



Trabajo matemático realizado por estudiantes de segundo de secundaria al desarrollar evaluaciones virtuales sobre funciones cuadráticas

Andrés Valdés

Universidad Católica de Maule

Chile

v.andres.r@hotmail.com

Catalina Palacios

Universidad de Playa Ancha Valparaíso

Chile

catalina.palacios@upla.cl

Jorge Gaona

Universidad de Playa Ancha Valparaíso

Chile

jorge.gaona@upla.cl

Andrea Vergara

Universidad Católica del Maule

Chile

avergarag@ucm.cl

Resumen

Este estudio se centra en describir cómo se desarrolla el trabajo matemático de estudiantes de secundaria chilena (15 y 16 años) al momento de desarrollar problemas abiertos sobre función cuadrática en un entorno virtual. Para el análisis de lo realizado por los y las estudiantes se utilizó la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático. En cuanto a la metodología a utilizar es un estudio cualitativo de contenido por medio de un protocolo descriptivo. Las y los estudiantes resuelven dos tareas, la primera pide encontrar valores máximos y mínimos de una longitud y la segunda solicita construir un rectángulo dada una cuerda de medida constante (perímetro a utilizar). Lo que les permitirá construir la noción de la función cuadrática.

Palabras clave: Educación matemática; Espacio de Trabajo matemático; Enseñanza virtual; Evaluación virtual; Resolución de problemas; Función cuadrática; Educación secundaria; Investigación cualitativa.

Introducción

En la enseñanza de la matemática, la interacción entre profesor y estudiante es primordial. Para esto, el profesor debe ser el encargado de fomentar el diálogo, desde diversas formas, con el estudiante (Lim et al., 2020).

Una de las mayores dificultades dentro del contexto escolar y pedagógico es el cómo los estudiantes adquieren los conocimientos y cómo el profesor entrega la información, corrige y retroalimenta a sus estudiantes (Dos Santos et al., 2022). La retroalimentación o feedback, es la que representa un factor importante en la adquisición de conocimiento, pues es el elemento del proceso educativo que posee mayor impacto en el aprendizaje del estudiante (Hattie y Timperley, 2007; Sánchez-Martí et al., 2019). Para Hattie y Clarke (2018) el feedback es la información que entrega el profesor a los estudiantes a partir de las tareas realizadas por estos.

Un adecuado feedback es aquel que logra fomentar el pensamiento o replanteamiento, donde el estudiante logra distinguir sus próximos pasos y sus errores, con el fin de corregirlos (Hess y Smit, 2024), a su vez, Nicol y Macfarlane-Dickb (2006) establecen que un buen feedback es la estrategia que logra fortalecer la habilidad del estudiante de autorregular su propio aprendizaje. Esto se logra realizando un feedback inmediato, específico, orientado a la tarea y concurrente (Hernández Rivero et al., 2021). Además, este es inherente para cada dominio del conocimiento específico de una disciplina (Moni, 2024) y su efectividad varía dependiendo del mensaje que el receptor recibe (Panadero y Lipnevich, 2022).

Las formas de feedback más efectivas, según Hattie y Timperley (2007) son dar pistas, reforzar, feedback en video o audio e indicaciones por medios computacionales. Es este último punto el que resalta sobre los demás, ya que, dado el avance de la tecnología, esta se encuentra cada vez con mayor frecuencia dentro de las aulas. Por lo que es necesario trabajar con esta, pues impacta en los sistemas de educación formales (Vargas-Quesada et al, 2021). Incluso, los profesores experimentados no ven problemas al momento de incorporar la tecnología con la enseñanza tradicional (Oumelaid et al., 2024), de este modo, Reddy (2021) menciona que es necesaria la incorporación de la tecnología en la enseñanza de la matemática, ya que, provee oportunidades de adquirir conocimientos y fomentar la exploración o la búsqueda de información.

El feedback por medios tecnológicos ayuda con la motivación, el trabajo colaborativo y el desarrollo del pensamiento lógico (Umaña et al., 2020), por lo que es necesario abordar cómo esta tecnología se relaciona con el trabajo matemático que realizan los estudiantes. Pues, para los estudiantes, el uso de la tecnología virtual en la clase de matemática facilita su aprendizaje. Lo que produce un cambio total en la dinámica de la clase, requiriendo una nueva perspectiva educativa (Hu y Wang, 2024).

De acuerdo con el currículo chileno actual, la unidad de álgebra se enfoca en que los estudiantes puedan reconocer funciones en diversos contextos (Díaz y Flores, 2022). Según el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), la función cuadrática, de forma particular, se concentra en según año de secundaria (MINEDUC, 2015). A pesar de esto, los resultados internacionales muestran que los estudiantes chilenos no han logrado los objetivos propuestos para esta unidad (Agencia de Calidad de la Educación, 2017), además, Arias-Rueda et al. (2020) menciona que son muy pocos los estudiantes que logran un aprendizaje de las funciones cuadráticas. Por lo que es necesario estudiar los procesos y el trabajo que están interfiriendo con estos aprendizajes.

Así, este trabajo busca describir el trabajo matemático realizado por los estudiantes de segundo año de secundaria al momento de resolver evaluaciones virtuales sobre funciones cuadráticas.

Marco Teórico

Esta investigación requiere de un marco teórico robusto que aporte relaciones desde lo cognitivo y matemático al momento de establecer que trabajo matemático realizan los estudiantes. Para esto, se optó por la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), específicamente, ETM personal, que trabaja a nivel individuo y ETM colectivo, que estudia el grupo como un ente.

El ETM es una teoría organizada que ayuda a comprender el trabajo de estudiantes y profesores al momento de resolver tareas matemáticas. (Henríquez-Rivas et al., 2021a; Panqueban et al., 2024). Si bien, el ETM nace desde la geometría, se ha ido desarrollando y expandiendo a otras áreas de la matemática (Kuzniak, 2011). Este se compone de dos planos. El plano epistemológico, que refiere a la matemática; y el plano cognitivo, que trata los procesos mentales (Kuzniak et al., 2016). En el caso del plano epistemológico se presentan tres componentes: El representamen, relacionado con la forma en que se representan las interpretaciones; Los artefactos, que consisten en el uso de las herramientas o sistemas simbólicos; Y el referencial, que corresponde a las definiciones, propiedades y teoremas. Por otro lado, tenemos el plano cognitivo, que cuenta con tres componentes: La visualización, que se relaciona con la interpretación de los signos; La construcción, el proceso centrado en las acciones activadas por los artefactos y asociados a una técnica; Y la prueba, que son todas las justificaciones de los argumentos, definiciones e hipótesis que sustentan el referencial (Kuzniak, 2011). Estos componentes se pueden visualizar en el diagrama (Figura 1).

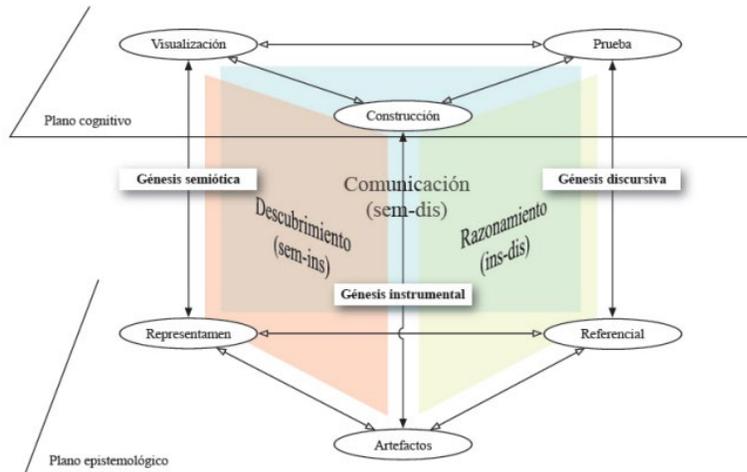


Figura 1. Diagrama ETM de Kuzniak y Richard, 2014

Existen interacciones entre los componentes de cada plano, denominadas génesis (Kuzniak, 2022). La génesis semiótica, que es la relación entre el representamen y la visualización, consiste en cómo el representamen es interpretado a través de la visualización; La génesis instrumental, que relaciona la construcción con los artefactos, son los usos de los artefactos para llegar a la construcción; Y la génesis discursiva, que es la que conecta la prueba y el referencial, toma las referencias teóricas y las asocia con el razonamiento deductivo (Kuzniak, 2022; Gaona y Menares, 2022; Kuzniak et al., 2016).

ETM Personal y Colectivo

Dentro de las relaciones del ETM, hay diversas miradas. Para esta investigación, se utilizará el ETM personal que hace referencia a cómo una persona realiza un trabajo matemático por medio de sus propias habilidades y conocimientos. En este proceso, la persona adopta su propia heurística, por lo que establecen sus propios caminos de resolución (Menares y Vivier, 2022).

En cuanto al ETM Colectivo corresponde a lo que cada estudiante aporta de su ETM personal, es decir, se nutre de cada aporte de los individuos, generando así un trabajo matemático entre pequeños grupos y que pueden o no estar guiados por el profesor. (Gaona et. al., 2024)

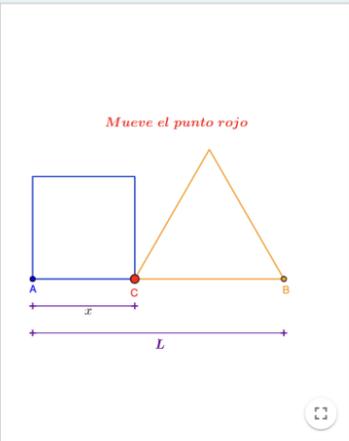
Metodología

Para el análisis de los datos, se realizará un estudio cualitativo del contenido según Mayring (2019). Pues establece que el análisis debe cumplir tres roles principales: Resumir los procesos, estructurar los procesos y explicar los procesos. Lo que ayuda a describir la información obtenida a partir de estudiantes de segundo año de secundaria.

Esta investigación tendrá un carácter interpretativo según Krause (1995) quien establece que este paradigma debe caracterizar lo que la gente dice o hace, se debe buscar descubrir algo nuevo y categorizar, fragmentar y articular los datos con el fin de lograr una interpretación global de los datos. Además, será descriptiva, pues busca recopilar información sin tener una hipótesis definida (Nieto, 2018)

En cuanto a la recolección de los datos, Penn-Edwards (2015) nos indica que la grabación permite observar aspectos en mayor detalle o situaciones no observadas en el momento, por lo que es una herramienta fundamental para un estudio cualitativo, Así, se realizarán videograbaciones de las pantallas de los estudiantes y de la clase en general, específicamente cuando el docente institucionaliza el trabajo realizado, todo esto bajo la información obtenida desde el proyecto FONDECYT código 11230953. Donde se trabajó con estudiantes de segundo de secundaria (15 y 16 años) de un colegio de la ciudad de Valparaíso, Chile. Donde los estudiantes trabajaron en el desarrollo de dos problemas (figura 2 y 3).

Observe la figura en la que hay un cuadrado y un triángulo equilátero :



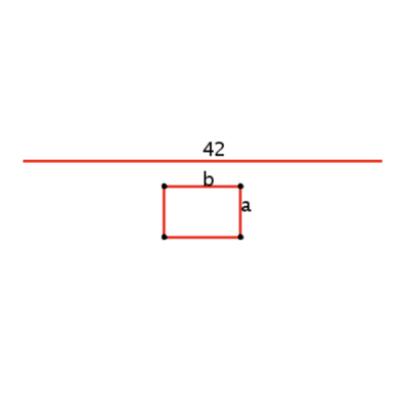
Mueva el punto rojo

Si $L = 11$ y la distancia de A a C es la variable independiente x , responda a las siguientes preguntas:

1. Elija un valor de x (al que llamaremos x_1) que esté dentro de los valores mínimos y máximos posibles.
2. Calcule el perímetro del cuadrado (lo denominaremos p_c) para ese valor que eligió
3. Calcule el perímetro del triángulo (lo denominaremos p_t) para ese valor que eligió

Figura 2. Problema número 3 de Gaona et al, 2024

Se tiene una cuerda de 42 centímetros, se quiere formar un rectángulo con dicha cuerda. Las dimensiones del rectángulo construido serán (a y b) como se muestra en el gráfico:



Indique en el espacio correspondiente:

- ¿cuál podría ser un valor numérico para cada una de las dimensiones (a y b) del rectángulo?
- ¿Cuál sería el área del rectángulo construido?

Figura 3. Problema número 8 de Gaona et al, 2024

Para el análisis de estos datos, se utilizará el protocolo de análisis de ETM propuesto por Hernández-Rivas et al. (2021b) (Tabla 1). Con el fin de establecer criterios para evaluar la presencia de cada génesis del ETM.

Tabla 1

Protocolo para el análisis de la circulación en el ETM.

Criterio	Componentes	Descriptor
Génesis semiótica	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes.
	Visualización	Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas ligadas con los registros de representaciones semióticas (identificación, tratamientos, conversiones). El proceso de visualización considera dos niveles de identificación visual de objetos (visualización icónica, visualización no-icónica).
Génesis instrumental	Artefacto	Artefactos de tipo material o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas
Génesis discursiva	Referencial	Definiciones, propiedades o teoremas.
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en una prueba (pragmática, intelectual).

Fuente: adaptado de Hernández-Rivas et al. (2021).

Esto ayudará a definir cada uno de los componentes del ETM presentes en el trabajo matemático realizado por los estudiantes y así poder describir cada uno de ellos.

Finalmente, se contará con las autorizaciones de los apoderados y profesores para ser grabados en la clase. Además de contar con el asentimiento de los estudiantes. Cabe mencionar que como la investigación se encuentra bajo un proyecto FONDECYT, la recolección de datos se encuentra autorizada por el comité de ética de la Universidad de Playa Ancha.

Referencias y bibliografía

- Agencia de Calidad de la Educación (2017). Informe Nacional TIMSS 2015. http://archivos.agenciaeducacion.cl/informe_nacional_de_resultados_TIMSS_2015.pdf
- Agencia de Calidad de la Educación (2018). Resultados educativos 2018. Ministerio de Educación de Chile.
- Arias-Rueda, J. H., Arias-Rueda, C. A. y Burgos Hernández, C. A. (2020). Procesos aplicados por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos: caso de estudio sobre la función cuadrática. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 15(2), 284-302. DOI: <http://doi.org/10.14483/23464712.14614>
- Díaz, V. y Flores, G. (2022) Resolución de tipos de problemas contextualizados y análisis de errores: un estudio de casos. *Estudios pedagógicos*. 48(2). <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052022000200009>
- Dos Santos, J. M. D. S., Abar, C. A. A. P., Almeida, M. V. d. (2022). Automatic Feedback GeoGebra Tasks – Searching and Opensource and Collaborative Intelligent Interactive Tutor. *Proceedings of the 26th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics: WMSCI 2022*, 3, 77-82. <https://doi.org/10.54808/WMSCI2022.03.77>

- Gaona, J., Bezama, C., Cerda, B., Permonti, G. y Vergara, C. (2024) Propuesta de tareas en plataforma del proyecto “Relación entre el feedback y el trabajo matemático de estudiantes en el contexto de evaluaciones en línea en matemáticas”.
- Gaona, J. y Menares, R. (2021) Argumentation of Prospective Mathematics Teachers in Fraction Tasks Mediated by an Online Assessment System with Automatic Feedback. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(12). [ff10.29333/ejmste/11425ff](https://doi.org/10.29333/ejmste/11425ff). [ffhal-03538861](https://doi.org/10.29333/ejmste/11425ff)
- Gaona, J., Palacios, C. y Sánchez, L. (2024) Tâches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'etm collectif. *Actes Du Huitième Symposium d'Étude Sur Le Travail Mathématique*.
- Hattie, J., y Clarke, S. (2018). *Visible Learning: Feedback*. Routledge.
- Hattie, J., y Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <http://www.jstor.org/stable/4624888>
- Henríquez-Rivas, C., Guerrero-Ortiz, C. y Ávila, A. (2021a) Trabajo matemático de profesores universitarios: Heurísticas de solución de una tarea, *Educación Matemática*, 33(3). <https://doi.org/10.24844/em3303.09>
- Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo, J., Climent, N. y Espinoza-Vasquez, G. (2021b). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 123-142.
- Hernández Rivero, V.M., Santana Bonilla, P.J. y Sosa Alonso, J.J. (2021). Feedback y autorregulación del aprendizaje en educación superior. *Revista de Investigación Educativa*, 39(1), 227-248. <http://dx.doi.org/10.6018/rie.423341>
- Hess, K. y Smit, R. (2024) Lehrende unterstützen Lernende beim mathematischen Argumentieren mit Feedback-Dialogen – eine Mixed Methods-Studie. *J Math Didakt*, 45(16). <https://doi.org/10.1007/s13138-024-00240-w>
- Hu, L. y Wang, H. (2024) Unplugged activities in the elementary school mathematics classroom: The effects on students' computational thinking and mathematical creativity. *Thinking Skills and Creativity*, 54, <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2024.101653>
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses [The mathematical workspace and its genesis]. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24
- Kuzniak, A. (2022) The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1
- Kuzniak, A. y Richard, P. (2014) Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4), 5-15. [10.12802/relime.13.1741a](https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a)
- Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM - Mathematics Education*, 48(6), <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Lim, W., Lee, J.-E., Tyson, K., Kim, H.-J., y Kim, J. (2020). An integral part of facilitating mathematical discussions: follow-up questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(2), 377–398. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09966-3>
- Marí, J. A. y Pons Biescas, A. (2005). La alimentación en el mundo Púnico. En J. Salas-Salvadó, P. García Lorda y J. M. Sánchez Ripollés (Eds.), *La alimentación y la nutrición a través de la historia* (pp. 82–112). Glosa.
- Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*. 365–380. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13
- Menares, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgado y P.R. Richard, (eds) *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*. 91-120. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5
- MINEDUC (2015). Bases Curriculares 7° Básico a 2° Medio. Ministerio de Educación.
- Moni, A. (2024). Learner Perceptions of the Feedback Process in the Online Component of a Blended Course. *Online Learning*, 28(2), 1-25. [10.24059/olj.v28i2.3967](https://doi.org/10.24059/olj.v28i2.3967)
- Oumelaid, N., Boukari, B. E., y Ghordaf, J. E. (2024). Assessing the impact of teacher characteristics, learner methods, and self-guided learning on technology adoption in mathematics instruction. *Multidisciplinary Science Journal*, 7(3), <https://doi.org/10.31893/multiscience.2025110>
- Panadero, E. y Anastasiya A. (2022). A review of feedback models and typologies: Towards an integrative model of feedback elements Ernesto. *Educational Research Review*, 35. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2021.100416>
- Panqueban, D., Henríquez-Rivas, C., y Kuzniak, A. (2024). Advances and trends in research on mathematical working spaces: A systematic review. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6). <https://doi.org/10.29333/ejmste/14588>

- Penn-Edwards, S. (2015). Visual Evidence in Qualitative Research: The Role of Videorecording. *The Qualitative Report*, 9(2). 266-277. <http://www.nova.edu/ssss/QR/QR9-2/pennedwards.pdf>
- Reddy, P., Reddy, E., Chand, V., Paea, S. y Prasad, A. (2021) Assistive Technologies: Saviour of Mathematics in Higher Education. *Front. Appl. Math*, 6. 10.3389/fams.2020.619725
- Romero, E., García, L. y Ceamanos, J. (2021). Moodle and Socrative quizzes as formative aids on theory teaching in a chemical engineering subject. *Education for Chemical Engineers*, 36, 54-64. <https://doi.org/10.1016/j.ece.2021.03.001>
- Sánchez-Martí, A., Muñoz, J.L. y Ion, G. (2019). Diseño y Validación de un Cuestionario de Percepción del Aprendizaje a través del Feedback entre Iguales en Educación Superior. *Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación Psicológica*, 53(4), 113-128. 10.21865/RIDEP53.4.09
- Umaña, M., Miranda, C. y Osorio, F. (2020). Uso educativo de TIC en un salón Montessori: diálogo entre la tecnología digital y los ritos de interacción social en el aula. *Revista de estudios y experiencias en educación*, 19(41). 29-42. <http://dx.doi.org/10.21703/rexe.20201941umana2>
- Vargas-Quesada, B., Zarco, C., y Cerdón, O. (2023). Mapping the situation of educational technologies in the Spanish university system using social network analysis and visualization [Mapeo de la situación de las tecnologías educativas en el sistema universitario español mediante análisis y visualización de redes sociales]. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence*, 8(2), 190-201. <https://doi.org/10.9781/ijimai.2021.09.004ur>