El razonamiento geométrico de docentes de Matemáticas en pre-servicio caracterizado según el modelo Van Hiele

Miguel **Picado Alfaro**
Escuela de Matemática, Universidad Nacional Costa Rica
miguel.picado.alfaro@una.cr
José Romilio **Loría Fernández**
Escuela de Matemática, Universidad Nacional Costa Rica
jose.loria.fernandez@una.cr

Resumen

Esta contribución consiste en la caracterización del razonamiento geométrico de un grupo de 31 docentes de Matemáticas en pre-servicio cuando resuelven tareas sobre conceptos geométricos. El referente teórico se construye desde el Modelo de Van Hiele. La información se recolectó a través de un instrumento con cuatro ítems de selección única, cada uno asociado a uno de los cuatro primeros niveles de pensamiento geométrico, y se analizó mediante el análisis de contenido y el diseño de categorías. Los resultados destacan habilidades, en estos docentes, vinculadas a los niveles de visualización, análisis y ordenación. También, es notoria la presencia de un mayor número de errores en el ítem asociado al nivel de deducción formal, y una falta de correspondencia entre la respuesta seleccionada y las justificaciones aportadas por los docentes.

Palabras clave: Didáctica de la geometría; Geometría; Modelo de Van Hiele; Profesores de Matemática; Razonamiento geométrico.

Introducción

El estudio del desarrollo del razonamiento geométrico se ha orientado al reconocimiento y fomento de destrezas y habilidades en los estudiantes, como parte de su aprendizaje en los distintos niveles que conforman los planes de formación en Educación Matemática (Usiskin, 1982; Proenza y Layva, 2008; Sáenz et al., 2017). Gutiérrez y Jaime (1991) señalan la necesidad de acercar al profesorado de Matemáticas a teorías de aprendizaje que incidan en el diseño de actuaciones en el aula en las clases de geometría; Afonso (2003) destaca particularidades del proceso de planificación de la enseñanza de la geometría y las competencias didácticas que manifiestan los docentes de Matemáticas, desde la perspectiva del Modelo de Van Hiele. La formación inicial de profesores de Matemáticas en Costa Rica ha tomado un rumbo distinto a los modelos tradicionales basados en la generalidad pedagógica. Se pretende una formación de profesionales orientada por la especificidad didáctica en Matemáticas (Valverde et al., 2020) a través de un plan de estudios que promueve el desarrollo de competencias específicas que contribuyen al desarrollo de capacidades y habilidades matemáticas, didáctico-matemáticas y pedagógicas en este profesorado en pre-servicio, respectivamente (Universidad Nacional [UNA], 2017).

Esta contribución destaca los resultados de un estudio sobre el razonamiento geométrico que manifiestan estudiantes de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica (BLEM), tomando como fundamento los niveles de pensamiento propuestos en el Modelo de Van Hiele. Con especificidad, se responde a la pregunta ¿qué características del razonamiento geométrico se identifican en profesores de Matemáticas en pre-servicio, según los primeros cuatro niveles de pensamiento del Modelo de Van Hiele, cuando resuelven tareas sobre conceptos geométricos? El objetivo particular del estudio fue determinar las singularidades en la resolución de ítems sobre figuras geométricas planas y de las justificaciones manifestadas por este grupo de profesores de Matemáticas, que condujeran a la identificación de indicadores sobre el grado de desarrollo de los niveles de visualización (o reconocimiento), análisis, ordenación (o clasificación) y deducción formal propuesto en el Modelo de Van Hiele.

Fundamentación teórica

Stenhouse (1984) propone superar la separación entre teoría y práctica mediante la investigación activa y el desarrollo curricular. Así, el docente es el centro de toda actividad de investigación y de desarrollo de manera que "este aumente progresivamente la comprensión de su propia labor y perfeccione así su enseñanza" (Rico, 1997, p. 110). La formación de profesores de Matemáticas tiene como propósito el desarrollo de conocimientos matemáticos, de estrategias de enseñanza que promuevan el aprendizaje óptimo en el estudiantado y de actitudes favorables para estos procesos. Particularmente, diversos autores hacen énfasis en que esta formación acentúe el análisis y el diseño de tareas matemáticas escolares, la consideración de las condiciones cognitivas específicas del estudiantado, la selección y elaboración adecuada de recursos y materiales didácticos, el análisis de las directrices curriculares y el establecimiento de las estrategias evaluativas adecuadas, entre otros (Aguayo, 2018; Caraballo, 2014; Lupiáñez, 2014; Rico et al., 2008). Así, los procesos de formación de profesionales de la Educación Matemática apuntan al desarrollo y la comprensión de conocimientos matemáticos y al fomento de competencias vinculadas con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en niveles educativos como la educación secundaria.

La perspectiva teórica adoptada para este estudio incluye como uno de sus componentes el MTSK (Carrillo et al., 2014), que caracteriza el conocimiento del profesorado de Matemáticas a partir de dos dominios: matemático y didáctico, que se complementan con las creencias y concepciones sobre las Matemáticas. Para este estudio, interesa profundizar en el primero, puesto que interesa un conocimiento matemático particular del profesorado en pre-servicio: el geométrico. El dominio del conocimiento matemático se comprende como “el conocimiento que tiene el profesor de las Matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar” (Escudero-Ávila et al., 2015, p. 71), que es importante para garantizar que el profesorado cuente con las herramientas necesarias para implementar las estrategias didácticas que pretenden el aprendizaje significativo en el estudiantado. Para este estudio se acentúa el conocimiento de los temas (Carrillo, et al., 2014), que enfatiza los contenidos de las Matemáticas escolares tradicionalmente considerados en el área temática de Geometría del currículo XXX, como es el caso de las figuras geométricas planas.

El modelo teórico de Van Hiele

Gutiérrez y Jaime (1991) destacan dos intenciones del modelo de Van Hiele: explicar la manera en que evoluciona el razonamiento geométrico del estudiantado, y determinar insumos para que el profesorado contribuya al mejoramiento de la calidad de ese razonamiento. En nuestro caso, destacamos este segundo propósito, de manera que los resultados del estudio permitan la definición de indicadores sobre el pensamiento geométrico de los docentes de Matemáticas en pre-servicio participantes.

El modelo presenta cinco niveles de pensamiento geométrico que se definen a partir de una serie de propiedades que los caracterizan (Gutiérrez y Jaime, 1991; Fouz, 2005).

Nivel 0. Visualización o reconocimiento. En este nivel el estudiante es capaz de mostrar tres características: percepción de objetos como un todo (N0.1); descripción del aspecto físico de los objetos, sin la presencia de lenguaje geométrico básico (N0.2); y, falta de reconocimiento explícito de los componentes y propiedades de los objetos (N0.3).

Nivel 1. Análisis. Al estudiante en el nivel de análisis se le suelen atribuir tres características: percepción de los componentes y las propiedades de los objetos y figuras, sin llegar a la identificación de relaciones entre estas propiedades o con otras figuras (N1.1); descripción de propiedades de las figuras sin llegar a una clasificación lógica de estas (N1.2); establecimiento de propiedades de las figuras u objetos a partir de la experimentación (N1.3).

Nivel 2. Ordenación y clasificación. El estudiante en este nivel de pensamiento geométrico presenta cuatro características: clasifica lógicamente los objetos y figuras, y establece nuevas relaciones o propiedades conocidas desde un razonamiento informal (N2.1); describe las figuras y los objetos formalmente, basado en las definiciones y las condiciones de estas (N2.2); comprende cada uno de los pasos de una demostración o razonamiento lógico, sin alcanzar la comprensión de estos como componentes de un todo (N2.3); y, carece del razonamiento lógico formal que posibilita la comprensión de la estructura axiomática de las Matemáticas (N2.4).

Nivel 3. Deducción formal. En este nivel, el estudiante muestra características próximas al razonamiento lógico matemático: realiza razonamientos lógicos formales (N3.1); comprende las Matemáticas como una estructura axiomática (N3.2); y, es consciente de la posibilidad de obtener un mismo resultado desde diversas premisas (N3.3).

Nivel 4. Rigor. En este nivel, el estudiante: conoce, analiza y compara distintos sistemas axiomáticos (N4.1); y, manipula la geometría desde la abstracción, sin necesidad de recursos o representaciones concretas (N4.2).

Al igual que Gutiérrez y Jaime (1991) y Fouz (2005), centramos nuestra atención en los primeros cuatro niveles, ya que los docentes participantes se encuentran en un proceso de formación inicial, por lo que se podría carecer de información propia del nivel de rigor. Para efectos metodológicos, los niveles mostrados han sido considerados como las categorías de análisis y las características, que se destacan en estos, constituyen las unidades de estudio para el análisis de la información.

Metodología

El estudio se ubica dentro de las investigaciones cualitativas descriptivas que buscan comprender, interpretar y describir el conocimiento de un grupo de docentes de Matemáticas en pre-servicio cuando resuelven tareas sobre triángulos o cuadriláteros, desde la perspectiva del pensamiento geométrico propuesta en el modelo de Van Hiele. Consiste en un estudio intrínseco de casos (Sandín, 2003 p. 176). Con la investigación se pone de manifiesto parte del pensamiento geométrico que este grupo de participantes expresa al resolver tareas, de manera que se genere evidencia sobre el conocimiento matemático que han desarrollado hasta el momento, con el propósito de tomar decisiones sobre el proceso de formación.

Recolección de la información

Las personas participantes fueron 31 estudiantes de tercer nivel de la carrera BLEM (identificados como PF). Estas formaban parte de los dos grupos definidos para la asignatura *MAC414 Didáctica de la Geometría* (15 estudiantes del grupo 01 y 16 estudiantes del grupo 02), a cargo de los autores de este estudio, y manifestaron su disposición y anuencia a que la información que aportaran se utilizara para fines investigativos. La información se recolectó mediante un instrumento, como prueba diagnóstica, elaborado a partir de cuatro ítems de selección única, sobre el tema de figuras geométricas planas, tomados de la adaptación de Fouz (2005) del *Van Hiele Geometry Test* (Usiskin, 1982). Estos ítems fueron complementados con un ítem adicional de respuesta breve para que la persona informante justificara la elección realizada en cada uno de estos.

Ítem 1. El primero de los ítems plantea la identificación de cuadrados en una serie de figuras planas, vinculado al nivel de visualización o reconocimiento de objetos del Modelo de Van Hiele (Nivel 0). *Ítem 2*. El segundo ítem corresponde a la percepción de determinadas propiedades del rombo. Este está relacionado con el nivel de análisis del Modelo de Van Hiele (Nivel 1). *Ítem 3*. Para este ítem la persona participante debía considerar condiciones necesarias y suficientes en las premisas que permitieran la selección de la opción correcta. Este ítem se asocia al nivel de ordenación y clasificación del Modelo de Van Hiele (Nivel 2). *Ítem 4*. Aquí se requiere de razonamientos lógicos y formales con los que se justifique la selección de la opción correcta. Este ítem se asocia al nivel de deducción formal del Modelo de Van Hiele (Nivel 3). La elección de los cuatro ítems de selección única obedeció a su ligamen con los primeros cuatro niveles de pensamiento geométrico del Modelo de Van Hiele y su aproximación con el planteamiento curricular para la enseñanza de la geometría en Costa Rica. El instrumento se aplicó como parte de las estrategias implementadas en la asignatura *MAC414 Didáctica de la Geometría* para la evaluación diagnóstica del estudiantado. Este se incluyó en la plataforma Moodle de la UNA asociada a la asignatura. Las personas informantes tuvieron un tiempo límite de 1 hora para su completación en un momento específico de la clase (el mismo en los dos grupos).

Análisis de la información y resultados

La información fue analizada mediante la técnica del análisis de contenido, a partir de categorías correspondientes a los cuatro primeros niveles del Modelo de Van Hiele: visualización, análisis, ordenación y deducción formal. Las características que describen cada nivel constituyeron las unidades de análisis, que sustentan los resultados mostrados en esta contribución; estas unidades de análisis se detallan usando los códigos asignados en el marco teórico.

Categoría 1. Visualización del cuadrado en un grupo de cuadriláteros

Las resoluciones del ítem 1 permiten reconocer en los profesores en pre-servicio un destacado nivel de visualización. Resalta que 21 participantes acertaron la respuesta del ítem. No obstante, los argumentos para esta selección muestran una variedad de criterios y conocimientos que los alejan de un Nivel 0 de visualización, asociado al razonamiento geométrico. Particularmente, solo PF19 percibe el cuadrado como un todo (unidad de análisis N0.1). Su argumento señala: “si hablamos de figuras planas la G [una de las figuras] es la que parece que representa un cuadrado desde esa perspectiva”. La selección desestima el reconocimiento de propiedades del cuadrado y el uso de lenguaje geométrico básico para describirlo (N0.2 y N0.3). Por otra parte, PF16, PF24 y PF29 acentúan la necesidad de más información precisa en las figuras para asegurar su selección, que sustentan a través de la comparación entre las figuras y las propiedades que definen a un cuadrado. Como tercer caso, sobresalen los argumentos errados de tres participantes, que distan de una comprensión correcta de la definición de un cuadrado. Por ejemplo, “Un triángulo equilátero es equiángulo”, “…un cuadrado es un paralelogramo con todos los lados con igual medida”, “todo rectángulo es cuadrado y tienen sus ángulos opuestos de 90”. Por último, 14 participantes identificaron el cuadrado a partir de la descripción de los componentes o propiedades que lo definen (N1.1). Así, se aprecia que el reconocimiento del objeto incluye la descripción explícita de la definición de un cuadrado: paralelogramo cuyos lados son congruentes y al menos un ángulo interno es recto. Esto evidencia el uso de un razonamiento mayor al Nivel 0 para la visualización de figuras geométricas. Ahora, conviene analizar las respuestas consideradas incorrectas para el ítem 1. Diez participantes indicaron que ninguna de las figuras correspondía a un cuadrado. De estos, ocho subrayan en sus argumentos el incumplimiento de propiedades necesarias para la definición de un cuadrado, debido a la falta de precisión en la información mostrada en las figuras. Por ejemplo, PF21 indica: “A pesar de que la [figura] G parece cumplir con las características de un cuadrado, no se puede asegurar a simple vista que los ángulos entre los lados consecutivos sean rectos”. También, es destacable que los argumentos de dos participantes muestran errores conceptuales o de observación al momento de analizar las figuras. Por ejemplo, PF7 destaca que “solamente la figura F tiene ángulos internos rectos, sin embargo, no cumple que sus lados adyacentes tengan la misma medida”. Aquí, la posición no tradicional con la que se presenta el cuadrado impide el reconocimiento de los ángulos rectos en este. El análisis de las respuestas asociadas al ítem 1, deja ver un nivel de razonamiento geométrico superior a la visualización y el reconocimiento básico de figuras geométricas planas.

Categoría 2. Análisis de propiedades de un rombo

Para el ítem 2, 28 participantes seleccionaron la opción correcta. En sus argumentos se identifican características propias del Nivel 1 de análisis y otras particularidades. Primero, los argumentos mostrados por PF1, PF3, PF9, PF11, PF14, PF21, PF24 y PF26 reconocen en los rombos la diferencia de medida entre sus diagonales como una de sus propiedades, esto como argumento para elegir la opción correcta. En este sentido, la característica de las diagonales no se relaciona con otras propiedades (N1.1), ni se complementa con otras condiciones necesarias que definen el rombo (N1.2). No obstante, el hecho de que hayan elegido la opción correcta también permite interpretar que existe conocimiento sobre las otras propiedades del rombo mostradas en las opciones B, C y D del ítem 2. Por ejemplo, PF24 detalla: “las diagonales no necesariamente son de la misma medida, todas las demás [afirmaciones] son ciertas”. Segundo, en el caso de PF25, su argumento destaca propiedades del rombo a partir de la experimentación (N1.3): “en la primera figura se muestra un rombo lo cual si trazamos las diagonales se puede determinar que ellas no tienen la misma longitud”. Y, tercero, dos participantes no aportan argumento y uno justifica la selección con una explicación que no siempre es correcta: “Si las dos diagonales tienen la misma longitud este no sería un rombo, porque posee una diagonal mayor y una menor”.

Además, destaca que 16 argumentos quedan fuera de la clasificación de un Nivel 1 de análisis: los argumentos de PF8 y PF16 se caracterizan desde el Nivel 0 de visualización (N0.1, identifican el rombo como un todo), y 14 argumentos se interpretan desde un nivel mayor de razonamiento geométrico, pues además de señalar propiedades del objeto en estudio en el ítem destacan relaciones con otras propiedades o figuras, como el cuadrado (N2.1). Por último, las respuestas incorrectas muestran una falta en la comprensión del enunciado del ítem, un desconocimiento de las propiedades del rombo o una errónea interpretación de estas, por parte de estas tres personas participantes. Sus argumentos son: “porque pueden que se cumpla para algún tipo de rombo”, “me parece confusa la pregunta y las respuestas, pero considero que todas las afirmaciones son correctas”, y “sinceramente no recordaría como justificarlo”. Este análisis evidencia fortalezas en el profesorado participante. Si bien sus respuestas son en su mayoría correctas, sus justificaciones van más allá de un reconocimiento de propiedades y trascienden a la identificación y establecimiento de relaciones entre figuras geométricas, que son características propias del nivel de ordenación y clasificación.

Categoría 3. Clasificación de un triángulo según sus dimensiones

Las resoluciones al ítem 3 destacan del profesorado en pre-servicio un acercamiento sobresaliente al Nivel 2 de ordenación y clasificación, particularmente en cuanto al dominio de definiciones y propiedades vinculadas a conceptos geométricos asociados al ítem. Destaca que 28 participantes responden de forma correcta al ítem, al discriminar entre las opciones presentadas y justificar su elección. Para la unidad de análisis N2.2 de este nivel, una mayoría de participantes (16) refiere a descripciones formales de los triángulos tratados en el ítem, mediante argumentaciones basadas en definiciones y propiedades de estos. Particularmente, relacionan las medidas de los lados del triángulo con las medidas de los ángulos opuestos a estos lados; esto les permite hacer inferencias en cuanto a las afirmaciones mostradas en el ítem. Como tercer caso, ocho participantes justifican su resolución a través de la exposición y explicación de pasos relacionados con procesos demostrativos, sin dejar evidencia de una demostración completa al ítem (N2.3). Participantes como PF7, PF18, PF28 y PF29 indican de manera explícita, en la justificación mostrada, el teorema que le permitió resolver el ítem. Otros refieren al teorema u otros resultados sin precisar su enunciado. Por último, la respuesta proporcionada por PF5 manifiesta una carencia de razonamiento lógico formal: "porque el triángulo equilátero es un caso particular de un triángulo isósceles" (N2.4). Debe indicarse que tres personas participantes argumentan su procedimiento desde afirmaciones inconsistentes, erradas y con poca claridad.

Por ejemplo, se indica: (1) "los lados de un triángulo pueden ser congruentes más no iguales y también un ángulo está formado por 3 puntos, se puede sobreentender que el ángulo B es el ángulo con vértice B pero el ángulo como tal es el ángulo ABC o CBA", (2) "como la segunda preposición [sic.] dice dos ángulos del triángulo son iguales no restringe [a que] el tercero no lo sea entonces se podría considerar un triángulo equilátero donde los tres lados y los tres ángulos son congruentes pero solo mencionar dos ángulos y así se podrían considerar las dos preposiciones [sic.] verdaderas" y (3) "la relación de los lados y ángulos de un triángulo equilátero no es condicional sino bicondicional por esto no es posible ninguna de las opciones anteriores".

En síntesis, se identifica que una gran parte del profesorado participante muestra un conocimiento y comprensión destacables de la definición y las propiedades de objetos geométricos - particularmente el incluido en el ítem 3 - que les posibilita su clasificación y el reconocimiento de condiciones necesarias para asignar valores de verdad a distintas afirmaciones sobre estos. Además, algunas aportaciones trascienden las características del Nivel 2 sobre ordenación y clasificación, y se aproximan a las deducciones formales que describen el Nivel 3.

Categoría 4. Deducciones sobre el rectángulo y sus diagonales

A partir de esta categoría, se reconoce un acercamiento al razonamiento lógico matemático de la mayoría de las personas participantes al momento de resolver el ítem 4: 23 profesores señalan la respuesta correcta al ítem; sin embargo, la validez de los argumentos mostrados en las justificaciones es diversa. Puntualmente, las justificaciones de 17 participantes evidencian razonamientos lógicos formales asociados a las unidades de análisis N3.1 y N3.2, puesto que determinan condiciones necesarias y suficientes para establecer el valor de verdad de las proposiciones indicadas en el ítem 4, o incluyen sugerencias que describen a las matemáticas como una estructura axiomática. Tanto PF5 como PF16 utilizan un razonamiento lógico para justificar su elección de opción correcta en el ítem (N3.1). Además, acentúan el uso de contraejemplos - basados en resultados o propiedades preliminares - como una estrategia para determinar el valor de verdad de las proposiciones (estrategia de demostración) (N3.2). Dentro de este mismo marco, vale la pena destacar que algunos de los argumentos mostrados son insuficientes o presentan algunos errores conceptuales. Por ejemplo, PF17 justifica su respuesta afirmando: "Considerando un rombo, sus diagonales se bisecan, sin embargo, no corresponde a un rectángulo". En este caso, el docente - al igual que PF18, PF25 y PF27 - omite acentuar la necesidad de que el rombo no sea cuadrado, pues esto haría verdadera la segunda proposición.

Por otra parte, PF3, PF9, PF12, PF24 y PF28 seleccionaron la opción correcta, pero aportaron dentro de su justificación afirmaciones incorrectas o argumentos incompletos para la situación planteada en el ítem; en el caso de PF30 no aportó justificación. Por último, ocho participantes seleccionaron alguna de las opciones incorrectas. De estas personas, destaca que el argumento de PF6 - a pesar de no ser el más completo - muestra rasgos de un razonamiento lógico basado en el conocimiento de propiedades geométricas sobre los cuadriláteros. Las restantes siete personas aportan una justificación incorrecta o no responden. En resumen, la mayoría de las personas participantes manifiestan características sobre la deducción formal en Matemáticas, fundamentada en los razonamientos lógicos y los indicios de procesos demostrativos expuestos. Algunas limitaciones identificadas responden a la falta de especificidad al momento de indicar propiedades de las figuras geométricas como componentes de un proceso demostrativo.

Conclusiones

Del estudio llevado a cabo, sobresale que las justificaciones hechas en los ítems 1, 2 y 3 corresponden a la elección de la respuesta correcta en estos. Pero, las justificaciones mostradas en el ítem 4 destacan por la falta de correspondencia con la opción seleccionada, por la debilidad del fundamento matemático mostrado y por la presencia de errores conceptuales. De esta manera, se evidencia en este profesorado en pre-servicio una fortaleza en el desarrollo de las capacidades de visualización, análisis y ordenación. Respecto al nivel de visualización o reconocimiento se establecen los siguientes indicadores: (a) se perciben los objetos geométricos como un todo, (b) el reconocimiento de la figura geométrica se acompaña de lenguaje geométrico básico, y (c) los objetos geométricos se reconocen a partir de los componentes y propiedades que los definen.

Para el nivel de análisis, el razonamiento geométrico de los docentes se caracteriza por: (a) la percepción de los componentes y propiedades de figuras geométricas, y la relación entre estas o con otras figuras, y (b) la descripción y establecimiento de propiedades de las figuras geométricas, a partir de la experimentación. En el nivel de ordenación y clasificación, se determinan los siguientes indicadores: (a) las figuras geométricas se clasifican desde una fundamentación lógica, (b) la descripción de figuras geométricas se realiza a partir de definiciones y las condiciones implícitas en estas, y (c) el razonamiento lógico matemático mostrado es próximo a la comprensión de la estructura axiomática de las Matemáticas. Y, en los ítems correspondientes a la visualización o el reconocimiento, al análisis y a la ordenación o clasificación, las justificaciones mostradas trascienden las características de estos niveles; esto es, que además de manifestar características propias del nivel, se reconocen otras asociadas a niveles superiores. De forma complementaria, el enunciado y el grado de abstracción de las tareas inciden en una mayor presencia de errores matemáticos en las resoluciones hechas por las personas participantes del estudio. Con especificidad, se considera que la falta de precisión en los elementos de las figuras mostradas en el enunciado del ítem 1, condujo a errores de interpretación de las figuras y por consecuencia en la selección de la opción considerada correcta. Por su parte, los errores que se manifiestan en el ítem 4 se asocian a la abstracción matemática, que es característica del nivel de deducción formal propuesto en el Modelo de Van Hiele. Finalmente, se sugiere que los procesos de formación profesional de docentes de Matemáticas acentúen el fortalecimiento de la competencia matemática a partir de la aplicación del significado (o significados) y las propiedades de conceptos geométricos básicos, de la identificación de condiciones suficientes para argumentar los razonamientos realizados en una demostración matemática, y de la comprensión de las Matemáticas como una estructura axiomática.

Referencias y bibliografía

Afonso, M. C. (2003*). Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.

Aguayo, C. G. (2018*). El Análisis Didáctico en la formación inicial de maestros de primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Caraballo, R. M. (2014). *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas: Una experiencia con profesores.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. & Montes, M. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Ediciones Bonanza.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. & Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. PNA, 10(1), 53-77. DOI: https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095

Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. En R. Ibáñez y M. Macho, *Un paseo por la geometría 2004/2005* (pp. 67-81). Universidad del País Vasco.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*, 3(2), 49-65. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol3/vol3-2/vol3-2-5.pdf

Lupiáñez, J. L. (2014). Competencias del profesor de educación primaria. *Educação & Realidade*, 39(4), 1089-1111. https://seer.ufrgs.br/index.php/educacaoerealidade/article/view/45875

Proenza, Y. & Leyva, L. M. (2008). Aprendizaje desarrollador en la matemática: estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. *Revista Iberoamericana de Educación*, 48(1), 1-15. DOI: https://doi.org/10.35362/rie4812249

Rico, L. (1997). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. *Síntesis*.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista* SUMA, 58, 7-23. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/58/007-023.pdf

Sáenz, E., Patiño, M. & Robles, J. (2017). Desarrollo de las competencias matemáticas en el pensamiento geométrico, a través del método heurístico de Polya. *Panorama*, 11(21), 61-74. ahttps://doi.org/10.15765/pnrm.v11i21.1055

Sandín, M. P. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación*. Fundamentos y Tradiciones. McGraw Hill.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículo*. Morata.

Universidad Nacional [UNA] (2017). *Plan de estudios de la Carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática*. https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/oferta-academica/bach-lic-ensenanza-de-la-matematica/documentacion-digital/category/8-plan-blem-2017

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in Secondary School Geometry*. University of Chicago.

Valverde, G., Araya, A. & Picado, M. (2020). Programas de formación inicial de docentes de matemáticas en Costa Rica: la perspectiva de la Universidad Pública. En H. de García, D. dos Santos y M. Malatempi (Coords.), *Formação inicial de professores de matemática em diversos países* (pp. 89-113). São Paulo: Editora Livraria da Física.