



Causas de los errores de estudiantes en matemática universitaria: cambios en las concepciones de un grupo de profesores

Henry Alexander **Ramírez** Bernal
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá
haramirez@udistrital.edu.co

Resumen

En la investigación doctoral llevada a cabo por el autor, se analizaron los cambios en las concepciones de un grupo de profesores de matemática universitaria sobre las causas de los errores de los estudiantes, al participar en un minicurso de Educación matemática centrado en el estudio de algunos referentes teóricos (obstáculos epistemológicos, obstáculos didácticos, misconcepciones y transformaciones semióticas) que ayudan a comprender las causas de tales errores. Mediante un proceso de categorización inductivo-deductivo y un análisis comparativo se caracterizaron los cambios en las concepciones de los profesores. La presente ponencia documenta el análisis específico del cambio en las concepciones de uno de los participantes (Manuel). Adicionalmente, se presenta un esquema de gradualidad que describe la asimilación de los referentes teóricos por parte de los participantes y su relación con los cambios en sus concepciones sobre las causas de los errores.

Palabras clave: Aprendizaje; Educación matemática; Educación superior; Formación docente continua; Investigación cualitativa; Errores de estudiantes en matemática universitaria; Teoría de obstáculos; Teoría de representaciones semióticas; Colombia.

Descripción del problema

El error es una poderosa herramienta para diagnosticar dificultades de aprendizaje y poder remediarlas (Borasi, 1987), postura con la que coinciden autores como Parra y Santos (2016), Alsina, Bosch y López (2023). De acuerdo con Brousseau (1983) los errores pueden considerarse como el resultado de un conocimiento que fue exitoso en el pasado pero que resulta erróneo o simplemente no es aplicable en otras circunstancias. Adicionalmente, los errores son inevitables durante el aprendizaje matemático (Legutko, 2008) y pueden considerarse como manifestaciones

de malestares cognitivos (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2010). Si el profesor desea ayudar a sus estudiantes a superar los errores en matemática, debe ser consciente de la importancia del error en el proceso de aprendizaje matemático y aún más, de sus causas. De acuerdo con Ball, Thames y Phelps (2008) el profesor debe tener la capacidad de identificar los errores en matemática de sus estudiantes, analizar su naturaleza, juzgar su origen y comprender el aprendizaje del estudiante mediante el error.

Ramírez (2013) mostró que algunos profesores universitarios atribuyen los errores en matemática de sus estudiantes a factores como falta de concentración del estudiante, falencias en la lectura, ligereza del estudiante o falta de madurez). En algunos estudios como Economou (1995) y Ramírez (2020) se ha evidenciado que los profesores atribuyen las causas de los errores a hechos que se distancian de los referentes teóricos de la Educación matemática que intentan explicar críticamente tales causas. D'Amore (2004) llama la atención sobre la deficiente preparación de los profesores (o falta de ella) para identificar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje matemático. Lo anterior resulta coherente con el hecho que las creencias de los profesores influyen directamente sobre su desempeño y sobre los procesos de enseñanza aprendizaje como lo señalan García, Azcárate y Moreno (2006). Las creencias de los profesores pueden influir negativamente en sus análisis sobre las causas de los errores.

Considerando las creencias como parte de las concepciones de los profesores (Llinares, 1996), en la investigación doctoral se buscó determinar qué cambios en las concepciones sobre las causas de los errores de un grupo de profesores de matemática universitaria pueden ocurrir si tienen la oportunidad de analizar y reflexionar críticamente sobre el tema. Para cumplir con los objetivos de la investigación, los profesores participaron de un minicurso de Educación matemática en el que se abordó el estudio de algunos referentes teóricos que ayudan a comprender las causas de los errores (obstáculos epistemológicos, obstáculos didácticos, transformaciones semióticas y misconcepciones), se estudió la disposición a incorporar el referencial teórico por parte de los participantes en sus análisis sobre las causas de los errores. Los participantes en el curso tuvieron la oportunidad de reflexionar, socializar y discutir con colegas sobre el referencial teórico.

Marco teórico

Los referentes teóricos, relevantes para la investigación doctoral, tomados como base de los análisis realizados por los participantes durante las reuniones en grupos focales sobre las causas de los errores fueron los siguientes: obstáculos epistemológicos y obstáculos didácticos (Brousseau, 1976; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2012), misconcepciones (D'Amore 1999; D'Amore & Sbaragli, 2005) y transformaciones semióticas (Duval, 2006). Adicionalmente, se consideraron las tipologías de aprendizajes propuesta por Fandiño Pinilla (2010) por su aporte a los análisis específicos sobre las dificultades de aprendizaje matemático. En la actualidad el referencial teórico citado mantiene su vigencia y se ha constituido en base de múltiples investigaciones sobre las causas de los errores en el aprendizaje matemático; mencionamos algunas: Sulastri, Suryadi, Prabawanto y Cahya (2022) y Asenova, Del Zozzo y Santi (2023) entre otros.

Se consideran además las creencias y concepciones de los profesores de matemática sobre las causas de los errores. De acuerdo con Moreno y Azcárate (2003) las creencias: se caracterizan por tener un carácter de conocimiento subjetivo poco elaborado, explican y justifican muchas de las decisiones de las personas, no se justifican sobre la racionalidad sino sobre sentimientos y experiencias y carecen de conocimientos específicos sobre el tema relacionado. En esta investigación, se adoptó el término concepciones siguiendo la definición de Llinares (1996), que abarca un espectro de cogniciones del profesor, incluyendo sus creencias y conocimiento derivado de la experiencia. Adicionalmente, se adoptó el cambio de concepciones en el sentido de desarrollo o modificación de concepciones en el transcurso del tiempo como lo señalan Wilson & Cooney (2002). Varios autores han llamado la atención sobre el hecho que los cambios en las concepciones de los profesores contribuyen a mejorar la enseñanza de los profesores (Lerman, 1999) y el rendimiento de los estudiantes (Sparks, 1999). En una postura muy similar a la sugerida por Hamukwaya y Haser (2021), consideramos que los programas de formación docente deben centrarse en sensibilizar a los docentes sobre cómo sus concepciones sobre las dificultades en el aprendizaje de la matemática podrían afectar a los estudiantes.

De acuerdo con Pehkonen (2006) un profesor debe ser consciente de sus acciones y debe reflexionar sobre ellas, pues cuando el individuo reflexiona sobre sus acciones se produce aprendizaje. Además, la conciencia de las propias creencias y concepciones puede surgir de esta autorreflexión (Pehkonen, 2006). Por otra parte, si las creencias de los profesores son confrontadas y desafiadas se pueden generar cambios duraderos en los docentes (Holm & Kajander, 2012). En la investigación doctoral se buscó ayudar a los profesores a reflexionar y tomar conciencia de sí mismos mediante datos que validaran o refutaran sus creencias (Olson & Singer, 1994; Pehkonen, 2001), se ofreció a los profesores participantes un escenario que les brindara oportunidades para el cambio y se buscó respetar el hecho que el cambio debe ser voluntario (Pehkonen, 2001).

Metodología

La investigación se desarrolló en dos fases. Para la Fase 1 (llamada de indagación inicial) se realizó una invitación abierta a profesores (en ejercicio) de matemática universitaria de primeros semestres. 25 profesores que laboran en diferentes universidades de Bogotá y municipios aledaños respondieron positivamente a la convocatoria. En esta primera fase los participantes respondieron un cuestionario en el que se les pidió identificar algunos errores en matemática de sus estudiantes y proponer explicaciones para sus posibles causas. En la Fase 2 (de reuniones en grupos focales) participaron 12 profesores, quienes se seleccionaron del grupo original de participantes por su interés y compromiso en continuar haciendo parte del estudio. Estos docentes participaron en un minicurso de Educación matemática de 4 sesiones enfocado en el estudio de los referentes teóricos mencionados en el marco teórico y que contribuyen a comprender las causas de los errores. Se conformaron 4 grupos focales de 3 participantes (Morgan, 1998) cada uno. Con cada grupo se realizaron 4 reuniones que tuvieron una duración de entre 60 y 90 minutos cada una (Morgan, 1998). En cada reunión se realizaron las siguientes actividades: tarea individual de análisis de las soluciones dadas por algunos estudiantes a actividades matemáticas (previamente seleccionadas, organizadas y sistematizadas por el investigador), socialización y discusión inicial en los grupos focales, presentación por parte del

investigador de referentes teóricos (1 por sesión), nueva socialización y discusión por pares. En la sesión sobre obstáculo epistemológico se analizaron soluciones de estudiantes a 2 preguntas sobre límites; en la sesión correspondiente a transformaciones semióticas se analizaron soluciones de estudiantes a 2 preguntas sobre ecuaciones; en la sesión sobre obstáculos didácticos se analizaron soluciones de estudiantes a una pregunta sobre ecuación cúbica y algunos aspectos geométricos de un problema de física sobre plano inclinado y en la sesión sobre misconcepciones se analizaron las respuestas de estudiantes a una pregunta sobre el sucesivo de un número racional y sobre la interpretación de cuadrado como rectángulo.

Se realizaron 4 reuniones con cada uno de los grupos focales (1, 2 y 3) y 2 reuniones con el grupo focal 4. Las sesiones se registraron en video y posteriormente se transcribieron en su totalidad para su organización y análisis. Las transcripciones se hicieron de acuerdo con el criterio conversacional consistente en la división del texto en función de las declaraciones o turno de palabra de los participantes (Rodríguez, Gil & García, 1996, citados en Rodríguez, Lorenzo, & Herrera, 2005, p. 141). Se seleccionaron fragmentos de las declaraciones de cada participante para caracterizar concepciones y sus cambios.

Para analizar la información se siguió un proceso de categorización inductivo-deductivo (Navarrete, 2011): por cada participante, para cada sesión y para cada grupo focal. Se establecieron 5 categorías a priori para el análisis de las concepciones de los participantes (identificación del error, explicación del error, disposición a incorporar los referentes de la Didáctica de la matemática en sus análisis, concepciones sobre las causas de los errores y otros factores que influyen en los análisis de los errores). La elección de las categorías a priori se fundamenta en la revisión bibliográfica de la literatura específica sobre los análisis de errores (Gagatsis & Kyriakides, 2000; Legutko, 2008; Peng & Luo, 2009; Brown & Skow, 2016; Muñoz Lira, 2020; Aguerrea, Solís, & Huincahue, 2022). Se establecieron además algunas subcategorías emergentes de los datos que dieron lugar a descriptores específicos de cada categoría; además el proceso de codificación y categorización se revisó continua y detalladamente.

Para establecer y caracterizar cambios en las concepciones de los profesores se utilizó un criterio de comparación usado y sugerido por autores como Alsina (2012) y D'Amore y Fandiño Pinilla (2004), quienes coinciden en hacer comparaciones de las concepciones de los participantes en sus respectivas investigaciones antes y después de ciertos programas de formación. En la investigación doctoral se hizo una comparación detallada antes y después de cada una de las reuniones en cada grupo focal. Además, para analizar las interacciones entre los diferentes participantes de cada grupo focal se utilizó la caracterización de Cooney, Shealy y Arvold (1998) en sus investigaciones sobre las estructuras de las creencias de docentes en formación. En esta caracterización las personas pueden considerarse como aislacionistas, idealistas ingenuos, conexionistas ingenuos y conexionistas reflexivos.

Resultados y análisis

Un ejemplo de análisis: el caso del participante Manuel

Presentamos a continuación como ejemplo, parte de los análisis realizados para establecer cambios en las concepciones el caso del participante Manuel¹. Se presenta aquí únicamente la caracterización de dos las categorías de análisis.² Se describe también una caracterización de la influencia de las interacciones con los otros participantes en las concepciones de Manuel. En las socializaciones previas a las presentaciones de los referentes teóricos por parte del investigador de las sesiones 1, 2 y 3, Manuel atribuye parte de las causas de los errores a hechos que se distancian de los referentes de la Educación matemática; según Manuel, los estudiantes se vuelven “mecánicos”, no analizan y sólo quieren aplicar fórmulas. También atribuye las causas de los errores a actitudes del estudiante como pereza de los estudiantes o que los estudiantes “quieren todo hecho” como lo muestra el siguiente ejemplo tomado de su participación en la sesión 1:

30:22 Es decir, a los estudiantes realmente, ¡les da pereza!, es decir, ellos quieren toda la parte de fácil, entonces a ellos les cuesta; el estudiante que es dedicado, lo vemos en la Universidad, que es estudiado, que, que pregunta, que llega, que hace, ese estudiante la capta, capta la idea y, y, y arranca. Pero los estudiantes no, ese facilismo creo que es el que, en buena parte, una muy buena parte, es lo que hace que los estudiantes caigan en ese error y no se apropien de los conceptos y de los conocimientos.

En la sesión 4, Manuel atribuye los errores analizados en esa sesión a debilidades en la formación previa de los estudiantes. Al mismo tiempo, Manuel identifica características de algunos de los referentes teóricos estudiados en las diferentes sesiones (incluso antes de ser presentados por el investigador) como posibles explicaciones de las causas de los errores; por ejemplo reconoce lo problemático que puede ser el infinito para los estudiantes (obstáculo epistemológico) o el uso inapropiado de la expresión “pasar a” en la resolución de ecuaciones (obstáculo didáctico).

Ahora bien, un aspecto específico a caracterizar fue la forma en que los participantes incorporaban o no los referentes teóricos estudiados a sus análisis sobre las causas de los errores.³ En la sesión 1, Manuel no incorpora el obstáculo epistemológico como recurso para analizar las posibles causas de las tareas analizadas en esa sesión. En las sesiones 2 y 3 puede observarse que Manuel intenta incorporar los referentes teóricos a sus análisis sobre las causas de los errores o los reconoce como pertinentes para tales análisis. En la sesión 4, Manuel recurre directamente a la misconcepción para sustentar sus argumentos sobre las causas de los errores. El siguiente ejemplo, tomado de la sesión 2 expresa la interpretación de Manuel sobre la conversión, reconociendo la dificultad que genera a los estudiantes:

27:35 Pues profe, yo considero que es que ahí es precisamente donde está el meollo del asunto, es decir, ¿de por qué a los estudiantes se les dificulta tanto las situaciones matemáticas?, porque eh [...], yo llamo, él lo dice convertir, yo a ellos, a los muchachos les digo el traducir, pase de lenguaje normal a lenguaje matemático, y eso es muy difícil para ellos, es demasiado complicado porque el nivel de abstracción,

¹ Se usan pseudónimos para identificar a los participantes.

² Debido a las limitaciones de espacio en este documento. Para una revisión detallada, se sugiere al lector revisar Ramírez (2024).

³ Este aspecto es el que sustenta una de las categorías a priori definidas para el análisis: “Disposición a incorporar referentes teóricos de la Educación matemática en los análisis sobre las causas de los errores.”

Durante las socializaciones, Manuel coincidió con sus colegas del grupo focal 3 en varios argumentos. Por ejemplo, en la sesión 3, respecto al obstáculo didáctico, Manuel, Hernán y José concordaron en que los profesores emplean múltiples estrategias para lograr la comprensión de los estudiantes; a continuación, parte de la intervención de Manuel:

05:42 Yo estoy de acuerdo con lo que decían José y Hernán, que uno como profesor busca muchos caminos, muchos métodos para explicar y hacerse entender, o sea, quiere transmitir lo que, de la mejor manera lo que uno quiere hacer.

En otras ocasiones, Manuel adoptó posturas divergentes de los demás participantes. Por ejemplo, en la tarea sobre el sucesivo (sesión 4, misconcepción), su análisis se focalizó en lo que ocurre en el conjunto de los números naturales, a diferencia de sus colegas que cuestionaron la pertinencia de la tarea:

06:13 Bueno, profe yo si partí del supuesto de los números naturales porque generalmente cuando, cuando se generaron los números naturales pues apareció, apareció un siguiente, apareció un anterior, un orden que se le fue dando ese orden establecido, y ahí es muy claro hablar del siguiente, pero si, si de pronto nosotros hacemos el ejercicio en cualquier, con cualquier persona, inclusive cualquier estudiante y le preguntamos por un estudiante generalmente intrínsecamente uno da una respuesta desde los naturales, no haciendo las aclaraciones que tienen toda la razón tanto con el profe José como el profe Hernán del contexto.

De los participantes de este grupo focal, Manuel es el más crítico frente a los argumentos de los otros participantes: aunque puede incorporar y coincidir en varias de las ideas que ellos expresan, también toma distancia y argumenta el por qué en otros casos. En la clasificación de Cooney, Shealvy y Arvold (1998) corresponde a un conexionista reflexivo.

A lo largo de las sesiones, los participantes incorporaron en diversos grados los referentes teóricos presentados, identificándose tres tendencias con fronteras difusas. El grado 1 denota nula o poca disposición a incorporar referentes de la Educación Matemática y escaso cambio en sus concepciones sobre las causas de los errores. El grado 2 exhibe indicios de cambio conceptual y un intento por integrar dichos referentes en sus análisis. Finalmente, el grado 3 refleja una incorporación efectiva de los referentes y fuertes indicios de cambio en sus concepciones. A continuación, se muestra la caracterización de estos grados para los participantes del estudio.

Grado 1: nula o poca disposición a incorporar referentes de la Educación matemática y al cambio en sus concepciones

Los participantes Fabio, Andrés y Enrique (del grupo focal 4) coinciden en varios de sus argumentos con características de los referentes teóricos (obstáculos didácticos, transformaciones semióticas y misconcepciones). Fabio reconoce la resistencia del error a ser superado, pero no incorpora estas herramientas a sus análisis, mientras que Andrés y Enrique enfatizan la responsabilidad de los profesores y los problemas derivados del uso repetido de las mismas representaciones, especialmente en el análisis de las tareas. Aunque todos muestran coincidencia con los referentes teóricos, no se observan cambios significativos en sus concepciones sobre las causas de los errores.

Aunque Nicolás (grupo focal 2) identifica causas de errores que coinciden parcialmente con los referentes teóricos, sus argumentos se centran en aspectos generales de la enseñanza y el aprendizaje, sin profundizar en las causas específicas. Si bien intenta incorporar los referentes, no hay un cambio significativo en sus concepciones, aunque reconoce su potencial y la necesidad de profundización. Por otro lado, Miguel (grupo focal 2) critica factores de enseñanza que dificultan el aprendizaje matemático, algunos alineados con obstáculos didácticos. Sin embargo, se resiste a incorporar otros referentes de la Educación Matemática, prefiriendo mantener su postura inicial, como en la cuarta sesión en que desestima la pertinencia de la misconcepción para explicar las causas de los errores analizados.

Grado 2: participantes que intentan incorporar referentes de la Educación matemática y algunos indicios de cambio en las concepciones

Ernesto y César (grupo focal 1) y José y Hernán (grupo focal 3), concuerdan en que el error es inherente al aprendizaje matemático, influenciado por la enseñanza, la naturaleza de los objetos matemáticos y sus representaciones semióticas. Ernesto y César resaltan la importancia de ahondar en las causas de los errores; César, aunque crítico con algunos referentes teóricos, reconoce el potencial del error como oportunidad de aprendizaje. José valora los referentes teóricos de la Educación Matemática, especialmente las misconcepciones, y toma conciencia de la necesidad de profundizar en ellos para una mejor comprensión de los errores. Hernán incorpora algunos referentes a sus análisis, proponiendo estrategias didácticas para superar errores, si bien enfatiza la prioridad de las soluciones sobre las causas.

Grado 3: incorporan los referentes de la Educación matemática y muestran indicios de cambio en sus concepciones

Carlos (grupo focal 1) muestra una creciente disposición a incorporar los referentes teóricos de la Educación Matemática, viendo el error como una oportunidad de aprendizaje. En su análisis de las causas de los errores, enfatiza la importancia de los factores emocionales y actitudinales del estudiante. Diego (grupo focal 2) analiza las causas de los errores considerando factores actitudinales, institucionales y conceptuales. Sus explicaciones se alinean parcialmente con los referentes teóricos, pero también incluye otros factores y sugiere soluciones. Aunque los incorpora, considera que los referentes son insuficientes para explicar exhaustivamente las causas, manteniendo una postura crítica al reconocer que las explicaciones son parciales. Manuel (grupo focal 3) incorpora los referentes teóricos (obstáculo epistemológico, transformaciones semióticas, obstáculos didácticos) en sus análisis, aportando ejemplos y discutiendo aspectos de las tareas y la enseñanza para superar los errores, además de sugerir estrategias de apoyo. Reconoce la importancia de los referentes teóricos para entender las causas de los errores, pero es consciente de la necesidad de profundizar en su estudio para una correcta aplicación.

Conclusiones

La inclusión de referentes de la Educación Matemática como herramientas críticas para analizar las causas de los errores generó ejes de discusión y socialización para todos los participantes, lo que permitió la emergencia de diversas posturas sobre su pertinencia. Los participantes, en mayor o menor medida, reconocieron la importancia del abordaje académico en

la discusión sobre las causas de los errores, independientemente de si concordaban o no con su relevancia explicativa.

Puede afirmarse que hay un cambio en la concepción de la mayoría los participantes de los grupos focales 1, 2 y 3 en el sentido de considerar, después de participar en el estudio, que los errores pueden tener causas que merecen un tratamiento académico y que no se deben simplemente a cuestiones como “pereza de los estudiantes” o “factores actitudinales.” Los participantes del Grado 1 mostraron la menor disposición a incorporar los referentes de la Educación Matemática para analizar las causas de los errores, a pesar de reconocer la importancia de su estudio, con escasas evidencias de cambio en sus concepciones. Los del Grado 2, aunque sin un cambio radical en sus concepciones, tuvieron mayor disposición a integrar y profundizar en los referentes, incluso si manifestaron una postura crítica. Finalmente, los participantes del Grado 3 evidenciaron una mayor disposición a incorporar los referentes teóricos en sus análisis de las causas de los errores.

Por otra parte, no puede afirmarse que existan cambios radicales en las concepciones de los profesores sobre la forma de analizar las causas de los errores; más bien existen ciertos indicios de cambio graduales y diferenciados. Que un referente teórico como el obstáculo epistemológico pueda resultar novedoso y útil para explicar ciertas causas de errores no implica que los participantes lo usen en sus análisis. Más bien, hay evidencias de la incorporación, en mayor o menor grado, del referencial teórico en los análisis de los participantes y un reconocimiento de varios de ellos de la necesidad de profundizar en el estudio de estos referentes para poder usarlos funcionalmente en sus análisis de las causas de los errores de sus estudiantes.

Los participantes en general se muestran dispuestos a reflexionar y discutir los argumentos de los otros colegas contribuyendo con sus propias ideas a posicionarse en favor de un argumento o para controvertir o matizar las declaraciones de los otros docentes. Puede afirmarse que hay una fuerte tendencia conexional reflexiva (Cooney, Shealvy y Arvold, 1998) de los participantes respecto a la posibilidad de incorporar ideas de los otros docentes a sus análisis.

Este estudio es consistente con investigaciones sobre la formación de profesores y sobre las causas de los errores, que además se sustentan en referentes teóricos similares, como las realizadas por Ferretti, Gambini y Spagnolo (2024) y Dello y Santi (2025).

Referencias y bibliografía

- Aguerre, M., Solís, M. E., & Huincahue, J. (2022). Errores matemáticos persistentes al ingresar en la formación inicial de profesores de matemática: el caso de la linealidad. *Uniciencia*, 36(1), 49-65.
- Alsina, A. (2012). Proceso de transformación de las concepciones del Profesorado sobre la resolución de Problemas matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 30(3), 71-88.
- Alsina, Á., Bosch, E., & López Dalmau, M. (2023). Situaciones de aprendizaje para desarrollar el sentido socioafectivo: Contribuyendo a formar personas desde la educación matemática. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*, 2023, vol. 115, p. 143-160.
- Asenova, M., Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023). Unfolding Teachers' Interpretative Knowledge into Semiotic Interpretative Knowledge to Understand and Improve Mathematical Learning in an Inclusive Perspective. *Education Sciences*, 13(1), 65.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, 7(3), 2-8.

- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En Wanhamme, W., & Wanhamme, J. (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, Actes de la XXVIIIème rencontre CIEAEM, Louvain la Neuve, 5-12 août 1976.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164–198.
- Brown, J., & Skow, K. (2016). Mathematics: Identifying and addressing student errors. *The Iris Center*, 31.
- Cooney, T. J., Shealy, B. E., & Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal for research in mathematics education*, 29(3), 306-333.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2004). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación matemática Thales*, (60), 413-434.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de Matemáticas de la Escuela Secundaria Superior. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación matemática Thales*, (58), 23-44.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). *El número cero: aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número mas misterioso*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semántica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, 2, 139-163.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemática: análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la Educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Dello Iacono, U., & Santi, G. (2025). Mathematics teacher education in a computer-based environment: joint labor using Moodle Quick Chat plugin. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-18.
- Economou, P. (1995). How teachers of mathematics confront students' errors. En Philippou, G., Christou, C., & Kakas, A. (Eds.), *Proceedings of the Second Panhellenic Conference on Mathematics Education and the Informatics in Education*, (pp. 383–400). Nicosia: Sighroni Epoxi.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Ferretti, F., Gambini, A., & Spagnolo, C. (2024). Management of semiotic representations in mathematics: quantifications and new characterizations. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 12(1), 11-20.
- Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, 6(1), 24-58.
- García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan Cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9(1), 85-116.
- Hamukwaya, S. T., & Haser, Ç. (2021). "It does not mean that they cannot do mathematics": Beliefs about mathematics learning difficulties. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(1), em0622.
- Holm, J., & Kajander, A. (2012). Interconnections of knowledge and beliefs in teaching mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 12, 7-21.
- Lerman, S. (1999). Research on mathematics teachers' beliefs: A situated perspective. En: Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.), *Proceedings of the Workshop in Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* (pp.66-72). Duisburg, Alemania: Gerhard Mercator Universität
- Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En Ponte, J. P., Monteiro, C., Maia, M., Serrazina, L., & Loureiro, C. (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formação?* (pp. 47-82). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática. SPCE.
- Legutko, M. (2008). An analysis of students' mathematical errors in the teaching research process. En Czarnocha, B. (Ed.), *Handbook for mathematics teaching: Teacher experiment. A tool for research* (pp. 141–152). Rzeszów: University of Rzeszów.
- Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemática acerca de la enseñanza de las Ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 21(2), 265-280.

- Morgan, D. L. (1998). *The focus group guidebook*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Muñoz Lira, M. (2020). Análisis de las prácticas declaradas de retroalimentación en Matemáticas, en el contexto de la evaluación, por docentes chilenos. *Perspectiva Educacional*, 59(2), 111-135.
- Navarrete, J. M. (2011). Problemas centrales del análisis de datos cualitativos. *Revista latinoamericana de metodología de la investigación social*, (1), 47-60.
- Olson, J. R., & Singer, M. (1994). Examining teacher beliefs, reflective change, and the teaching of reading. *Literacy Research and Instruction*, 34(2), 97-110.
- Parra, F. V., & Santos, S. A. G. (2016). El error como oportunidad para reflexionar y tomar decisiones asertivas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista mexicana de bachillerato a distancia*, 8(16), 34-42.
- Pehkonen, E. (2001). A hidden regulating factor in mathematics classrooms: mathematics-related beliefs. En Ahtee, M., Björkqvist, O., Pehkonen, E., & Vatanen, V. (Eds.), *Research on mathematics and science education. From beliefs to cognition, from problem solving to understanding* (pp. 11-37). Jyväskylä, Finland: Institute for Educational Research, University of Jyväskylä.
- Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? En Häggblom, L., Burman, L., & Røj-Lindberg, A.-S. (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festschrift tillägnad professor Ole Björkqvist Vol 1*. (pp. 77-87). Vasa, Finland: Åbo Akademi, Pedagoiska fakulteten, Specialutgåva.
- Peng, A., & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the learning of mathematics*, 29(3), 22-25.
- Ramírez, H. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la Matemática de estudiantes de primer curso de Matemática. Análisis epistemológico, semiótico y didáctico*. (Tesis de Maestría). Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Ramírez, H. (2020). Explicaciones de profesores universitarios de matemática sobre las posibles causas de algunos errores de sus estudiantes. *La matematica e la sua didattica*. 28(1), 87-105.
- Ramírez, H. (2024). *Posibles cambios de concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática*. (Tesis de Doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Rodríguez, C., Lorenzo, O., & Herrera, L. (2005). Teoría y práctica del análisis de datos cualitativos. Proceso general y criterios de calidad. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, SOCIOTAM*, 15(2), 133-154.
- Sparks, D. (1999). Real life view: Here's what a rule learning community looks like. *Journal of Staff Development*, 20(4), pp. 53-57.
- Sulastri, R., Suryadi, D., Prabawanto, S., & Cahya, E. (2022). Epistemological Obstacles on Limit and Functions Concepts: A Phenomenological Study in Online Learning. *Mathematics teaching research journal*, 14(5), 84-106.
- Wilson, M., & Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and development. The role of beliefs. En: Leder, G., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (127-148). Dordrecht – Boston – Londres: Kluwer Ac. P.