El desarrollo del pensamiento proporcional en los niveles primario y medio inferior utilizando los registros semióticos de representación

Celia Elizabeth **Villagra**
Facultad Regional de Orán, Universidad Nacional de Salta
Argentina
villagracelia@gmail.com
Edith Marcela **Chorolque**
Facultad Regional de Orán, Universidad Nacional de Salta
Argentina
marcelachoroqlue@gmail.com
Isabel Hortensia **Miguez**
Facultad Regional de Orán, Universidad Nacional de Salta
Argentina
miguezisa26@gmail.com

Resumen

Es importante que los estudiantes desarrollen el pensamiento proporcional para que logren la comprensión conceptual de la proporcionalidad y así puedan desempeñarse con fluidez en su vida cotidiana. Pero también para que puedan construir conceptos más complejos en niveles educativos superiores, como por ejemplo las variaciones, la función lineal, las razones de cambios, las derivadas. Por eso es necesario generar un espacio de reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en distintos niveles educativos, que permita poner en relevancia los diferentes significados de la proporcionalidad haciendo uso de los distintos registros semióticos, incluyendo las TIC y así repensar la articulación entre los niveles educativos Primario y Medio entorno a la enseñanza de la proporcionalidad.

Palabras clave: Proporcionalidad. Pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo. Registros semióticos. Nivel Primario. Nivel Medio. Enseñanza de la Matemática. Articulación niveles.

Introducción

En general los estudiantes del nivel medio y los ingresantes al nivel superior muestran que tienen dificultades al resolver y comprender situaciones vinculadas a la proporcionalidad. como por ejemplo las variaciones, la función lineal, las razones de cambios, las derivadas entre otros conceptos. Para lograr que haya una buena comprensión conceptual de la proporcionalidad es preciso que el estudiante desarrolle el pensamiento proporcional, tal como lo señalan Piaget e Inhelder (1978) al expresar que para que el estudiante de nivel básico le dé sentido y significado a la proporcionalidad es fundamental desarrollar su pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo desde el nivel primario. Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel (2005) consideran que además el estudiante debe tener la habilidad de discriminar entre situaciones proporcionales y no proporcionales como un dominio del conocimiento del razonamiento proporcional.

Es por ello que consideramos importante generar un espacio para que los docentes de los niveles primario y medio reflexionen sobre los errores frecuentes de los estudiantes cuando resuelven situaciones de proporcionalidad, valoren la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento proporcional en los estudiantes, reconozcan los diferentes significados de la proporcionalidad y propicien el uso de registros semióticos y la inclusión de recursos informáticos para potenciar las producciones matemáticas de los estudiantes.

Respecto a los distintos significados de la proporcionalidad, consideramos los aportes de Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) que distinguen tres tipos de significados: aritmético, proto – algebraico y algebraico funcional.

Definición y relevancia del tema a desarrollar en el Taller

Broitman et al. (2018) consideran que el estudio de la noción de proporcionalidad atraviesa muchos años de escolaridad y se relaciona con múltiples contenidos tanto en el nivel primario como secundario. Mejorar la enseñanza de la proporcionalidad es clave para fortalecer las bases matemáticas y la comprensión de conceptos fundamentales que no solo son importantes en el ámbito académico, sino también en la vida cotidiana y en diversas disciplinas profesionales. Los mismos autores considera que durante muchos años, la noción de proporcionalidad se asoció con ciertas reglas de trabajo más que con las relaciones que la caracterizan. Numerosas investigaciones han advertido sobre los riesgos que implica que los estudiantes asocien un concepto a un conjunto de técnicas o reglas de cálculo. Por lo que es necesario que el docente tome conciencia de los errores de sus estudiantes, los asocie con ciertos obstáculos y que reconozca los distintos significados de la proporcionalidad.

En la actualidad el desafío pedagógico en Matemática, en la escuela primaria y secundaria, consiste en lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, a partir de situaciones de aprendizaje que permitan desarrollar sus capacidades. En el Marco Nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática en Argentina [Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019] se plantea mejorar el aprendizaje en Matemática y desarrollar el potencial del pensamiento lógico matemático, siendo una posibilidad la incorporación de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas. No menos importante resulta, según Duval (2004), la interacción entre los distintos tipos de registros: natural, numérico, gráfico, geométrico y algebraico para propiciar aprendizajes significativos de los conceptos y como forma de ligar el tratamiento de la información con la experiencia de los estudiantes. Es necesario que los estudiantes aprendan a usar las Tecnologías de la Información y comunicación y a interactuar con ellas, de allí que los docentes deban incluir estas nuevas tecnologías en las propuestas educativas. Particularmente el Software dinámico Geogebra permite la coordinación de los diferentes registros y de esta manera se convierte en una potente herramienta para propiciar la significación de conceptos, en este caso de la proporcionalidad que funciona en diferentes registros.

Referencial Teórico

Tipo de pensamiento proporcional

Piaget e Inhelder diferenciaron entre dos tipos de pensamiento proporcional que los niños desarrollan a medida que crecen: **pensamiento proporcional cualitativo** y **pensamiento proporcional cuantitativo**. Estos conceptos son fundamentales para comprender cómo los niños van adquiriendo habilidades para comprender las relaciones proporcionales en diversas situaciones.

El **pensamiento proporcional cualitativo** se refiere a la capacidad de los niños para entender las **relaciones de proporcionalidad** de manera **cualitativa** o más intuitiva. Es decir, los niños pueden reconocer que dos cosas están relacionadas de manera proporcional, pero de una forma más general, sin centrarse en la cantidad precisa de esa relación.
El **pensamiento proporcional cuantitativo** se refiere a la capacidad de los niños para comprender las relaciones proporcionales de manera **precisa y cuantitativa**, es decir, en términos de **cálculos numéricos exactos**. En esta etapa, los niños no solo entienden que hay una relación entre las magnitudes, sino que también pueden **calcular** la proporción y aplicar la regla matemática necesaria para resolver problemas que involucren proporcionalidad.

En la enseñanza de la proporcionalidad también es necesario considerar los diferentes significados. Al respecto Godino et al. expresan que los significados de la proporcionalidad se pueden clasificar según criterios, en particular, el contexto o campo de aplicación y el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas. Algunos contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción (vida cotidiana, científico técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.) deben ser incluidos en las prácticas de resolución de los problemas adecuados al nivel de escolaridad. Los mismos autores también distinguen tres tipos de significados de la proporcionalidad: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional, que deben ser considerados en la enseñanza aprendizaje de este concepto. Estos significados corresponden a diferentes niveles de abstracción y comprensión del concepto de proporcionalidad, y cada uno tiene un papel importante en el proceso de aprendizaje.

Significado Aritmético

Este significado se refiere a la proporcionalidad entendida en términos de razones y comparaciones numéricas. Es el nivel más básico y directo, donde los estudiantes se enfrentan a la relación proporcional de manera concreta y numérica.

- Ejemplo: Si tenemos 2 manzanas por cada 3 peras, la relación proporcional entre manzanas y peras es 2:3.
- Importancia: En este nivel, los estudiantes comienzan a comprender la proporción como una relación entre dos cantidades y aprenden a resolver problemas sencillos utilizando razones, como problemas de proporcionalidad directa (por ejemplo, "si 2 kg de manzanas cuestan 30 pesos, ¿cuánto costarán 5 kg?").

En este nivel, el concepto de proporcionalidad se enseña a través de fracciones, múltiplos y divisores, utilizando cálculos aritméticos directos, y la solución de estos problemas se basa en la intuición de que las cantidades cambian de manera proporcional.

Significado Proto-Algebraico

Este tipo de proporcionalidad introduce una visión más abstracta de la relación proporcional, moviéndose más allá de las simples comparaciones numéricas para empezar a usar símbolos y expresiones algebraicas. Aunque aún no se llega a la formalización algebraica completa, el estudiante comienza a ver las relaciones proporcionales en términos de variables y no solo de números específicos.

- Ejemplo: En lugar de trabajar con números concretos, los estudiantes comienzan a resolver problemas como "si x es proporcional a y, ¿cuál es el valor de y si x=4 ?", donde se utiliza la relación x/y=k , siendo k una constante de proporcionalidad.
- Importancia: Este tipo de significado es crucial para vincular la aritmética con el álgebra. Los estudiantes se familiarizan con el uso de variables y ecuaciones en la resolución de problemas proporcionales. Aprenden a interpretar las relaciones de proporcionalidad como ecuaciones en las que las cantidades están vinculadas por una constante.

Este nivel de comprensión es un puente entre la proporcionalidad numérica concreta y la manipulación algebraica formal de ecuaciones y funciones.

Significado Algebraico-Funcional

El significado algebraico-funcional es el nivel más avanzado de comprensión de la proporcionalidad y se refiere a la relación proporcional como una función lineal. En este nivel, la proporcionalidad se entiende como una función matemática que relaciona dos variables de forma tal que un cambio en una de ellas provoca un cambio proporcional en la otra.

- Ejemplo: Se puede expresar la relación proporcional como una función lineal y=k.x, donde k es la constante de proporcionalidad. Aquí, el estudiante comprende que la proporcionalidad implica que, si una variable cambia, la otra también lo hará en una forma predecible y proporcional.
- Importancia: En este nivel, los estudiantes empiezan a trabajar con funciones lineales, pendientes y gráficas. La proporcionalidad se representa como una recta que pasa por el origen (0,0) en un gráfico, y se utiliza para resolver problemas más complejos, como los de modelado de situaciones reales en las que una variable depende de otra (por ejemplo, la velocidad de un vehículo en función del tiempo, o el precio de varios productos).

Este tipo de significado es clave para entender las aplicaciones de la proporcionalidad en contextos más amplios, y se convierte en la base para abordar conceptos matemáticos más avanzados, como las funciones lineales y las ecuaciones lineales.

Estrategias para desarrollar el Taller

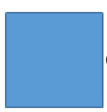
Inicialmente en el taller se presentarán problemas diseñados para estudiantes de nivel primario que serán el punto de partida para que se generen debates grupales en torno a si el problema es aditivo o de proporcionalidad, también sobre pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo. en estas actividades además se deberán identificar procedimientos que pueden realizar los estudiantes, dificultades y errores que cometen en la resolución. Se realizará una puesta común eligiendo los representantes de algunos grupos para la socialización. Los talleristas sintetizarán las producciones y señalarán la diferencia entre pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo y las actividades que les corresponden.

Además, se mostrará una posible secuencia de tipo de pensamiento y actividades para ir articulando primaria con niveles secundario.

Los talleristas realizaran una síntesis acerca de los significados de la proporcionalidad propuestos por Godino y sobre los registros semióticos. Será necesario que los asistentes al taller tengan Geogebra en su notebook, tablet o celular y que tengan conocimientos básicos del uso de este software.

Los asistentes analizarán actividades reconociendo el significado de proporcionalidad que enfatiza, según el texto de Godino y los contenidos matemáticos que subyacen y los registros semióticos que involucran, el nivel educativo al que corresponde. Las actividades propuestas están destinadas a nivel primario y secundario. Además, deberán resolver una de las actividades que analizan.

Ejemplo de actividades que analizarán: (la siguiente actividad fue extraída de Atela, Fernández y Vila (2019))

Actividad 1:
El siguiente dibujo es un  cuadrado

a. Completa en cada caso el dato faltante:

Longitud del lado del cuadrado(cm)	0	2	4	7		12	15
Perímetro del cuadrado(cm)		8			40		

b. Si se duplica un par de lados, se obtiene un rectángulo. ¿El perímetro de la nueva figura se duplica? Justifiquen.
c. Si se duplican los lados del cuadrado original, se obtiene otro cuadrado. ¿El cuadrado de la nueva figura se duplica? Justifiquen.

d. Si se triplican los lados del cuadrado original, se obtiene otro cuadrado. ¿El perímetro de la nueva figura se triplica? Justifiquen.
e. A partir de lo analizado, ¿en qué casos el perímetro es directamente proporcional a la longitud de lado?

Actividad 2

Ahora analicen el archivo de Geogebra "problema 1" y sigan las instrucciones:(Actividad propuesta por Atela, Fernandez y Vila (2019))

a. Muevan el punto a del deslizador, ¿qué observan?, ¿qué se modifica y qué se mantiene constante?, ¿por qué creen que ocurre esto?
b. ¿Qué significado tiene el valor de a?
c. ¿Qué sucede cuando a=0? ¿Coincide con el valor de la tabla que completaron en la parte I 1 a?(problema 1 a)
d. Ahora muevan el punto A, ¿qué se modifica y qué se mantiene constante? ¿por qué consideran que ocurre esto?
e. Ahora muevan el punto B, ¿qué se modifica y qué se mantiene constante? ¿por qué consideran que ocurre esto?
f. Utilizando la Vista Algebraica y/o la vista gráfica completen la tabla:

Longitud del lado del cuadrado	3					
Perímetro del cuadrado	12	36			80	
Área del cuadrado	9		100	900		1

g. A medida que aumenta la longitud del lado del cuadrado, su perímetro aumenta, ¿aumenta de manera directamente proporcional?
h. A medida que aumenta la longitud del lado del cuadrado, su área aumenta, ¿aumenta de manera directamente proporcional?

Actividad 3

a. Observa las siguientes tablas que representan la relación entre dos magnitudes.

Cantidad de envases (x)	300	120	80	60	30	12
Contenido de cada envase en litros (y)	0,2	0,50	0,75	1	2	5

Cantidad de alfajores(x)	6	12	18	3	2	1
Precio en $ (y)	450	900	1350	225	150	75

Número de personas(x)	2	3	5	7	8	10
Cantidad de harina en gramos (y)	100	150	250	350	400	500

Cantidad de alfajores por caja(x)	10	20	30	5	60
Cantidad de cajas(y)	6	3	2	12	1
Tiempo en horas (x)	0,5	1	3	5	6
Distancia recorrida en km (y)	40	80	240	400	480

b. Decide cuáles corresponden a relaciones de proporcionalidad directa. Encuentra su constante de proporcionalidad. Justifica.
c. Representa en Geogebra los puntos de cada tabla (realiza una gráfica por ventana).

Si correspondiera une los puntos.

d. ¿Qué características tienen las gráficas de las relaciones que representan proporcionalidad directa? ¿son funciones? Justifica

Se realizará una síntesis final mostrando contenidos, tipo de pensamiento, registros y tipo de actividades sugeridas por nivel para lograr la articulación entre niveles y el desarrollo del pensamiento proporcional.

El taller se realizará durante 1hora y 50 minutos, previendo que se deben moderar las puestas en común para no desfasar los tiempos programados para la realización de las actividades. Para introducción del taller 10 minutos, resolución de actividades 60 minutos por fases (se prevén tres momentos de resolución de 20 min cada uno), 20 minutos para puesta en común y 20 minutos para exposición de talleristas.

Referencias y bibliografía

Atela, M. A., Fernández, J. P., Vila, M. (2019). Articulación entre nivel primario y secundario. Una experiencia alrededor de la proporcionalidad mediada por TIC. *Actas V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, Fac. de Humanidades y Cs. de la Educación*, UNLP.

Broitman C., Escobar M., Grimaldi V, Itscovich H, Novembre A., Ponce H. & Sancha I)2018. *La divina Proporción. La enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria y en los inicios de la escuela secundaria*. Santillana en el aula.

Duval, R.(2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-13). https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación (2019). *Marco nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática*. - 1a ed . – Ciudad Autónoma de Buenos Aires .

Piaget, J. y Inhelder, B. (1978). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Ed.), *Lecturas en Psicología del niño,* I (pp. 70-119). Madrid: Alianza Editorial.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.