



## Utilización de Geogebra en el proceso de enseñanza aprendizaje de algunos problemas de optimización con aplicación de la derivada

Antonio **Rey** Roque  
Universidad de las Ciencias Informáticas  
Cuba  
[antrey@uci.cu](mailto:antrey@uci.cu)

### Resumen

Contribuir a mejorar los resultados en la resolución de problemas y en particular los problemas de optimización del Cálculo diferencial en los estudiantes de ingeniería en ciencias informáticas de la Universidad de Ciencias Informáticas de la Habana, Cuba es el propósito del presente trabajo, para lo cual se escogió el software de geometría dinámica Geogebra que cuenta con todos los elementos para efectuar y visualizar cálculos simbólicos, numéricos y gráficos además de esquemas imprescindibles para la interpretación y la modelación de problemas. Para cumplimentar este objetivo se realizó un estudio profundo del software y de la didáctica de la enseñanza-aprendizaje basada en la resolución de problemas, se logró crear un número de objetos con Geogebra insertados en un sistema mucho más amplio para toda la disciplina y utilizarlos en el proceso docente con un impacto significativo en el rendimiento de los estudiantes y la aceptación de los docentes de matemática.

*Palabras clave:* Objetos de aprendizaje; Geogebra; Resolución de problemas; Problemas de optimización; Aplicaciones del Cálculo diferencial.

### Definición y relevancia del problema

Generalmente el estudio del cálculo diferencial se ubica en los primeros años de las carreras de ingeniería en un ciclo básico que pretende dotar a los estudiantes de los fundamentos matemáticos que le servirán para la comprensión de las temáticas de la especialidad. En particular la carrera de ingeniería en ciencias informáticas se plantea desarrollar en los estudiantes de estos primeros años la capacidad para resolver problemas de programación de baja y media complejidad. La disciplina de matemática insertada en este ciclo tiene como misión

principal dar significación a lo aprendido desarrollando en los estudiantes su pensamiento matemático de manera que facilite el enfrentamiento exitoso a la resolución de problemas.

¿Cómo lograr un aprendizaje significativo del Cálculo y en particular de las aplicaciones de la derivada en los estudiantes de ingeniería?, en la respuesta a esta interrogante se centra el problema que pretendió resolver el autor de esta ponencia para lograr en sus estudiantes motivación y sobre todo un aprendizaje eficaz del concepto de derivada aplicado a la resolución de algunos problemas de optimización con el empleo de objetos creados con el software de geometría dinámica Geogebra.

La relevancia del aprendizaje mediante problemas aplicando la interpretación de los conceptos es una verdad reconocida en la comunidad de educadores matemáticos, las dificultades que presentan los estudiantes para resolver problemas del Cálculo se deben principalmente a que la enseñanza precedente se centró en el trabajo algorítmico y algebraico en detrimento del estudio conceptual y problémico (Artigue. M, 1995) lo cual, según Dávila, Grijalva y Bravo (2012) conlleva a dificultades para resolver problemas no rutinarios como los relacionados con las aplicaciones de la derivada.

La investigación se propuso desarrollar con el empleo del Geogebra varios objetos dinámicos e interactivos para algunos problemas de optimización seleccionados entre las aplicaciones de la derivada que se estudian en la disciplina Matemática de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas de la universidad homónima de la Habana, Cuba. la selección de Geogebra se debe a las potencialidades de este software para crear objetos interactivos y dinámicos que facilitan la visualización no solo gráfica de esquemas, diagramas y funciones, también de los cálculos numéricos y simbólicos presentes en este tipo de problemas.

### **Referencial teórico**

La resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje, introducida en Cuba oficialmente desde 1984 revolucionó de alguna manera la forma de enseñar y de aprender sobre todo en la matemática en todos los niveles, según Guanche (2021), con el surgimiento de la enseñanza problémica: "..., reverdeció esta idea de lograr el desarrollo del pensamiento en los estudiantes, de 'mover' su intelecto en busca de conocimientos nuevos, merced a la necesidad de asimilarlos."

Desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes como objetivo centro y no hacer prevalecer el aprendizaje memorístico de fórmulas y algoritmos es una consecuencia consciente de la enseñanza problémica que eleva la calidad del proceso docente educativo (Guanche, 2021). Para instrumentar esta manera de enseñar se utilizan técnicas que según Chevallard (1999) es una manera de llevar a cabo una tarea. En el desarrollo de este trabajo para la resolución de problemas se utiliza una herramienta digital: Geogebra, técnica que integra no solo el conocimiento del software en sí sino que lo entrelaza con el conocimiento matemático que es necesario dominar para resolver el problema (Artigue, 2002).

GeoGebra es un software de geometría dinámica para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa

fácil de usar. GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión y desarrollo, con millones de usuarios en casi todos los países. (GeoGebra, 2017). Resulta particularmente eficaz como herramienta didáctica de corte heurístico de manera que el estudiante puede pasar en la resolución del problema, del tratamiento intuitivo relacionado con la fase de familiarización y comprensión en la construcción formal del modelo matemático y la resolución con la utilización de la derivada (Carballo y Mojica, 2022), de acuerdo con Takači et al. (2015), el autor considera que la posibilidad de la visualización que ofrece Geogebra facilita el aprendizaje de funciones y sus gráficos que es imprescindible en la resolución de problemas de optimización mediante derivadas.

Sobre la visualización en la enseñanza aprendizaje de la Matemática, Di Domenicantonio, Costa y Vacchino (2011) compilan en su artículo nombres tan significativos como Gauss: La Matemática es una ciencia del ojo; Descartes, quien reconoce que en ocasiones es importante mostrar figuras; Hilbert, quien consideraba a las figuras geométricas como fórmulas gráficas; también autores contemporáneos como (de Guzmán, 1997), (Davis, 1993) y (Oostra, 2001) se refieren en sus trabajos a la visualización como vía imprescindible para hacer y aprender matemática. La visualización es un proceso interno que en el proceso de descubrimiento y comprensión de la matemática involucra sensación, imaginación y manipulación mental de los objetos, (Di Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011). En este trabajo y otros relacionados con la visualización dinámica e interactiva a través de objetos de enseñanza-aprendizaje que realiza el autor, el material utilizado es el software de geometría dinámica GeoGebra, con el cual se elaboraron los objetos, en forma de applets.

### **Método y desarrollo conceptual**

El trabajo que se presenta fue instrumentado utilizando métodos de investigación cualitativos implementando la técnica digital con el empleo de objetos creados con Geogebra en el proceso de enseñanza aprendizaje de estudiantes de Ingeniería en Ciencias Informáticas durante cuatro cursos y comparando los resultados de estos con los de resultados de cursos anteriores en cuyo aprendizaje no se utilizaron objetos de este tipo.

Se realizó un estudio exhaustivo de las potencialidades de Geogebra para crear objetos dinámicos e interactivos que pudieran ser utilizados en la enseñanza aprendizaje de algunos problemas de optimización estudiados como aplicaciones del Cálculo diferencial, se incluyó en este estudio la revisión para su reutilización, de objetos creados sobre esta temática y se crearon otros desde cero. Se hizo una selección de los problemas más representativos entre los que se estudian tradicionalmente en las asignaturas de Cálculo de los cursos de ingeniería y fue imprescindible el estudio de la pedagogía y la didáctica de la matemática en particular la relacionada con la enseñanza problémica.

### **Resultados**

Los resultados se organizan en tres fases: Selección de los problemas de optimización, estudio y diseño de los objetos de Geogebra, utilización de los objetos en el proceso de enseñanza aprendizaje y estudio comparativo de los resultados académicos en esta temática.

## Selección de los problemas de optimización

La selección se centró en los problemas de optimización que involucran funciones reales de una variable real que se estudian en la asignatura Matemática I de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas que involucran situaciones geométricas: área, perímetro, volumen; distancia entre puntos; figuras inscriptas y de recorridos mínimos entre puntos. En cada problema la idea es que el estudiante combine el intercambio con el objeto digital y el trabajo con lápiz y papel.

Problema 1: Volumen máximo de un prisma recto rectangular con área lateral fija.

Problema 2: Área máxima con perímetro fijo de un rectángulo.

Problema 3: Perímetro mínimo con área fija de un rectángulo.

Problema 4: Área máxima de rectángulo inscrito.

Problema 5: Distancia mínima de una curva a un punto del plano.

Problema 6: Camino de recorrido mínimo entre tres puntos no alineados.

## Diseño y elaboración con Geogebra de los objetos de enseñanza aprendizaje

Se muestran y explican en esta sección algunos de los objetos que son ilustrativos de las características didácticas de los creados para cada problema:

Problema 1: A partir de una lámina cuadrada de 20cm de lado se desea construir una caja de base cuadrada recortando las esquinas como se muestra en la figura.

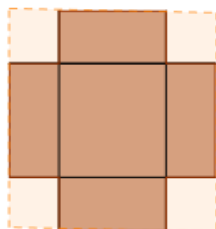


Figura 1: Ilustrativa del problema 1 (Elaborado en el applet de Geogebra)

El objeto creado permite de manera interactiva que el estudiante recorra las fases o etapas de la resolución de problemas, con relevancia en la interpretación del problema modificando las dimensiones del corte y observando la forma y volumen que va tomando la caja de manera que le puede intuir la existencia del volumen máximo y el rango del corte a la postre dominio de la función objetivo, la cual, partir del paso 3 se visualiza de manera que se observa dinámicamente, interactuando con la longitud del corte la relación volumen con la imagen de la función en la que se aprecia la existencia y el valor máximo.

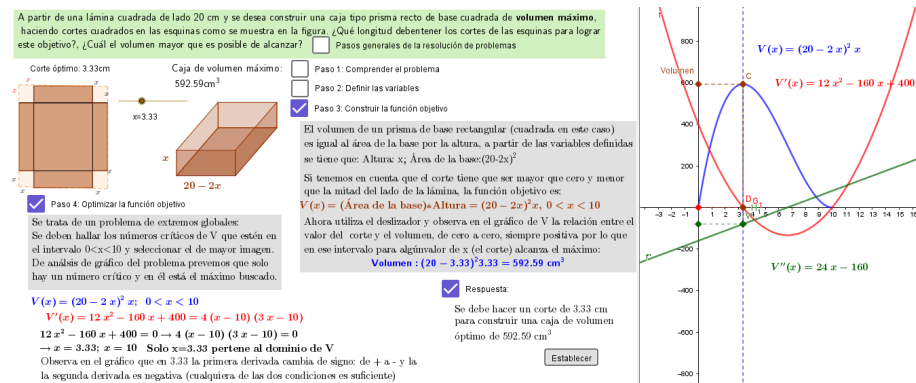


Figura 2: Facsímil del applet para el problema 1 (Elaborado en el applet de Geogebra)

**Problema 4:** Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una parábola de ecuación  $y = -ax^2 + b$ ,  $a, b > 0$  y el eje de las abscisas.

Este problema vincula la geometría *tradicional* del plano con la geometría analítica al involucrar una parábola y su ecuación directamente. De manera similar el estudiante puede recorrer los pasos de la resolución de un problema e interactuar dinámicamente para apreciar en tiempo real la relación entre los parámetros y variables del problema con el gráfico de la función objetivo.

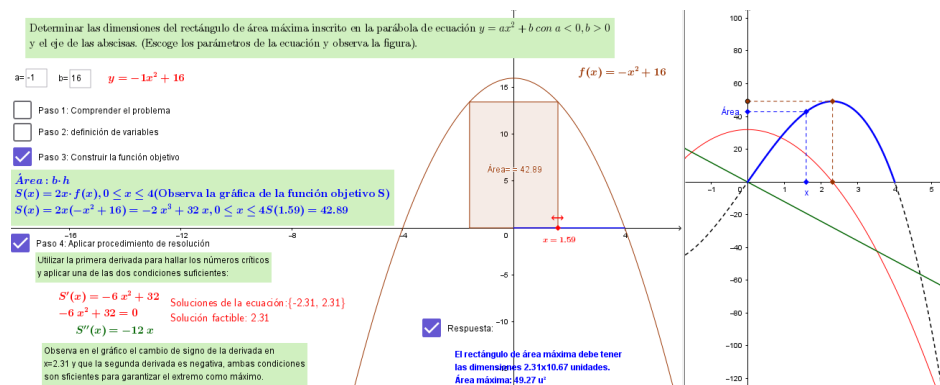


Figura 3: Facsímil del applet para el problema 4 (Elaborado en el applet de Geogebra)

**Problema 5:** determinar las coordenadas del punto  $(x, y)$  de la curva con ecuación  $y = f(x)$  más cercano al punto  $P(a, b)$ .

Se trata de un problema de geometría analítica, de distancias entre puntos. Geogebra permite interactuar con el gráfico de la función  $y = f(x)$  y los elementos del problema a la par que facilita los cálculos y muestra en tiempo real de manera dinámica el gráfico de la función objetivo.

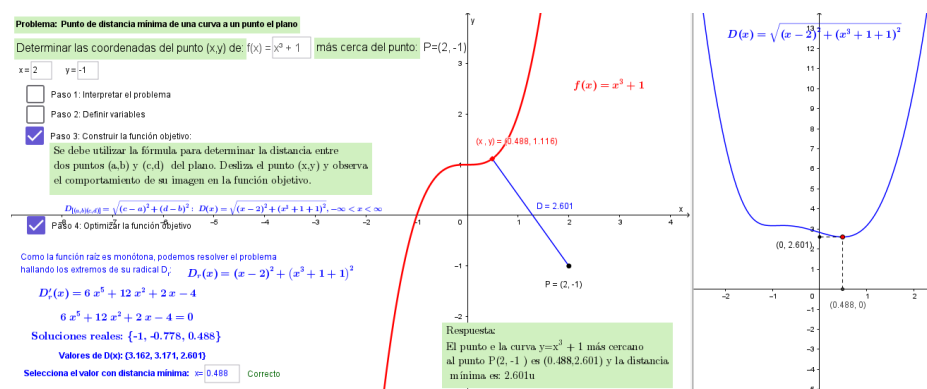


Figura 4: Facsímil del applet para el problema 5 (Elaborado en el applet de Geogebra)

## Implementación de los objetos en el proceso docente-educativo

Los objetos creados para esta temática de la resolución de problemas de optimización se insertan en un sistema de objetos de Geogebra, casi un centenar, creados y utilizados en las cuatro asignaturas de la disciplina Matemática de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas. Aunque fueron organizados por asignatura lo están también por temas, de manera que pueden adaptarse con facilidad ante cambios de organización docente y ser utilizados por otros docentes y estudiantes de otras carreras que incluyen los temas en su plan académico, además de manera independiente en el aprendizaje autónomo

Específicamente, los problemas de optimización con aplicación del cálculo diferencial se estudian en la asignatura Matemática II, no solo para funciones de una variable, también para los problemas que involucran funciones de dos variables independientes.

En este sistema de objetos dinámicos e interactivos elaborados con Geogebra se distinguen tres grupos clasificados de acuerdo con su funcionalidad didáctica: para la comprensión de los conceptos; para resolver problemas genéricos y específicos (como los que se presentan en este trabajo) y como herramientas de cálculo numérico, simbólico y gráfico.

## Impacto en los resultados académicos

El sistema de objetos creado, en el que se insertan los que corresponden a la resolución de problemas de optimización se ha utilizado en el proceso docente de cuatro versiones de la asignatura Matemática II, desde 2022. La resolución de problemas y en particular los problemas de optimización constituyen sin dudas una materia con dificultades en su asimilación, lo que se constató en los resultados académicos de los estudiantes de ingeniería en ciencias informáticas. La utilización de estos objetos se concretó en las clases tipo conferencia, como medios de enseñanza que apoyan al profesor en la explicación de ejemplos a la vez que se muestra a los estudiantes cómo utilizar el objeto. Posteriormente, con la orientación pertinente (guías de trabajo) los estudiantes utilizan los objetos para resolver los problemas de manera independiente y en las clases prácticas con la supervisión del profesor y de forma colaborativa con otros estudiantes.

En la tabla 1 se muestran resultados cuantitativos del porcentaje de estudiantes que

resolvieron adecuadamente los problemas planteados en los exámenes, donde no podía hacer uso de los objetos. La base de comparación se tomó del porcentaje promedio de respuestas correctas a la pregunta del problema de optimización en exámenes de los tres cursos anteriores a 2022 y que es de un 30%.

Tabla 1

*Resultado de respuestas correctas en preguntas de problemas de optimización*

Curso	No. Estudiantes	% respuestas correctas
2022	673	40%
2023	701	42%
2024	698	53%
2024-2025	679	60%

Fuente: datos de la revisión de exámenes de Matemática II.

### Conclusiones

Los resultados constatados en la calidad de la resolución de los problemas de optimización que enfrentaron los estudiantes en los exámenes corroboraron que el empleo de los objetos dinámicos e interactivos elaborados con el software Geogebra contribuyó de manera eficaz al proceso de enseñanza aprendizaje en los estudiantes de la carrera de ingeniería en ciencias informáticas de la universidad homónima. La ductilidad de Geogebra permitió perfeccionar los objetos en cada versión que se utilizó, no solo en lo técnico propio del software, también en los elementos didácticos que lo acompañan incluyendo las guías para su utilización.

La separación de los objetos por temas facilita su generalización a otras carreras incluso a su utilización en el autoaprendizaje y la creación de contenidos para plataformas como entornos virtuales de aprendizaje y repositorios de audiovisuales.

### Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, 97-140. México: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Carballo, A. M., Mojica, A. D. (2022). Uso de GeoGebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato, *Revista Números: Revista de didáctica de las matemáticas* (pp. 71-89)
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Dávila, M. T., Grijalva, A. y Bravo, J. M. (2012). La Derivada a partir de la Resolución de Problemas de Optimización con Apoyo de Geogebra. En Cortés, J. C., Ulloa, R. (Eds.), *Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012*. Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática, 212-222. Guadalajara, México: AMIUTEM, A. C.
- Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24 no. 4, 333-344. Springer. Netherlands.
- De Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Primera Edición, Pirámide, Madrid.

- Di Domenicantonio, Rossana & Costa, Viviana & Vacchino, María. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 7(27). Recuperado a partir de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/913>
- GeoGebra, C. (2017). GeoGebra. Retrieved from [www.GeoGebra.org](http://www.GeoGebra.org).
- Guanche Martínez, A. (2021). Algunos aportes de los pedagogos cubanos a la teoría de la enseñanza problémica. *Anales de la Academia de Ciencias de Cuba*, 11(2), e878. Recuperado de <https://revistaccuba.sld.cu/index.php/revacc/article/view/878/1091>
- Oostra, A. (2001). Los diagramas de la Matemática y la Matemática de los diagramas. *Boletín de Matemáticas Nueva Serie*, Volumen VIII N°. 1, 1–7.
- Takači, D., Stankov, G., y Milanovic, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education*, 82, 421-431  
<https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.12.002>.