Comportamento de trajetórias no plano de fases: Uma discussão com calculadora gráfica

Franciele Santos **Teixeira**
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Brasil
fs.teixeira@unesp.br
Sueli Liberatti **Javaroni**
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Brasil
sueli.javaroni@unesp.br
Maria Teresa **Zampieri**
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Brasil
mt.zampieri@unesp.br
Mariana Matulovic da Silva **Rodrigueiro**
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Brasil
mariana.matulovic@unesp.br

Resumo

Neste artigo apresentamos uma discussão desenvolvida com graduandos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus Rio Claro, acerca da trajetória da solução de um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) no plano de fases. Ao conceber esse estudo, discutimos a visualização destas trajetórias com calculadora gráfica e fizemos o movimento de análise qualitativa do que era exibido no visor deste artefato. Como resultados, ressaltamos a importância de abordar diferentes maneiras de discutir com os futuros professores de Matemática sobre análise qualitativa de sistemas de EDO e como a visualização auxiliou os graduandos a interpretarem as soluções obtidas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, Ensino Superior, Experimentação-com-Tecnologias, Formação Inicial.

Definição e relevância do problema

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) são fundamentais para descrever fenômenos dinâmicos do cotidiano. Elas permitem modelar processos que envolvem variação contínua no tempo ou no espaço, oferecendo uma base rigorosa para a compreensão e previsão de diversas situações do cotidiano, tais como: um objeto em queda, crescimento exponencial de bactérias etc. Além disso, servem como base para métodos numéricos e técnicas de solução aproximada, sendo importantes para diversos ramos da Matemática aplicada (Boyce, Diprima & Meade, 2020). As EDO são também caracterizadas por construção de modelos, em que "muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Representadas em linguagem matemática, as relações são equações, e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais" (Boyce, Diprima & Meade, 2020, p. 1,). Podemos ressaltar que ao buscarmos uma dada solução de uma equação diferencial, "procuramos identificar um ou mais valores reais que satisfaça a equação. Porém, quando queremos 'resolver' uma EDO estamos 'construindo' uma função que venha satisfazer a equação diferencial dada" (Javaroni, 2007, p. 30, grifo da autora). Dessa maneira, é necessário perceber que para encontrar a solução de uma equação diferencial, isto é, uma família de funções apropriada, é preciso associar que os problemas e modelos são diferentes e que o processo de modelagem não pode ser reduzido a uma simples lista de regras (Javaroni, 2007; Boyce, Diprima & Meade, 2020).

Considerando a busca pelas soluções das EDO, nos centramos naquelas em que não há possibilidade de ter uma resposta analítica, ou seja, as funções que são soluções para as equações diferenciais não possuem uma forma explícita. Quando esses casos ocorrem, precisamos procurar outras maneiras de interpretar e observar o comportamento das soluções e isso muitas vezes é feito sem resolver, efetivamente, as equações (Boyce, Diprima & Meade, 2020). Dessa maneira, podemos analisar, por exemplo, a estabilidade das soluções de modo qualitativo por meio do plano de fases da solução encontrada. O plano de fases consiste em uma representação gráfica utilizada para analisar qualitativamente o comportamento de soluções de sistemas de EDO, especialmente em sistemas bidimensionais. Embora a criação de retratos de fase precisos, do ponto de vista quantitativo, necessite de auxílio computacional, é possível, em geral, esboçar retratos de fase à mão que são precisos do ponto de vista qualitativo e podem ser utilizados para esse fim (Boyce, Diprima & Meade). A análise do plano de fases de um sistema de EDO é feita a partir dos autovalores e autovetores da matriz associada e esse movimento é realizado de modo a identificar a estabilidade da solução e seu comportamento, que pode ser classificado em: nó, espiral, ponto de sela, entre outros. Uma das possibilidades para que as trajetórias no plano de fases sejam investigadas é com o uso das tecnologias digitais, considerando aspectos de exploração e visualização por meio da mídia.

Em vista disso, a partir de algumas noções de EDO e experimentação-com-tecnologias, desenvolvemos um estudo com discentes do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp), no campus de Rio Claro, São Paulo. Nesse estudo, os educandos foram convidados a discutir, em grupos, algumas questões presentes numa folha de atividade, usando a calculadora gráfica. Com esse movimento, buscamos abordar o seguinte questionamento: o que emerge das interpretações e discussões com estudantes sobre exploração das trajetórias no plano de fases com calculadora gráfica?

Ressaltamos ainda que este trabalho está vinculado ao projeto "Ensino e aprendizagem de Matemática: possibilidades para a prática do professor"[1], que é uma parceria entre membros do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e a Casio Brasil Comércio de Produtos Eletrônicos Ltda, com gerenciamento administrativo da Fundação para o Desenvolvimento da Unesp (Fundunesp).

Referencial Teórico

Para abordar o uso da tecnologia digital, mais especificamente a calculadora gráfica, nos baseamos na experimentação-com-tecnologias. A experimentação-com-tecnologias pode ser entendida como a integração das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem para um estudo conceitual ou exploração matemática, de modo que o discente seja convidado a pensar com a mídia (Borba & Villarreal, 2005). Esse pensar com a tecnologia está atrelado a possibilitar que o estudante crie conjecturas e teste hipóteses com o artefato e, para além disso, o conhecimento que pode ser produzido nesse movimento é qualitativamente diferente do que o produzido com outras tecnologias, como por exemplo, o lápis e o papel (Borba & Villarreal, 2005). Outro aspecto considerado é a visualização, pois a partir dela associações e interpretações podem ser criadas, relacionando tanto o produto e a imagem visual em si quanto o processo e a atividade do "ver" (Arcavi, 2003).

Dessa maneira, a experimentação-com-tecnologias, conforme discutida por Borba & Villarreal (2005), potencializa a visualização gráfica ao permitir interações dinâmicas com representações matemáticas. Softwares e demais artefatos digitais possibilitam a manipulação de objetos matemáticos em tempo real, favorecendo a compreensão de conceitos abstratos. Essa abordagem está alinhada à visão de Arcavi (20003) sobre a visualização, que destaca seu papel essencial na construção do significado matemático. As tecnologias ampliam esse potencial da visualização ao oferecer múltiplas representações e simulações, possibilitando maneiras para que o aprendizado seja mais intuitivo. Portanto, entendemos a experimentação-com-tecnologias (Borba & Villarreal, 2005) expande as possibilidades da visualização matemática no ensino, particularmente no ensino de EDO, quando queremos fazer um estudo qualitativo de equações que nem sempre apresentam uma solução que dê para ser representada analiticamente de forma explícita.

Desenvolvimento metodológico e conceitual

A pesquisa abordada neste artigo foi desenvolvida ao longo do segundo semestre de 2022, em que a primeira autora foi monitora da disciplina de EDO na Unesp, campus Rio Claro. Durante o semestre, em parceria com o professor da disciplina, foi possível delimitar e elaborar uma oficina com calculadora gráfica com os graduandos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da universidade. Para o processo de elaboração, levamos em consideração as anotações do diário do campo da pesquisadora, colocações do professor da turma referente às dificuldades dos estudantes e as respostas registradas nas provas dos discentes. Dessa maneira, ao delimitar a oficina buscamos trabalhar colaborativamente com o professor responsável.

[1] O projeto foi aprovado no processo nº 3221/2021 – CCP – FUNDUNESP.

Uma das dificuldades dos estudantes relatada pelo docente da disciplina foi a visualização das trajetórias das soluções das EDO no plano de fases e a partir disso foi sugerido que tal conteúdo fosse discutido com a calculadora gráfica. Ressaltamos que a atividade desenvolvida na oficina foi computada como parte da nota final dos discentes a pedido do professor, portanto, fomos responsáveis por elaborar em conjunto com o docente um plano de aula[2] e corrigir os apontamentos feitos pelos estudantes na folha de atividades[3] disponibilizada.

Projetamos uma oficina para ser desenvolvida em duas etapas no contraturno da aula de EDO, ou seja, no período da tarde e com horário combinado com os estudantes. A oficina teve duração de quatro horas, em que na primeira parte da atividade abordamos algumas propriedades de matrizes e integral, além da interpretação de um sistema de equações diferenciais com valores dados, e a segunda para discutir a trajetória no plano de fases do sistema representado na Figura 1. Entendemos que o movimento de dividir em etapas foi importante para que os estudantes pudessem se habituar com os recursos presentes na calculadora gráfica, utilizados ao longo da atividade.

Neste texto focaremos nas discussões feitas pelos estudantes ao analisar o sistema de equações diferenciais, presente na Figura 1, considerando a variação de uma das entradas da matriz do sistema linear homogêneo. Os dados tratados neste texto são oriundos do registro do diário de campo, folha de atividade respondida pelos discentes e arquivos salvos da calculadora gráfica.

$$X' = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X$$

Figura 1. Sistema homogêneo discutido com os estudantes (Boyce, Diprima & Meade, 2020).

A partir do sistema de equações diferenciais, os seguintes questionamentos foram feitos: “descreva como as soluções dependem qualitativamente de α; qual é o comportamento das trajetórias no plano de fases” (Dados de pesquisa, 2022). Destacamos que esse exercício foi retirado do livro de Boyce, Diprima & Meade (2020) e isso foi algo comentado com os graduandos. Os estudantes estavam habituados a fazer exercícios presentes no livro, entretanto buscamos abordar com eles uma outra maneira de desenvolver as propostas presentes no material didático utilizado pelo professor, que comumente eram resolvidas utilizando lápis e papel. Antes de discorrermos sobre algumas discussões feitas pelos graduandos, julgamos pertinente apresentar mais detalhadamente as funcionalidades da calculadora gráfica utilizadas durante a oficina, a saber: “Exe-Matriz” e “KhiCas”.

O modelo da calculadora utilizada para o desenvolvimento da atividade foi a fx-CG50. Essa calculadora possui 24 aplicativos em sua interface, sendo um deles o “Exe-Matriz”, que possibilita que outros sejam baixados em sua memória, como no caso do “KhiCas”.

---

[2] https://drive.google.com/file/d/1oID-t33JdPLILFN-36JBtq0GTForK7fE/view?usp=sharing - Acessado em: 15 fev. 2025

[3] https://drive.google.com/file/d/1h58CZzM2EUbxQx3zkbqIUvF6yWlAgQo4/view?usp=sharing - Acessado em: 15 fev. 2025

Na funcionalidade “Exe-Matriz” há a possibilidade de trabalhar com derivada, integral, matriz, vetores, entre outros. Dentro deste recurso é possível resolver uma integral, entretanto é retornado apenas o resultado, ou seja, conseguimos desenvolver apenas integrais definidas. Quando se tem o intuito de manipular variáveis, podemos recorrer à funcionalidade “KhiCas”.

O KhiCas é uma versão de software de um sistema de álgebra operacional para alguns modelos de calculadoras, entre eles o utilizado na oficina, que pode ser instalado como uma funcionalidade na fx-CG50. A partir dessa funcionalidade é possível realizar cálculos de modo que incógnitas e variáveis sejam entendidas como tal. Por exemplo, se calcularmos $\frac{d\,(x^2)}{dx}$, obteremos como resposta 2x, enquanto que se a mesma operação for realizada na funcionalidade “Exe-Matriz”, sem definir o ponto x a ser calculado, aparece no visor da calculadora um erro de sintaxe.

Salientamos que as duas funcionalidades foram utilizadas em momentos distintos com os graduandos: a funcionalidade Exe-Matriz para observar algumas propriedades e discutir uma forma de demonstrar que uma afirmação é falsa - pensando em contra exemplos e a funcionalidade KhiCas para trabalhar o campo de direções de soluções.

Para iniciar a discussão, disponibilizamos para os estudantes um tutorial referente às funcionalidades “Exe-Matriz” e “KhiCas”. Para a abordagem envolvendo propriedades de integral e matrizes, questionamos os estudantes se a integral do produto é o produto das integrais e se a multiplicação de matrizes é comutativa, de modo a justificarem o porquê da conclusão obtida. Essas indagações foram feitas, pois ao discutir com o professor da disciplina e observar as respostas nas avaliações que os estudantes fizeram, eles haviam assumido a veracidade de tais propriedades para a resolução de exercícios. Dessa forma, buscamos abordar como poderíamos verificar se as afirmações eram verdade, culminando na demonstração por contra exemplo.

Após as reflexões sobre propriedades de integrais e matrizes, os graduandos foram convidados a refletir para além dos cálculos que já estavam habituados a fazer ao solucionar os exercícios nas aulas. Para dar início a esse movimento, determinamos a matriz de Jordan, autovalores e autovetores, associados a matriz A referente ao sistema X = AX, diretamente na calculadora gráfica, conforme observamos na Figura 2:

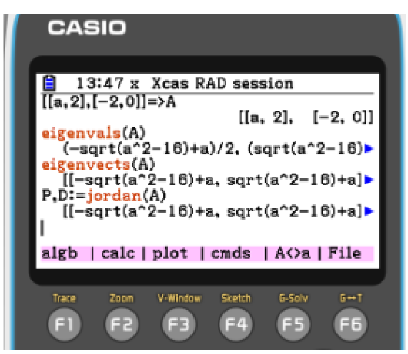
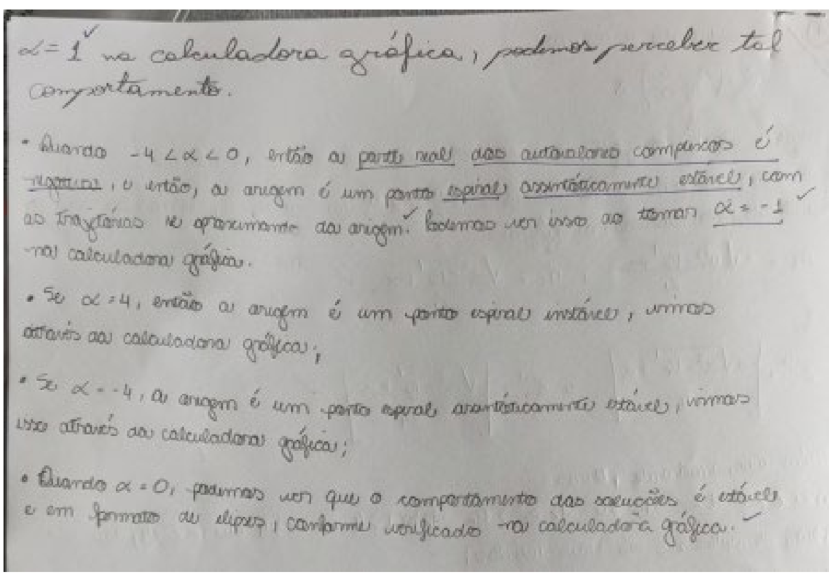


Figura 2. Interface do ambiente "KhiCas"na calculadora gráfica (Dados de pesquisa).

Ou seja, na Figura 2 fizemos o procedimento de definir a matriz A, em seguida calculamos os autovalores (eigenvals) para então calcularmos os autovetores (eigenvects) e por fim a matriz P e D[4]. Com esses dados em mãos, para o primeiro questionamento que envolvia a análise qualitativa da solução, os estudantes precisaram interpretar o que acontecia com as raízes advindas do cálculo dos autovalores da matriz e esse processo também foi feito utilizando a calculadora.

Para observar o que ocorria no sistema de EDO e como ficaria seu campo de direções, discutimos sobre $\sqrt{\propto^2 - 16}$. Para essa etapa, convidamos os estudantes a analisar primeiro o cálculo e indicar o que pensavam que acontecia, baseando-se no que haviam visto ao longo das aulas. Em seguida, foram indagados sobre o que significava falar que o comportamento das trajetórias seria um nó assintoticamente estável, um nó instável e assim por diante e como poderíamos relacionar isso a variação de α.

Ao longo do desenvolvimento da oficina, focamos em discutir as interpretações feitas pelos estudantes no sistema de equações, representado na Figura 1, e identificar que, apesar de estarem com a mesma proposta de atividade, as respostas foram dadas de maneiras diferentes. Isto é, alguns graduandos optaram por representar o desenho visto na calculadora e outros focaram nos números testados para cada um dos intervalos obtidos para a interpretação dos autovalores e autovetores da matriz, que dependiam de α. Na Figura 3 podemos observar uma análise feita da trajetória do plano de fases por um dos grupos, em que eles apontam alguns valores para α e indicam que a interpretação foi obtida a partir da calculadora gráfica.


$\alpha = 1$ na calculadora gráfica, podemos perceber tal comportamento.

• Quando $-4 < \alpha < 0$, então a parte real dos autovalores complexos é negativa, e então, a origem é um ponto espiral assintoticamente estável, com as trajetórias se aproximando da origem. Podemos ver isso ao tomar $\alpha = -1$ na calculadora gráfica.

• Se $\alpha = 4$, então a origem é um ponto espiral instável, vimos através da calculadora gráfica;

• Se $\alpha = -4$, a origem é um ponto espiral assintoticamente estável, vimos isso através da calculadora gráfica;

• Quando $\alpha = 0$, podemos ver que o comportamento das soluções é estável e em formato de elipse, conforme verificado na calculadora gráfica.

Figura 3. Recorte da análise do grupo e interpretações para a variação de α (Dados de pesquisa).

O grupo que fez a discussão presente na Figura 3 optou por testar mais valores além de α = 4 e α = −4, ressaltando que havia algumas trajetórias que aparentavam ser "mais rápidas" e outras "mais lentas". Esse aspecto foi discutido, pois indagamos se tais afirmações fariam sentido ao

[4] Nesse processo efetuamos cálculos de modo que P-1AP = D, em que dizemos que a matriz A é semelhante a matriz D ou que a matriz A é diagonalizável.

pensarmos na trajetória do plano de fases. Além disso, o apontamento feito pelo grupo, presente na Figura 3, sobre explicarem que a solução foi observada a partir do que foi exibido no visor da calculadora gráfica, foi algo geral nas respostas da turma. Portanto, salientamos as interpretações feitas por meio da visualização (Arcavi, 2003; Borba & Villarreal, 2005), ou seja, salientamos que os estudantes testaram outros valores para α com a calculadora, podendo observar e criar hipóteses do que viam em seu visor.

A fim de que os estudantes criassem conjecturas observando o que ocorria com o plano de fases, pedimos para que, utilizando alguns comandos presentes no tutorial, gerassem o campo de direções na calculadora e explicitassem o que viam. Esse movimento foi associado com as justificativas dos estudantes ao que era visualizado e com o que tinham visto na teoria. Por exemplo, se $\alpha = 4$ então a origem é um ponto espiral. Na Figura 4 a seguir, exibimos o visor da calculadora com os campos de direções para $\alpha = 4$, $\alpha = -4$ e $\alpha = 0$.

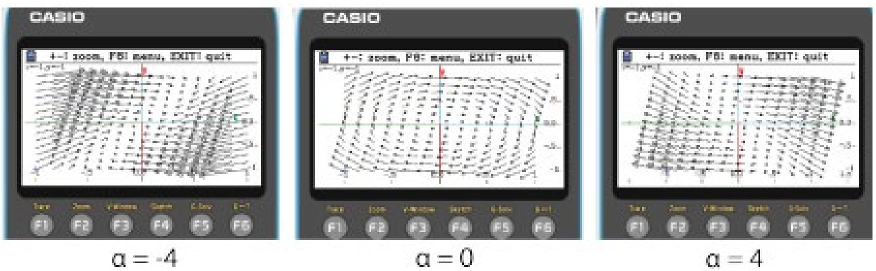


Figura 4. Interface da calculadora gráfica para os valores de $\alpha = -4$, $\alpha = 0$ e $\alpha = 4$ (Elaborado pelas autoras).

Neste ponto, julgamos importante destacar que apesar da calculadora explicitar a matriz de Jordan, os autovalores e os autovetores do sistema, a resposta obtida ainda precisou ser analisada pelos discentes, o que ressalta o aspecto de que mesmo que a tecnologia retorne o resultado, a interpretação do que é obtido parte do estudante e de sua interação com a mídia. A partir dessa justificativa, discutimos com os graduandos até que ponto a solução seria válida e se poderíamos confiar apenas no que era visualizado.

Ao tomar esses aspectos, buscamos abordar com os graduandos e refletir sobre o nosso olhar e a importância da visualização, tanto para a criação de conjecturas e interpretações quanto como até que ponto ela pode ser usada como parâmetro para afirmações na Matemática. Logo, no que tange à visualização, percebemos que os estudantes relacionaram o que era observado no visor da calculadora gráfica com a teoria vista em sala de aula ao apontar o comportamento das trajetórias. Com isso, ressaltamos que houve um processo de interpretação e reflexão sobre as imagens geradas com a tecnologia, de modo que puderam pensar sobre o que aparecia no display e desenvolver o entendimento sobre a temática estudada (Arcavi, 2003; Borba & Villarreal, 2005). Salientamos que a possibilidade de realizar testes e o rápido *feedback* (Borba & Villarreal, 2005) da calculadora auxiliou nesse processo de visualização pelos estudantes.

Portanto, destacamos que os discentes puderam atrelar a teoria vista em aula com a possibilidade de testar os valores no sistema, ou seja, entraram num processo de experimentação-com-tecnologias (Borba & Villarreal, 2005) a partir da visualização da trajetória no plano de fases com a calculadora gráfica, por meio de reflexões sobre o que era retornado na tecnologia

(Arcavi, 2003). Evidenciamos que esse tipo de abordagem gerou um movimento na sala de aula em que os graduandos puderam discutir até que ponto o que estava sendo visto poderia ser válido ou não e quais poderiam ser as possíveis justificativas para isso.

Resultados/conclusões

Ao longo do texto, apresentamos um recorte de uma discussão feita com estudantes do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Unesp, campus Rio Claro. A partir de uma parceria com o professor da disciplina, desenvolvemos uma oficina com os graduandos para abordar as trajetórias do plano de fases de um sistema de equações diferenciais.

Para a discussão com os graduandos focamos na experimentação-com-tecnologias (Borba & Villarreal, 2005) e na visualização (Arcavi, 2003) gerada pela mídia, buscando atrelar compreensões qualitativas de resoluções de equações diferenciais. Ressaltamos que esse movimento foi feito de modo distinto pelos estudantes, o que é característica de um ambiente em que essa perspectiva teórica é abordada. Além disso, destacamos o diálogo com o professor da disciplina, de modo a considerar as dificuldades notadas em dúvidas ao longo das aulas, erros observados em provas, entre outros, para a elaboração da oficina.

Com o exposto neste trabalho, buscamos suscitar discussões acerca de propostas para além da mídia lápis e papel na sala de aula (Borba & Villarreal, 2005) no ensino superior, de modo que os estudantes possam visualizar no processo de ensino e aprendizagem outras maneiras de abordar um conteúdo. Entendemos que esse tipo de abordagem é importante, já que os graduandos são professores em formação e atuarão na rede básica de ensino ou até mesmo superior e, conhecer diferentes maneiras de tratar o mesmo conteúdo faz parte do seu processo formativo. Dito isto, compreendemos que para que um professor possa desenvolver atividades exploratórias, com tecnologias, de modo que o estudante tenha a possibilidade de experimentar práticas de ensino diferentes da tradicional, é necessário que ele tenha contato na formação inicial com diferentes tipos de metodologias.

Por fim, esperamos que as ideias trazidas neste trabalho contribuam com a discussão na área de ensino e aprendizagem com estudantes do ensino superior, principalmente das áreas de Licenciaturas e Bacharelado em Ciências Exatas de maneira geral, contribuindo no pensar na importância de experimentar com a tecnologia e o uso de diferentes abordagens com os professores em formação.

Referências e bibliografia

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Education Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. Springer. (Mathematics Education Library, 39).

Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2020). *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno (*11a ed.). LTC. https://doi.org/978-85-216-3712-7

Javaroni, S. L. (2007). *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias* (Tese de doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.