Pensamiento matemático estructural con problemas retadores de la teoría de números y la Matemática recreativa

Leonardo Favio **Trujillo** Diaz
Universidad Surcolombiana
Colombia
leonardotrujillo@usco.edu.co
Alexander **Paredes** Martínez
Universidad Surcolombiana
Colombia
alexander.paredes@usco.edu.co

Resumen

En este taller se trabajará la resolución de problemas retadores de la teoría de números y juegos matemáticos para categorizar el pensamiento matemático estructural, se aplicarán dos sistemas de actividades que involucran: el juego del SET y la aritmética congruencial. Con la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología de la investigación y diseño, la estrategia de resolución de problemas por indagación y las orientaciones del maestro se favorece el desarrollo de este pensamiento, el cual se evidencia al alcanzar al menos una de las cuatro categorías: Hallar conexiones y patrones; reconocer relaciones; entender propiedades; generalizar y razonar. Este marco emergente es el resultado de la reorganización de los aportes de investigadores como Mason y Johnston (2004), Mulligan y Mitchelmore (2009), Harel y Soto (2017) y Gronow (2021).

Palabras clave: Pensamiento matemático estructural; resolución de problemas; teoría de números; Ingeniería didáctica.

Introducción

En la comunidad educativa el uso e identificación de estructuras es un concepto importante que no está bien explicado, pero se espera que sea enseñado; según Harel & Soto (2017) estructura es un término aplicado en muchas áreas de investigación de diversas maneras, pero en la mayoría de los casos, los investigadores no sienten la necesidad de definirlo. Los investigadores Hoch y Dreyfus (2004) han utilizado el "sentido estructural", Mason, Stephens y Watson (2009); Mulligan y Mitchelmore (2012); Gronow (2021) el "pensamiento estructural", mientras que Harel y Soto (2017) abordan el estudio desde el "razonamiento estructural".

Según Richland (2012) muchos profesores de Matemáticas no entienden claramente el concepto de pensamiento estructural en matemáticas, en Mason (2009) se afirma que la conciencia de los profesores sobre las relaciones estructurales transforma el pensamiento y la disposición de los estudiantes para participar, los profesores deben centrarse en la estructura para que los estudiantes puedan pensar estructuralmente. Harel y Soto (2017) conceptualizan el razonamiento estructural como un grupo de habilidades para buscar y reconocer estructuras, investigar y actuar sobre estructuras, razonar en términos de estructuras generales y formar justificaciones epistemológicas.

1. Definición y relevancia del tema a desarrollar en el taller

Este taller surge a partir de la investigación desarrollada en la tesis de doctorado "Avances en la caracterización del pensamiento matemático estructural en la resolución de problemas retadores de la teoría de números en estudiantes de educación básica secundaria". La importancia de las estructuras en la enseñanza aprendizaje de la Matemática está más que justificada, a través de este pensamiento se identifican estructuras, se utilizan estructuras conocidas y se reconocen nuevas estructuras, pero ¿cómo desarrollar el pensamiento matemático estructural de manera que no sea un proceso instrumental y no solamente formal?, como se ha intentado enseñarlo.

Se compartirá con los participantes una forma apropiada de trabajar el desarrollo de este pensamiento matemático través de la resolución de problemas retadores de congruencias modulares y el juego de mesa SET y se dará respuesta al interrogante ¿Cuáles son las características del pensamiento matemático estructural que emergen en el contexto de la resolución de problemas retadores de la teoría de números y los juegos matemáticos en los estudiantes?

2. Referencial teórico

La teoría de números y el currículo de las olimpiadas matemáticas.

Cuando nos enfrentamos al reto de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en gran medida queremos lograr que los estudiantes desarrollen su pensamiento matemático dirigido a la resolución de problemas no rutinarios, que realicen conjeturas, prueben hipótesis y planteen nuevos problemas, la teoría de números que encierran problemas complejos de la aritmética permite generar una gama inagotable para desarrollar la imaginación y la creatividad. De acuerdo con Nieto y Sánchez (2022), la teoria de números hace parte de ese currículo oculto de las olimpiadas de matemáticas.

Pensamiento matemático estructural y la educación matemática.

De acuerdo con la investigación un estudiante realiza pensamiento matemático estructural si está en la capacidad de alcanzar una de las cuatro categorías que se ilustran al lado derecho de la tabla 1, que corresponde a un enfoque relacional, donde esta categorización es el resultado de analizar las diferentes posturas y enfoques de los autores más representativos, como se muestra en la tabla, de manera que el marco utilizado es una reorganización de todos estos aportes, en contraste se puede observar este marco en la última columna de la derecha.

Tabla 1

Desempeños observables en la categorización del pensamiento matemático estructural

Mason (2003), Mason & Johnston-Wilder (2004)	Mulligan & Mitchelmore (2009)	Harel & Soto (2017)	Gronow M (2021)		
Sosteniendo Totalidades	Nivel pre-estructural		Conexiones	Hallar conexiones y patrones	Identifica todos los elementos de manera individual y grupal (conjunto) presentes en el problema.
Discernir detalles	Nivel de emergente	Generalización de patrones	Reconocer patrones		Reconoce los elementos del conjunto que se relacionan, identifica las variables de control y de respuesta. Encuentra regularidades, ordenaciones o secuencias.
Reconocer relaciones Percibir propiedades, como generalidades que pueden ejemplificadas	Nivel estructural parcial	Reducción de una estructura desconocida a una familiar	Identificar similitudes y diferencias.	Reconocer relaciones	Describe y reproduce de manera matemática el tipo de conexión o asociación entre los elementos o subconjuntos particulares. comprueba las relaciones haciendo uso de la expresión matemática. Reduce una estructura desconocida a una estructura conocida.
Razonamiento a partir de propiedades identificacas	Nivel estructural	El reconocimiento y la operación con estructuras en el pensamiento La formación de justificación epistemológica.		Entender propiedades	Detecta similitudes y diferencias en las relaciones matemáticas y los patrones involucrados. Manipula las relaciones mediante con nuevas ejemplificaciones. descubre atributos, cualidades, características y particularidades de las operaciones que determinan la relación
	Nivel avanzado	El razonamiento en términos de estructuras generales	Generalizar y razonar	Generalizar y razonar	Conecta relaciones matemáticas concretas con ideas abstractas Establece comparaciones de similitud con otros elementos, subconjuntos y relaciones.

Fuente: Tabla de elaboración propia, con el objetivo de contrastar las categorías expuestas encuesta privada.

Resolución de problemas.

En Dorier y Maass, (2020) se menciona que la estrategia de resolución de problemas por indagación, hace parte de la educación matemática basada en la investigación por indagación (IBME), centrada en el estudiante, en el que se les invita a trabajar de forma similar a como trabajan los matemáticos y los científicos, por lo tanto, el estudiante tiene que observar fenómenos, hacer preguntas, buscar formas matemáticas y científicas de cómo responder estas preguntas (como realizar experimentos, controlar variables sistemáticamente, dibujar diagramas, calcular, buscar patrones y relaciones, hacer conjeturas y generalizaciones), interpretar y evaluar sus soluciones, comunicar y discutir sus soluciones de manera efectiva.

Matemáticas recreativas y el pensamiento estructural. Juego de mesa SET y la congruencia modular.

De acuerdo con la investigación existe mucha relación entre la matemática recreativa o juegos matemáticos y el pensamiento estructural, puesto que la resolución de estos problemas con mucha frecuencia estimula la creatividad, la exploración de patrones, el desarrollo de estrategias y la identificación de estructuras.

El SET es un juego, como se ilustra en la figura 1. Se da inicio al juego colocando 12 cartas sobre la mesa y entre los jugadores, el primero que identifique un SET lo anunciará, posteriormente se remplazan las cartas hasta agotarlas.

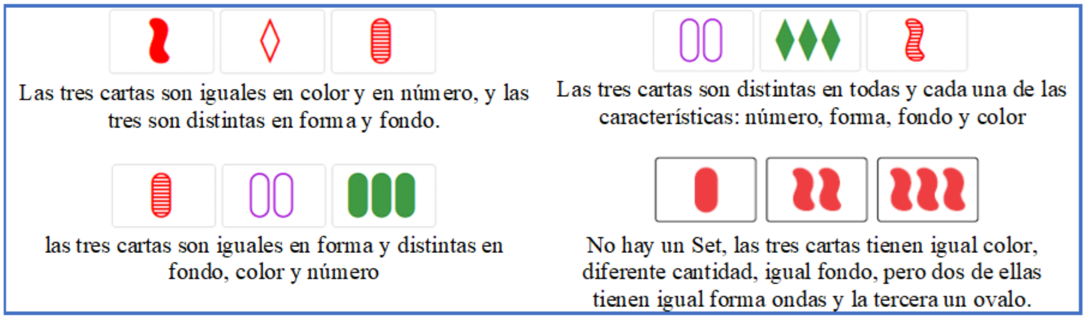

Figura 1. Ejemplos de SET y de no SET

.

3. Estrategia para desarrollar el taller

Descripción del trabajo a realizar

Se desarrollarán dos sesiones con la metodología de la ingeniería didáctica y la estrategia de problemas por indagación, por lo tanto, se plantea la situación y a partir de las posibles soluciones orientadas se construirá la teoria alrededor de la temática.

La primera sesión se iniciará con el juego del SET, donde junto con los participantes se analizarán todos los interrogantes que surgirán del juego. Este permite introducir a las clases de equivalencia residuales modulo tres, como se muestra en la tabla 2. Se concluye con la deducción de clase de equivalencia congruencial modulo cualquier entero y en la segunda sesión se abordarán problemas de la teoria de números en donde deban utilizar las congruencias modulares, entonces se abordará la aritmética congruencial y se hará énfasis en la categoría de pensamiento estructural alcanzado a manera de autoevaluación.

Tabla 2

Codificación de las cartas del set

Atributo	Valor		Coordinar
Número	3,1,2	?	0, 1, 2
Color	verde, morado, rojo	?	0, 1, 2
Sombreado	vacío, rayado, sólido	?	0, 1, 2
Forma	diamantes, óvalos, garabatos	?	0, 1, 2

Cartas del set igual número, diferente color, igual sombreado e igual forma	Codificación de las cartas	Suma de las coordenadas	Residuos de dividir por 3
	(2, rojo, rayado, diamantes) $\leftrightarrow (2,2,1,0)$	1eras coordenadas: $2+2+2=6$	$6 \; residuo \; 3 = 0.$
	(2, morado, rayado, diamantes) $\leftrightarrow (2,1,1,0)$	2das coordenadas: $2+1+0=3$	$3 \; residuo \; 3 = 0$
	(2, verde, rayado, diamantes) $\leftrightarrow (2,0,1,0)$.	3eras coordenadas: $1+1+1=3$	$3 \; residuo \; 3 = 0$
		4tas coordenadas: $0+0+0=0$	$0 \; residuo \; 3 = 0$
		$(6,3,3,0)$	$(0,0,0,0)$

Fuente: Tabla de elaboración propia, Al lado izquierdo se observa la codificación de acuerdo con la categoría y valor, al lado derecho se presenta la codificación de un SET cuyo modulo tres es cero.

Reflexiones finales

En la tabla 3, se propone que cada participante se autoevalúe, esto permitirá realizar unos análisis y reflexiones finales que permitirá determinar los niveles de categorías alcanzados.

Tabla 3

Nivel del pensamiento estructural en el juego del SET y la aritmética congruencial.

		Analisis SET	Analisis Congruencias	Asignación de color
Hallar conexiones	Identifica todos los elementos de manera individual y grupal (conjunto) presentes en el problema	Explora por primera vez las cartas del juego	Identifica los elementos de una clase residual Zn	
	Reconoce los elementos del conjunto que se relacionan, es decir cual es la variable de control y cual de respuesta.	Identifica las diferentes caracteristicas de las cartas: Color, forma, cantidad y relleno	Reconoce que cada número entero corresponde a un elemnto en clase residual, por ejemplo en Z7 10 = 3 y -2 = 5	
	Encuentra regularidades, ordenaciones o secuencias sin descubrir la regla.	Identifica Cuantas cartas de cada categoria existen, cuantas hay en total, si existen cartas repetidas y realiza conjeturas acerca de cómo se puede jugar	Realiza las operaciones de suma y multiplicación entre los elementos de una clase residual, además construye tablas de doble entrada operativas.	
Reconocer relaciones	Describe y reproduce el tipo de conexión o asociacion entre los elementos o subconjuntos particulares.	Reconoce un set: conjunto de tres cartas donde las cuatro caracteristicas son todas iguales o todas diferentes	Dada cualquier clase residual, reconoce las propiedades de Z, como son: conmutativa, asociativa, existencia del elemento neutro de la suma, existencia del elemnto identidad del producto, el inverso aditivo, inverso multiplicativo y la propiedad distributiva del producto	
	Detecta similitudes y diferencias en las relaciones matemáticas y los patrones involucrados	Identifica los diferentes tipos de SET: Tres atributos iguales y uno diferente, todas las categorias diferentes, 2 iguales 2 diferentes, 1 igual y tres diferentes, 1 diferente y tres iguales.	Despues de construir e identificar propiedades. Identifica las diferencias cuando la clase residual corresponde a un primo.	
Entender propiedades	Manipula las relaciones mediante con nuevas ejemplificaciones	Construye un cuadrado magico con nueve cartas colocadas en un arreglo 3x3 de tal manera que de todas las formas (verticales, horizontales, diagonales) se forme un SET	soluciona ecuaciones congruenciales	
	descubre atributos, cualidades, características y particularidades de las operaciones que determinan la relacion	Comprueba cualitativamente el teorema que dadas dos cartas existe una unica carta que forma el SET	Resuelve problemas que involucran ecuaciones congruenciales	
Generalizar	Conecta relaciones matemáticas concretas con ideas abstractas	Codifican las cartas de tal manera que cada una se puede representar numericamente con cuatro coordenadas, las opera como vectores y reconoce este conjunto como la clase de equivalencia modulo 3	Identifica el teorema chino del resto	
	Establece comparaciones de similitud con otros elementos, subconjuntos y relaciones	Realizando operaciones numericas modulo tres comprueba el teorema del SET, descubre una carta que se esconda al inicio del juego	Resuelve problemas aplicando el problema chino del resto	
		(verde)	Alcanza satisfactoriamente la categoria	
		(amarillo)	Con dificultad alcanza la categoria	
		(rojo)	No alzanza la categoria	

Fuente: Tabla de elaboración propia para categorizar el pensamiento matemático estructural

Organización de las actividades

A continuación, en la tabla 4 se describen las dos sesiones a trabajar y la distribución de los tiempos

Tabla 4
Organización del taller a desarrollar

Nombre de la actividad	Descripción de la actividad	Duración
Introducción y Presentación de la sesión 1	Objetivos y metodología para seguir Motivación mediante la resolución problema como conducta de entrada	30 minutos
sesión 1. Pensamiento matemático estructural mediante el juego set.	Trabajo en grupos de 5 personas Presentación del juego SET; jugar y analizar el juego SET; codificar el juego SET; El juego final, deducir la carta escondida al inicio del juego; Qué una clase de equivalencia residual; Compartir experiencias de la investigación y categorizar el pensamiento estructural	60 minutos
Conclusiones de la sesión 1	Reflexiones acerca del juego realizado para deducir los conceptos de congruencia modular.	20 minutos
Introducción y Presentación de la sesión 2	Estructura formada por las clases de equivalencias residuales.	20 minutos
sesión 2. Pensamiento matemático estructural con congruencias modulares	Trabajo en grupos de 3 personas Resolver problemas relacionados con las clases residuales; construir tablas operacionales (sumas y multiplicación) con clases de equivalencias residuales, aritmética congruencial y resolución de problemas.	50 minutos
Conclusiones de la sesión 2	Reflexiones acerca de los problemas solucionados, los cuales corresponden a la categoría de olimpiadas de matemáticas.	20 minutos
Cierre y clausura del taller.	Reflexiones finales de las dos sesiones y evaluación ¿Se cumplió con los objetivos propuestos? ¿Es Factible aplicar estas actividades para favorecer el pensamiento matemático estructural en los estudiantes?	20 minutos

Fuente: Tabla de elaboración propia

Referencias y bibliografía

Gronow, M. (2021). *Noticing Structural Thinking through the CRIG* Framework of Mathematical Structure. Mathematics Education Research Group of Australasia.

Gronow, M. (2020). Teachers' understanding and use of mathematical structure. Mathematics Education Research Journal, 1-26.

Harel, G y Soto, O. (2017). *Structural reasoning*. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 225-242.

Harel, G. (2013). *Intellectual need*. Vital directions for mathematics education research, Springer, New York, NY., 119-151.

Mason, J. y Johnston S. (2009). Appreciating mathematical structure for all. Mathematics Education Research Journal, 21(2), 10-32.

Michèle Artigue, R. D. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogota: Grupo Editorial Iberoamérica.

Nieto S y Sanchez R. (2022). A *curriculum for mathematical competitions.* ZDM–Mathematics Education, 54(5), 1043-1057.

McMahon, L. G. (2019). *The joy of SET: The many mathematical dimensions of a seemingly simple card game*. Princeton University Press: Princeton University Press.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). *Awareness of pattern and structure in early mathematical development.* Mathematics Education Research Journal, 21(2), 33-49.

Trujillo, L (16 de septiembre de 2024). Avances en la caracterización del pensamiento matemático estructural en la resolución de problemas retadores de la teoría de números en estudiantes de educación básica secundaria [tesis de doctorado, Universidad Antonio Nariño].

Trujillo, L y Chacón G (2024). Caracterización del pensamiento matemático estructural a partir de la resolución de problemas retadores de la teoría de números y la matemática recreativa en estudiantes de educación básica secundaria. Revista contribuciones a las ciencias sociales, São José dos Pinhais, 17(7).