Conocimiento matemático de los profesores en formación inicial: Procedimientos relacionados al tema de polígonos

Jennifer **Fonseca Castro**
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
jennifer.fonseca.castro@una.cr
Helen **Guillén Oviedo**
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
hellen.guillen.oviedo@una.cr

Resumen

Este artículo presenta los hallazgos de una investigación cualitativa de tipo descriptivo, cuyo propósito es caracterizar el conocimiento matemático evidenciado en los profesores de Matemáticas en formación inicial de la Universidad Nacional de Costa Rica en relación con los procedimientos propuestos para la solución de situaciones-problemas en el tema de polígonos; lo anterior, utilizando el modelo de Conocimiento Especializado de los Profesores de Matemáticas (MTSK). Para esto, se aplicó un cuestionario en 2024, a 15 estudiantes de cuarto año de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. Para analizar la información, se utilizó el análisis de contenido, generando indicadores de evidencia de conocimiento para cada pregunta. Los participantes mostraron una comprensión general satisfactoria de los procedimientos dados; no obstante, la ausencia de justificaciones adecuadas en ciertos casos indica la necesidad de profundizar en la comprensión de los procedimientos matemáticos y su justificación lógica.

Palabras clave: Conocimiento especializado de profesores de Matemática; Educación Matemática; formación de docentes; Geometría; polígonos.

Introducción

En el currículum de Matemáticas de Costa Rica, la geometría ocupa un lugar central, siendo una de las cinco áreas matemáticas abordadas en todos los niveles educativos. Los

Programas de Estudio de Matemáticas la presentan como una herramienta fundamental para organizar los fenómenos relacionados con el espacio y la forma, proporcionando patrones y modelos que permiten interpretar la relación entre los objetos geométricos y la realidad (Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012). Este enfoque promueve la conexión entre las representaciones visuales y las formas geométricas mediante su identificación, visualización y manipulación. Dentro de este contexto, el estudio de los polígonos está presente, de manera explícita o implícita, en todos los niveles del currículo nacional.

En la formación inicial de los futuros docentes de Matemáticas, particularmente en el plan de estudios del Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM) de la Universidad Nacional (UNA), el desarrollo del conocimiento geométrico se distribuye en cuatro asignaturas clave: dos cursos de Geometría Euclídea en el segundo año de la carrera, un curso de Geometría Analítica y un curso de Didáctica de la Geometría en el cuarto año. Las competencias adquiridas en estas asignaturas son esenciales para la formación profesional de los futuros docentes, asegurando que dispongan de herramientas conceptuales y metodológicas adecuadas para la enseñanza de la geometría en la educación escolar.

En este contexto, se desarrolló un proyecto de investigación en la Escuela de Matemática de la UNA (código SIA 0227-22) con el objetivo de caracterizar el conocimiento especializado sobre polígonos evidenciado en los profesores de Matemática en formación inicial (PMFI) en la carrera BLEM de la UNA. Para ello, se adoptó como marco de referencia el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018), el cual permite analizar el conocimiento matemático del docente desde una perspectiva estructurada y detallada.

En este documento, se presentan los hallazgos de la investigación, relacionados específicamente con el subdominio del Conocimiento de los Temas (KoT, por sus siglas en inglés) del modelo MTSK, con un énfasis particular en la categoría de procedimientos. La exploración de este subdominio permite comprender en mayor profundidad cómo los futuros docentes conceptualizan, estructuran y aplican su conocimiento matemático en la enseñanza de los polígonos.

Marco Teórico

En el presente estudio se adopta el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) como marco de referencia teórico. Este modelo permite describir y analizar el conocimiento matemático que poseen los docentes de Matemáticas, proporcionando una estructura detallada para comprender sus componentes y las interacciones que emergen entre ellos (Escudero et al., 2015). En particular, esta investigación se centra en el subdominio del KoT, particularmente en la categoría de procedimientos asociados al tema de polígonos.

En lo que respecta a los procedimientos, estos representan el saber hacer del docente, es decir, su conocimiento práctico de las Matemáticas. No obstante, el dominio procedimental no se limita únicamente a la ejecución de algoritmos, sino que también abarca aspectos como el reconocimiento del momento adecuado para su aplicación (cuándo hacerlo), la justificación teórica subyacente (por qué se hace de esa manera) y la interpretación de las características del resultado obtenido (Carrillo et al., 2018). En este sentido, el estudio de los procedimientos matemáticos dentro del conocimiento del docente permite analizar no solo la ejecución de técnicas y estrategias, sino también la comprensión de las condiciones necesarias para su aplicación efectiva.

Desde una perspectiva más amplia, el término "procedimiento" se entiende como un conjunto de acciones organizadas de manera secuencial para alcanzar un objetivo específico. Dentro del contexto matemático, estas acciones pueden estar relacionadas con el uso de algoritmos convencionales y alternativos, estrategias de resolución de problemas y operaciones específicas vinculadas a conceptos matemáticos (Vasco y Moriel, 2022).

Desde la perspectiva del MEP, principal empleador de docentes de Matemática en Costa Rica, en relación con los procedimientos, se espera que los docentes de Matemática sean capaces de determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos; calcular la medida de ángulos internos y externos, así como la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes situaciones; además de construir distintos polígonos regulares utilizando regla y compás (MEP, 2012).

Marco Metodológico

Se aplicó un cuestionario durante el 2024 con una duración aproximada de dos horas. El mismo fue validado con expertos nacionales e internacionales en didáctica de la Matemática, Matemática pura y enseñanza de la Matemática para su depuración. Posteriormente, se validó en una prueba piloto con PMFI distintos a los sujetos de investigación considerados en este estudio. El cuestionario constaba de 6 preguntas de respuestas abiertas; lo respondieron en parejas, debido a su extensión y complejidad; en total participaron 14 PMFI. Todos los participantes ya habían aprobado los cursos de Geometría Euclídea, Geometría Analítica y Didáctica de la Geometría como parte de su plan de estudios, donde el tema de polígonos es foco de estudio. Las preguntas fueron diseñadas con dos objetivos principales: primero, obtener evidencias sobre los procedimientos que emplean o proponen los PMFI cuando se enfrentan a una situación-problema que requiera de conocimientos matemáticos relacionados a polígonos; y segundo, obtener evidencias sobre las interpretaciones, usos, deducciones y generalizaciones que los PMFI realizan de un procedimiento dado (válido o no) para resolver una situación-problema que requiera de conocimientos matemáticos relacionados a polígonos, y cómo aplican sus conocimientos en dicho análisis. Se utilizó para este fin los contenidos relacionados a la fórmula para calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono y el número total de diagonales de un polígono; los conceptos y cálculo para área y perímetro de un polígono; y construcciones de polígonos utilizando regla y compás.

Para el análisis de la información se empleó el análisis de contenido que permite la codificación, la categorización y la comparación de preguntas abiertas de cuestionarios, así como la descripción de patrones y tendencias en el contenido (Cohen et al., 2002). Para la pregunta 1, la cual se compone de cuatro situaciones-problema, se utilizaron los siguientes indicadores de conocimiento para el análisis de las respuestas de la 1A: (i) brinda el resultado correcto para la suma de las medidas de los ángulos internos; (ii) traza correctamente las diagonales desde un vértice de un polígono; (iii) conoce el número de triángulos que se generan a partir de las diagonales trazadas desde un vértice; (iv) usa correctamente la fórmula para la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo; (v) no responde. Para la situación-problema 1B, las respuestas se clasificaron como correctas si: (i) brinda la fórmula correcta para la suma de las medidas de los ángulos internos; y (ii) brinda una explicación correcta para llegar a el resultado; y como incorrecta, si la formula brindada era incorrecta o no brindaba ninguna. Para las situaciones-problema de las preguntas 1C, 1D, 2, 3, 5 y 6, las respuestas se clasificaron como correctas, incorrectas o no responde; y la justificación o procedimiento como válido, incompleto, incorrecto, o no responde. En la pregunta 4, se clasificaron las respuestas utilizando los mismos indicadores anteriores, para cada una de las propuestas de solución del Estudiante 1 y Estudiante 2, en cada uno de los problemas (Problema 1 y Problema 2).

Resultados

Los resultados se organizaron de acuerdo con los objetivos de las preguntas planteadas en el cuestionario.

A) Interpretación y uso que hacen los PMFI de un procedimiento dado para resolver una situación-problema de polígonos

En una primera parte, se les presentó a los PMFI la siguiente situación-problema, *"En la clase de Geometría se debe estudiar la suma de la medida de los ángulos internos de un polígono convexo. Se quiere mostrar un procedimiento o método matemático que permita a los estudiantes deducir dicha fórmula. Para esto, la docente del curso ha construido la tabla que se muestra a continuación, donde en la primera columna coloca polígonos de distintos número de lados [un triángulo, un rectángulo, un pentágono, un hexágono y un heptágono]; en la segunda columna, triangula [se entiende por triangular: trazar desde uno de los vértices todas las diagonales posibles] los polígonos de la primera columna con el objetivo de usar la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo para obtener la suma de los ángulos internos del polígono deseado. Por ejemplo, en la segunda figura, triangula el rectángulo trazando una de las diagonales formando así dos triángulos; para cada uno de los triángulos la suma de sus ángulos internos es 180, de donde deduce, en la tercera columna, que la suma de los ángulos internos del rectángulo es 180 + 180 = 360."* El objetivo de la pregunta era que los PMFI analizaran el método propuesto y evaluaran su efectividad para obtener una fórmula que permita calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono. Para esto, debían completar los datos faltantes en la tabla (la triangulación y la fórmula para el hexágono y el heptágono); brindar una fórmula para calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados; e indicar para qué tipo de polígonos funciona este método.

Al respecto, los PMFI no tuvieron mayor problema en brindar el valor correcto de la suma de las medidas de los ángulos internos para el hexágono y el pentágono y el heptágono. No obstante, algunos mostraron deficiencias al momento de triangular dichas figuras, por ejemplo, el Grupo 4 cuya respuesta se muestra en la Figura 1. En ambas figuras se evidencia carencias con la definición de diagonal de un polígono, en la primera lo trazado por los PMFI no son diagonales y en la segunda no trazan todas las diagonales posible. Asimismo, se evidencia falta de comprensión del procedimiento propuesto.

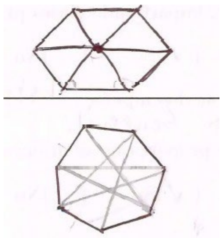

Figura 1. Respuesta del Grupo 4.

Al presentar una fórmula general para la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono, los PMFI proporcionaron una fórmula correcta; sin embargo, algunas justificaciones carecían de argumentos matemático válidos o que dieran sustento a sus proposiciones, la mayoría mostraban para un número de lados en específico, $n = 3, n = 4, n = 5$, como se evidencia en la respuesta del Grupo 6 en la Figura 2. No obstante, dos grupos mostraron una justificación correcta; por ejemplo, la respuesta del Grupo 3 que se muestra en la Figura 3 a continuación.

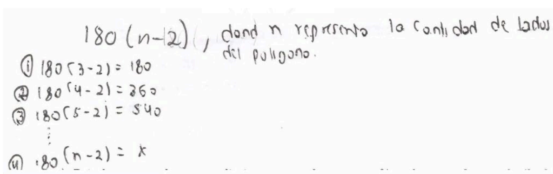

Figura 2. Respuesta del Grupo 6.

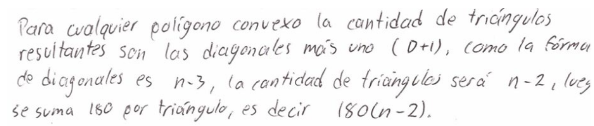

Figura 3. Respuesta del Grupo 3.

Por otra parte, a la pregunta de si el método presentado es válido para polígonos cóncavos, los PMFI lograron identificar que este es válido solo para convexos; no obstante, solo un grupo proporcionó una justificación válida. Se encontraron igualmente carencias con la definición de diagonal de un polígono, pues consideran que en los cóncavos *"no es posible trazar todas las diagonales desde un vértice"*. Asimismo, se encontraron carencias con la definición de polígono convexo, pues señalan que *"el método solo funciona con polígonos regulares y los cóncavos no lo son"*. Tienden a definir polígonos convexos como polígonos regulares.

En una segunda parte, se les presentó a los PMFI dos situaciones-problema; el primero relacionado a la fórmula para calcular el número total de diagonales de un polígono, y el segundo relacionado al concepto y cálculo de área y perímetro de polígonos. En el primero, se les planteó lo siguiente, "*En la clase de Geometría se debe calcular el número total de diagonales de un polígono de n lados. Tres estudiantes propusieron las siguientes ideas…*" y se les mostró las ideas planteadas hipotéticamente, por tres estudiantes. El planteamiento del Estudiante B era el correcto. Los PMFI no tuvieron mayor problema en descartar como válidos los planteamientos propuestos por el Estudiante A y Estudiante C, y en acertar que el correcto era la respuesta del Estudiante B. No obstante, los argumentos que justificaban sus respuestas nuevamente evidenciaban carencias conceptuales en los PMFI. A continuación, se transcriben las respuestas de los grupos 3 y 4; el primero clasifica correctamente las respuestas de los tres estudiantes y sus justificaciones son válidas; mientras que el segundo clasifica correctamente las respuestas, pero sus justificaciones son incorrectas o incompletas. Aquí como en la pregunta de las diagonales encontramos problemas en los procesos inductivos, pues ofrecen uno o dos casos para deducir una formula general.

Respuesta, Grupo 3:
i) El estudiante A está equivocado, pues un contraejemplo es el cuadrado, pues tiene 4 vértices y dos diagonales, pero $4(4-3)=4$.
ii) El estudiante C también está equivocado, el mismo contraejemplo sirve, pues $\frac{4(4-3)}{4}=1$ *y el cuadrado tiene dos diagonales.*
iii) El estudiante B está en lo correcto, pues si hay que tomar en cuenta las diagonales repetidas, por eso se divide entre dos.

Respuesta, Grupo 4: El estudiante que está en lo correcto es el estudiante B ya que probando los casos triviales se puede deducir la fórmula.
I Caso: cuando es un triángulo.
$\frac{3(3-3)}{2}=\frac{3\cdot 0}{2}=0$ *y se sabe que el triángulo no tiene diagonales.*
II Caso: Cuando es un cuadrado
Entonces tenemos $\frac{4(4-3)}{2}=\frac{4}{2}=2$ *que cumple con el número de diagonales del cuadrado.*

Para la segunda situación-problema, se les plantearon dos problemas relacionados a áreas y perímetros de polígonos, acompañados de soluciones hipotéticas de dos estudiantes. Los PMFI debían comentar cada solución e indicar si las respuestas propuestas eran correctas o incorrectas, justificando sus respuestas. Los PMFI mostraron dominio de los conceptos y fórmulas para área y perímetro de polígonos en los problemas planteados.

B) Procedimientos propuestos por los PMFI para resolver una situación-problema de polígonos

Después de trabajar en el método de triangulación de polígonos para calcular la suma de las medidas de los ángulos internos, se les solicitó a los PMFI que brindaran otro modo o procedimiento para obtener dicha fórmula. Al respecto, dos grupos brindaron un procedimiento alternativo, pero que funciona solo para polígonos regulares. Ambos propusieron triangular los polígonos de una forma distinta, usando los n triángulos isósceles que se forman con el centro del polígono y dos vértices consecutivos e igualmente usar la suma de las medidas de los ángulos internos de dichos triángulos (ver respuesta del Grupo 2). Los procedimientos brindados por ambos grupos, evidenciaron un buen manejo lógico-matemático y algebraico en los procesos propuestos. Otros procedimientos propuestos no eran claros o dependían de otros datos del polígono (además del número de lados) para que funcionaran, por ejemplo, el procedimiento propuesto por el Grupo 7 que se muestra a continuación.

Respuesta, Grupo 2: Si generamos triángulos desde el centro trazando los radios, se generan n triángulos que son congruentes entre ellos. Por Pons Asinorum [Teorema del triángulo isósceles], los dos ángulos en la base son congruentes. Tomando en cuenta que la medida del ángulo central es $\frac{360}{n}$ *y que se forman n triángulos, deducimos que otra fórmula es:* $n\left[180-\frac{360}{n}\right]$.

Respuesta Grupo 7: Sacar el ∡ externo, ~~dividiendo~~ restarle $180 - \measuredangle externo$ *y multiplicar la cantidad de ángulos.*

En una segunda actividad, luego de analizar algunos métodos propuestos para calcular el total de diagonales de un polígono, se les solicitó a los grupos proponer otros métodos para obtener dicha fórmula. No se obtuvo respuestas al respecto, solo un grupo propuso una demostración por inducción la cual presentaron de forma correcta.

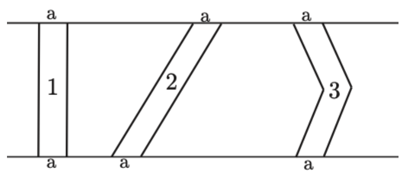

Figura 4. Imagen para el cálculo de áreas.

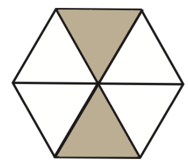

Figura 5. Imagen para el cálculo de áreas.

En una tercera actividad, se les planteó dos situaciones-problemas donde debían determinar el área de los polígonos dados. En el primer problema se les brindó la imagen de la Figura 4, los PMFI debían determinar y justificar cuál de las tres bandas brindadas tiene la mayor área. Las bandas dadas conectan dos segmentos paralelos y el ancho de estas tienen la misma medida "a" en cualquier punto entre las paralelas. Las respuestas correctas, hacían alusión a la congruencia de las alturas de las bandas (pues los segmentes son paralelos) y de sus bases, para posterior usar la fórmula para el cálculo de áreas de paralelogramos, $A = b \cdot h$. Así concluían que las tres bandas tenían igual área. Los grupos que contestaron de forma incorrecta, seleccionaron la banda 2 como la de mayor área, atribuían su respuesta a la inclinación de la barra y la distancia de las barras entre las paralelas. En sus respuestas no había evidencias del conocimiento de la fórmula para calcular áreas de rectángulos o paralelogramos (ver la respuesta del Grupo 7).

> *Respuesta, Grupo 7: La banda 2, pues como la distancia entre un punto y una recta siempre es la menor y además perpendicular, la [banda] 1 sería la más pequeña y la [banda] 2 es totalmente cruzada por lo que sus diagonales son mayores.*

En el segundo problema, se les brindó la imagen de la Figura 5, los PMFI debían determinar el área de la región sombreada. Los PMFI no tuvieron mayor dificultad en reconocer y utilizar apropiadamente las propiedades y procedimientos para hallar la respuesta correcta. En las respuestas correctas se señalaba la congruencia de los seis triángulos formados y que el valor de sus áreas era igual. Por ello, dividían 96 entre 6 y multiplicaban por 2. En los casos incorrectos, el procedimiento planteado era válido, pero el error se produjo por un cálculo incorrecto en las operaciones aritméticas.

Para finalizar, se les planteó una tercera actividad para la construcción de algunos polígonos regulares con regla y compás. Se les brindó la figura de un hexágono regular inscrito en una circunferencia y se les solicitó construir, a partir de este, un dodecágono regular y un cuadrado inscritos en la misma circunferencia. Debían realizar las construcciones y explicar los procedimientos empleados. Los PMFI mostraron evidencias de conocimiento con las propiedades de los dodecágono y cómo obtenerlo; pero no así con sus conocimientos o habilidades de construcción con regla y compás. En sus explicaciones, los PMFI mencionaban que se debía encontrar el punto medio de los lados del hexágono para bisecar los arcos, pero no explicaban cómo realizar esta construcción, ni había evidencia que la hicieran con la regla y el compás. Para el cuadrado, un grupo logró realizar la construcción correctamente y su justificación evidenciaba conocimiento por parte de los PMFI sobre las propiedades de dichos polígonos. En la Figura 6, se muestran las construcciones realizadas por el Grupo 3 con sus respectivas explicaciones.

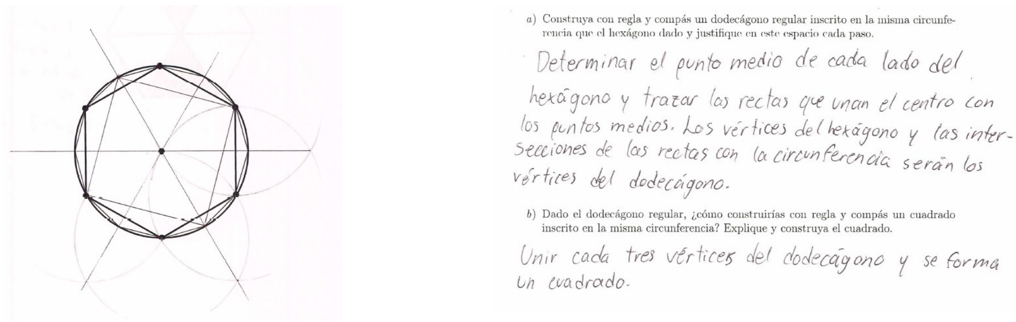

Figura 6. Construcción con regla y compás del Grupo 3.

Conclusiones

Las conclusiones derivadas de los resultados obtenidos en este estudio permiten destacar varios aspectos relevantes sobre el desempeño y las conceptualizaciones de los PMFI en relación con procedimientos en geometría de polígonos.

Los PMFI demostraron una comprensión general adecuada sobre los procedimientos planteados para determinar las fórmulas para calcular la medida y suma de los ángulos internos de los polígonos, así como del total de sus diagonal. Aunque todos los grupos lograron identificar las fórmulas correctas, la ausencia de justificaciones adecuadas en algunos casos sugiere la necesidad de profundizar en la comprensión de conceptos fundamentales, como la definición de diagonales y las condiciones de convexidad y concavidad, así como en los procedimientos matemáticos y su justificación lógica. La tendencia a centrarse en casos específicos refleja una comprensión todavía incipiente de la construcción de argumentos generales en geometría. Esto indica que, aunque los resultados finales puedan ser correctos, el proceso de razonamiento matemático no siempre fue claro o completo. Esto pone de manifiesto la importancia de fomentar el desarrollo de habilidades de argumentación y justificación en contextos matemáticos, lo cual es fundamental para el aprendizaje y la enseñanza de conceptos matemáticos.

Al solicitar a los PMFI que propusieran métodos alternativos para resolver problemas, se observó una variabilidad en la calidad de las respuestas. Mientras que algunos grupos ofrecieron procedimientos correctos y bien fundamentados, otros no lograron proporcionar soluciones adecuadas. Esto resalta la necesidad de promover el pensamiento crítico y la creatividad en la resolución de problemas matemáticos, así como el fomento de la exploración de diferentes enfoques para abordar un mismo problema; esto podría incluir el uso de recursos visuales y prácticos que refuercen la comprensión de los conceptos geométricos.

En resumen, los resultados evidencian que, si bien los PMFI muestran habilidades básicas y conocimientos conceptuales en geometría de polígonos, se identificaron áreas clave que requieren atención, especialmente en la justificación de procedimientos, en la comprensión de conceptos fundamentales, en el desarrollo de diferentes métodos de resolución y en las habilidades prácticas de construcción. Por tanto, es recomendable fortalecer las actividades que integren razonamiento inductivo y deductivo, el desarrollo de habilidades constructivas y la consolidación de conceptos clave, con el fin de mejorar su competencia para resolver problemas geométricos de manera fundamentada y autónoma. Estos hallazgos ofrecen información valiosa para los formadores de profesores de Matemáticas y los investigadores, en la revisión y análisis de los programas de formación docente, además de contribuir a la identificación de nuevas áreas de investigación relacionadas con este tema.

Referencias y bibliografía

Carrillo, Y., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D. y Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. Routledge.

Escudero, D., Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*. 10(1), 53-77.

Ministerio de Educación Pública. (MEP) (2012*).* Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado. San José, Costa Rica: Autor.

Vasco Mora, D. y Moriel Junior, J. (2022). Conocimiento de los Temas. *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*, ((pp. 35-46).