctas e incorrectas, consistentes con los tipos de problemas planteados y la capacidad para proponer modificaciones a la estructura numérica de las razones en los problemas con el propósito de aumentar o disminuir su complejidad. Sin embargo, una comprensión incompleta de las características del aprendizaje de la razón y proporción de los EPs genera dificultades para interpretar el aporte de los problemas a las transiciones del desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes y la capacidad de decidir de los EPs para modificar aspectos de los problemas con el propósito de apoyar estas transiciones.

Reconocimientos. La participación de Ángela Buforn y Salvador Llinares ha sido apoyada por la Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España (Ref. No. PID2023-149624NB-100).

Referencias

- Amador, J., Glassmeyer, D., & Brakoniecki, A. (2024). Teacher's noticing of proportional reasoning. *Journal of mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1007/s10857-024-09625-7>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Castillo, M.J., & Burgos, M. (2024). Decision making in managing semiotic conflicts in curriculum materials: a training program with prospective teachers in Costa Rica. *Educational Studies in Mathematics*, <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10363-z>
- Castillo, M. J., & Burgos, M. (2022). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analyzing textbooks lessons. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(6), em2121. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12092>
- Espinoza-González, J., Buforn, À., & Llinares, S. (2024). *Diseño de una propuesta formativa para desarrollar la competencia mirar profesionalmente el razonamiento proporcional*. I Simposio Internacional de Educación Matemática para Primaria y Secundaria, Colombia.
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: children's cognitive and metacognitive processes. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp.131-156). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. J. (2007). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies*. Routledge.
- Llinares, S., Ivars, P., Buforn, À., & Groenwald, C. (2019). Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. In E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Ediciones Universidad Salamanca.
- Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Rivas, M.A., Godino, J.D., & Castro, W.F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema* 26(42B), 559-588.
- Spitzer, S., & Phelps-Gregory, Ch. (2024). The relationships between prospective teachers' mathematics knowledge for teaching and their ability to notice student thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 36, 443-470 <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00455-z>
- van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2301_3