Características del aprendizaje de la práctica profesional de planificar una lección usando una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la magnitud superficie

Marianela **Alpízar** Vargas
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr
Ceneida **Fernández** Verdú
Universidad de Alicante
España
ceneida.fernandez@ua.es
Salvador **Llinares** Ciscar
Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen

El objetivo es explorar cómo un docente de educación primaria planifica una lección sobre la medida superficie usando una trayectoria hipotética de aprendizaje tras participar en una propuesta formativa dirigida a desarrollar competencias docentes. Se consideran tres dimensiones en la planificación: identificación de elementos matemáticos y su relación con las habilidades propuestas en el currículo costarricense; abordaje de dichos elementos en la definición de objetivos de aprendizaje y el diseño de las actividades; y la anticipación de respuestas a las actividades diseñadas. Los resultados muestran que el docente planificó una lección considerando una progresión de aprendizaje de los estudiantes sobre la medida superficie integrándola con las referencias contextuales del currículo.

Palabras clave: Competencia mirar profesionalmente; planificar una lección; Medidas; Superficie; Educación Primaria.

Problemática y Referencial Teórico

Mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es una competencia docente relevante para la práctica de los docentes que ha generado una importante agenda de investigación (e.g. Dindyal et al., 2021; Weyers et al., 2024). Estos estudios han mostrado la necesidad de desarrollar esta competencia en los programas de formación inicial de maestros y profesores de matemáticas y en los programas de formación continua. La competencia mirar profesionalmente se ha conceptualizado desde diferentes perspectivas. En este estudio se entiende como una competencia basada en el conocimiento, por tanto, mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas implica que el docente use conocimiento específico de matemáticas y de didáctica de las matemáticas para justificar sus decisiones.

Esta competencia se vincula a las prácticas profesionales específicas en la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2019): (i) dotar de sentido el pensamiento matemático de los estudiantes; (ii) analizar y seleccionar tareas matemáticas; (iii) gestionar las discusiones matemáticas en el aula o (iv) planificar una lección. En este estudio nos centramos en la práctica profesional de planificar una lección. Una de las *effective mathematics teaching practices* propuestas por el National Council of Teachers of Mathematicsla (NCTM, 2014) es la de establecer objetivos matemáticos para centrar el aprendizaje. Desde esta perspectiva se indica que una enseñanza eficaz de las matemáticas sitúa los objetivos dentro de una progresión del aprendizaje y utiliza los objetivos para orientar las decisiones pedagógicas. Además, propone la utilización de evidencias del pensamiento matemático de los estudiantes para ajustar la instrucción de manera que apoye el aprendizaje. Por tanto, la planificación de los docentes debería tener en cuenta la progresión del aprendizaje (pensamiento matemático) de los estudiantes y definir objetivos de las lecciones de acuerdo con esta progresión.

En las investigaciones previas centradas en la planificación de lecciones basadas en el pensamiento matemático de los estudiantes es posible considerar el papel que desempeñan las destrezas vinculadas a la competencia docente de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Choy, 2014). Estas destrezas son identificar detalles matemáticos importantes del pensamiento matemático de los estudiantes; interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y decidir de acuerdo con la interpretación (Jacobs et al., 2010). El estudio de Choy mostró que la planificación considerando dichas destrezas podía contribuir a que las clases fueran más efectivas, ya que permite que los docentes piensen en los contenidos que deben enseñar y también que reflexionen sobre las posibles ideas erróneas de los estudiantes, las dificultades que puedan presentar y las formas en las que cómo docentes pueden abordar esas dificultades. Taylan (2018) indicó que los docentes que tenían destrezas intermedias y avanzadas en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes se desempeñaron mejor al planificar una lección considerando las características del pensamiento matemático de los estudiantes, ya que fueron capaces de proporcionar ejemplos de pensamiento incorrecto de los estudiantes. Este estudio concluyó que el uso de un protocolo de plan de lección centrado en el pensamiento de los estudiantes puede ser una herramienta muy valiosa para los docentes. Cuando el docente conoce sobre el pensamiento de sus estudiantes y es consciente de las dificultades que presentaran sus estudiantes puede establecer pautas convenientes para que su enseñanza sea más efectiva (Tataroğlu Taşdan et al., 2022).

Teniendo en cuenta las prácticas efectivas para la enseñanza de las matemáticas desde la NCTM y los estudios previos centrados en planificar lecciones centradas en el pensamiento matemática de los estudiantes, nuestra hipótesis es que facilitar a los maestros trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) para planificar una lección, podría ayudarles a establecer objetivos que orienten sus actividades y a tener en cuenta la progresión de aprendizaje de los estudiantes. Investigaciones previas han mostrado que las THA son lentes teóricas que apoyan el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente de los docentes (Fernández y Choy, 2020; Ivars et al., 2020; Moreno et al., 2021). Por ejemplo, Ivars *et al*. (2020) utilizan una THA del concepto de fracción como parte-todo con un grupo de docentes en formación, para que estos interpreten la comprensión de los estudiantes y propongan actividades que los hagan avanzar en su aprendizaje. Se mostró que la THA proporcionó a los docentes un lenguaje apropiado para describir la comprensión de los estudiantes y una guía para diseñar las actividades.

En esta comunicación, se presenta cómo un docente de educación primaria en ejercicio planifica una lección sobre el tema de medidas, en particular, la superficie, usando la información teórica proporcionada en un taller de formación (THA) centrado en el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente. Este estudio forma parte de una investigación más amplia que tiene como objetivo caracterizar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente en docentes de educación primaria en el dominio matemático específico de las magnitudes y su medida. Se seleccionó el tema de magnitudes y su medida, porque es un tema relevante dentro de los Programas de estudio del Ministerio de Educación Pública en Costa Rica (MEP), y porque las investigaciones han mostrado que los maestros tienen dificultades con determinados contenidos de este tema (Alpízar-Vargas et al., 2024). De manera específica, nuestro objetivo es identificar características de la integración entre el conocimiento de matemáticas y sobre el aprendizaje en la manera en la que un docente de educación primaria planifica una lección usando una THA sobre la magnitud superficie y su medida.

Método

Se diseñó un taller de formación con el objetivo de desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente en el tema de "Medidas". Participaron siete docentes de educación primaria que imparten clases de matemática en instituciones de educación pública vinculadas con el MEP. La participación en dicho taller fue voluntaria. El taller se desarrolló en cuatro bloques. El primer bloque tiene como objetivo que los docentes aprendieran a identificar elementos matemáticos de las magnitudes y su medida al resolver actividades sobre la magnitud longitud y su medida, y la magnitud superficie y su medida. El segundo bloque tiene como objetivos (i) analizar el pensamiento matemático de los estudiantes cuando resuelven actividades matemáticas y (ii) diseñar actividades que facilitaran la progresión en el aprendizaje de los estudiantes. En el tercero bloque, los objetivos eran que (i) los docentes elaboraran un plan de lección y (ii) lo implementaran. El cuarto bloque tenía como objetivo analizar el pensamiento de sus propios estudiantes al implementar el plan de lección. Esta comunicación, adopta la forma de un estudio de caso, y se centra en cómo uno de los docentes participantes realizó su plan de lección (tercer bloque) que nos permite describir algunas características de cómo se aprende a usar una THA para planificar lecciones. A este docente se le identificará desde ahora como DP.

Para planificar la lección se le dio al DP una guía que se dividía en tres partes: (i) *Aspectos generales*: magnitud y su medida a trabajar, nivel educativo, etapa en que se situaba el tipo de planeamiento según los Programas de estudio del MEP (2012). (iii) *Habilidades específicas* según los Programas de estudio del MEP (2012). (iii*) Estrategias de mediación*: objetivos de aprendizaje, elementos matemáticos por movilizar, conocimientos previos, nivel de comprensión esperado, secuencia de actividades, anticipación de respuestas. La guía consideraba los lineamientos curriculares expuestos por el MEP en Costa Rica y los aspectos teóricos abordados en el taller. En los bloques anteriores, los docentes habían identificado elementos matemáticos de la magnitud superficie y su medida implicados en las actividades y en las respuestas de estudiantes. Además, habían interpretado la comprensión de estudiantes usando información proporcionada sobre niveles de comprensión de una THA, para la magnitud longitud y su medida y para la magnitud superficie y su medida. Por otra parte, habían anticipado respuestas de estudiantes en los diferentes niveles de comprensión a diferentes actividades y habían diseñado actividades que ayudaran a los estudiantes a progresar en su comprensión según los niveles de la THA.

Una THA está formada por un objetivo de aprendizaje, descripción de niveles de comprensión y ejemplos de actividades que ayudan a transitar entre los niveles. La THA de nuestro estudio se diseñó teniendo en cuenta los estudios de Battista et al. (1998) y, Clements y Sarama (2009). La THA fue proporcionada a los docentes como documento teórico del taller. En la figura 1 se muestra un resumen de las características de la comprensión de los niveles 3, 4 y 5 para la magnitud superficie y su medida.

Nivel	Características
3	• Utilizan la propiedad **transitiva** para ordenar tres o más objetos por su superficie mediante comparaciones indirectas.
4	• Identifican una unidad de medida, como parte de la superficie de un objeto que se mide y son conscientes de que deben: o seleccionar una **única unidad de medida,** o realizar **iteraciones** de la unidad en toda la superficie, o **estructurar el espacio:** realizar arreglos de filas y columnas sobre la superficie a medir, o reconocer la propiedad de **acumulación.**
5	• Reconocen la relación inversa entre las unidades (su medida) y el número de unidades de medida (**relación entre número y medida**). • Reconocen la necesidad de utilizar una única unidad de medida para medir y que debe ser **universal** (**universalidad de la unidad de medida, m²).** • Realizan un conteo sistemático de las unidades dentro de un arreglo de filas y columnas. • Empiezan a realizar estimaciones de la superficie usando el metro cuadrado como unidad de medida.

Figura 1. Fragmento de la THA sobre magnitud superficie y su medida.

Para el análisis del planeamiento se consideraron varias dimensiones: *Dimensión 1. Elementos Matemáticos.* En esta dimensión se consideraron los elementos matemáticos relacionados con la magnitud y su medida movilizados en el plan de lección, así como su relación con el currículo costarricense por medio de las habilidades específicas a desarrollar (tomadas del PEM), y el nivel de comprensión de la magnitud superficie asociado a los elementos indicados. *Dimensión 2. Abordaje de los elementos matemáticos*. Esta dimensión se refiere a las acciones del docente para elegir y describir las actividades de su plan de lección. Intervienen los conocimientos previos que debe tener un estudiante para realizar las actividades

matemáticas propuestas, así como los objetivos de aprendizaje relacionados con los elementos matemáticos definidos y en qué medida la secuencia de actividades diseñada tiene en cuenta los objetivos definidos. *Dimensión 3. Anticipación de respuesta.* Esta dimensión se relaciona con la anticipación de respuestas a la actividad o secuencia de actividades sugerida por la docente donde se refleje diversos niveles de comprensión.

Resultados

DP elaboró su plan de lección con la temática de superficie. Los resultados se exponen de acuerdo con cada una de las dimensiones observadas en el plan de lección de DP.

Dimensión 1. Elementos Matemáticos

DP elige la magnitud superficie y su medida para un grupo de 5º año de educación primaria e indica como objetivo de aprendizaje la habilidad especifica: "Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas que se presenten en situaciones ficticias y del entorno." Dicha habilidad está definida en los Programas de estudio de Matemáticas del MEP para 5º año de educación primaria y está relacionada con el conocimiento de la medida de la superficie (MEP, 2012). Por tanto, se relaciona el planeamiento de clase con lo establecido en el currículo costarricense. DP indica que los elementos matemáticos que deben ser comprendidos por los estudiantes son: "transitividad, unicidad de la unidad de medida, iterar la unidad de medida y contar las iteraciones, estructuración del espacio en arreglos de filas y columnas", los cuales son elementos matemáticos de los niveles 3 y 4 de la THA.

Dimensión 2. Abordaje de los elementos matemáticos

DP señala que los estudiantes requieren el reconocimiento de la magnitud superficie y la conservación como conocimientos previos para poder llevar a cabo las actividades que propone en su plan de lección. Es decir, los conocimientos previos están en coherencia con los elementos matemáticos que previamente ha indicado que iba a trabajar, ya que están relacionados con elementos matemáticos de niveles inferiores de la THA (nivel 1 y 2). Los objetivos de aprendizaje específicos sugeridos por DP se relacionan de manera directa con cada uno de los elementos matemáticos que indicó que iba a movilizar en su plan de clase:

> Comprender y usar la transitividad de la superficie, usar una unidad de medida para completar una superficie, elegir una única unidad de medida, realizar iteraciones de esta en toda la superficie del objeto, sin saltos ni superposiciones y contar las iteraciones y realizar arreglos de filas y columnas. [DP]

DP propone una secuencia de dos actividades para los objetivos y elementos matemáticos previamente indicados. La actividad 1 estaría relacionada con la posibilidad de usar la propiedad de transitividad (al tener que ordenar 3 superficies) y con el uso de la unidad de medida (al tener que usar una única unidad de medida, iterarla y contar las iteraciones) para comparar las superficies. A manera de ejemplo se incluye lo concerniente a la Actividad 1.

En la actividad 1, DP da a sus estudiantes tres figuras para que puedan ordenarlas según la medida de la superficie (la docente lo da como material concreto a los alumnos). Las figuras tienen la misma superficie, pero diferente forma (Figura 2). DP propone las siguientes preguntas para que los estudiantes las contesten en grupos: *(1) ¿Cuál es la figura más grande?, (2) ¿Cómo*

llegaron a esa respuesta?, (3) ¿Usaron las unidades de medida dadas? (4) ¿Seleccionaron solo una o utilizaron varias? ¿Hubo alguna persona que se opuso a la forma de hacerlo en el equipo?

En la actividad 2, DP pide a los estudiantes que expliquen "por qué deben usar la misma unidad de medida para comparar la superficie de las figuras dadas" e indica que cerraría las actividades con las siguientes preguntas: *(1) ¿Cuál es el orden de tamaño de las figuras?; (2) ¿Pueden indicar cuánto mide cada figura? (3) ¿Por qué las figuras tienen diferente medida entre lo dicho por sus compañeros? (4) ¿Podemos decir que son de superficie distinta?*

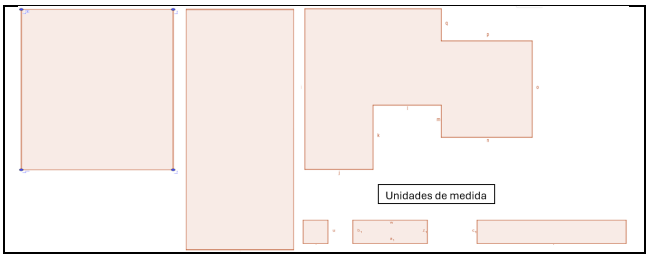

Figura 2. Material concreto dado por DP a los estudiantes para la Actividad 1.

Se observa, aunque no lo indica DP en los elementos matemáticos identificados y los objetivos de las actividades, que con la actividad 2 trabajaría la necesidad de una unidad universal.

Dimensión 3. Anticipación de respuestas. DP anticipó la respuesta a las actividades de tres estudiantes, donde se reflejan características diferentes de la comprensión según la THA. Propone una respuesta con dificultades en los elementos matemáticos de nivel 4 (identificación de una unidad de medida), una respuesta que muestra características de nivel 4 y una respuesta que muestra características del nivel 5 (Relación inversa entre la cantidad-unidad y el número-medida). A manera de ejemplo se mostrará la anticipación para el estudiante que tiene dificultades con las características de nivel 4 (estudiante 1) y un estudiante que estaría ubicado en el nivel 4 (estudiante 2). DP anticipa la respuesta de la Figura 3 para el estudiante 1 e indica que presenta dificultades con la elección y la iteración de la unidad de medida: "porque está dejando por fuera de la figura la unidad de medida seleccionada, lo que hace que exista un error en el conteo y por lo tanto en la selección de la figura con mayor superficie".

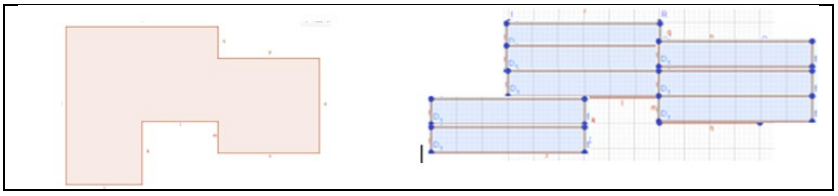

*Figura 3***.** Anticipación de la respuesta del estudiante 1 en la actividad 1.

Para la Actividad 2, DP anticipa una respuesta para el estudiante 1 que muestra el uso de diferentes unidades de medida para calcular la medida de cada superficie y comparar (Figura 4).

1. ¿Cuál es el orden de superficie de las figuras?
   La C es la más grande, la B es la mediana y la A es la más pequeña.

2. ¿Pueden indicar cuánto mide cada figura?
   La C mide 36 cuadritos pequeños. Como teníamos que dar un tamaño exacto usamos los cuadritos pequeños.
   La B mide 12 unidades medianas.
   La A mide 6 unidades grandes.

Figura 4. Anticipación de la respuesta del estudiante 1 en la actividad 2.

Para el estudiante 2, considera que una posible respuesta es que domine el uso de las unidades de medida; la elección, iteración y conteo de la unidad de medida (Figura 5).

1. ¿Cuál es la figura más grande?
Ubicamos la unidad de medida más pequeña dentro de cada figura, poniendo una a la par de la otra, sin dejar espacios entre ellas y así poder contar cuantas unidades cabían, dejando exactamente todas dentro de la figura. Después de hacer el conteo de las figuras A y B vimos que tenían la misma cantidad de unidades, por lo tanto, son iguales, pero nos costó ubicar el tamaño de la figura C, sin embargo, usamos la misma unidad de medida y las ubicamos dentro de la figura igualmente todas pegaditas y observamos que tiene el mismo tamaño que las otras dos, entonces las tres son del mismo tamaño.

Figura 5. Anticipación de la respuesta del estudiante 2 en la actividad 1.

En cuanto a la Actividad 2 (Figura 6), DP indica que este grupo (donde trabaja el estudiante 2) tendría dificultad en identificar que los diferentes resultados (medida de las figuras) son debido a que se han usado unidades de medida distintas y que por ello sería necesario una unidad universal (pregunta 4).

3. ¿Por qué las figuras tienen diferente medida entre lo dicho por sus compañeros?
   Porque el grupo de Esteban tiene figuras con diferente superficie posiblemente, o usaron otra unidad de medida que no dio la maestra.

4. ¿Podemos decir que son de superficie distinta?
   Sí, porque las medidas de ellos no fueron iguales a las de nosotros.

Figura 6. Anticipación de la respuesta del estudiante 2 en la actividad 2.

Discusión y conclusiones

Los resultados muestran que el docente integró lo establecido en el currículo costarricense (PEM) con la información de la THA ya que los elementos matemáticos de la THA elegidos se relacionan con las habilidades específicas del PEM. La evidencia de esta integración apoya lo indicado por Dietiker et al. (2018) de que el desarrollo de la competencia docente relativa a la planificación se apoya en el reconocimiento de las características de las actividades basadas en los elementos del currículo vigente y el modelo de progresión del aprendizaje. Esta integración permite adecuar las actividades a las habilidades y conocimientos requeridos por los estudiantes según su año escolar. El aprendizaje de la práctica profesional de planificar se apoya en el conocimiento de los elementos matemáticos relacionados con la medida que intervienen en el

estudio de la magnitud y en el conocimiento sobre el aprendizaje ya que para abordar elementos de niveles superiores debe considerar que los estudiantes dominan los elementos de los niveles anteriores permitiendo al docente definir objetivos de aprendizaje desde los elementos a movilizar tomados de la THA. Esta característica respalda la idea propuesta por Ivars *et al*. (2020) de que una THA sirve como guía para los docentes planificar las actividades. Por último, el docente fue capaz de anticipar tanto respuestas correctas como respuestas que reflejan dificultades con los elementos matemáticos de los estudiantes. Este resultado apoya la idea de Smith et al. (2008) que indican que no se puede predecir todo lo que pasará en el aula, pero se puede tener un listado que permita tener una idea de los que ocurrirá durante la clase.

En resumen, el caso presentado muestra características de la manera que el conocimiento sobre los elementos matemáticos y sobre el aprendizaje interactúan al aprender la práctica profesional de planificar una lección sobre la medida de la superficie en educación primaria.

Reconocimientos

Este estudio ha sido apoyado por la Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España (Ref. No. PID2023-149624NB-100 y PID2020-116514GB-100).

Trabajo elaborado en el marco del proyecto de investigación SIA 0339-22 de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica.

Referencias

Alpízar-Vargas, M., Fernández, C., & Llinares, S. (2024). Competencia docente del profesorado de educación primaria en el área de medidas en un contexto de reforma curricular. *Uniciencia, 38*(1), 1-24. https://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.22

Battista, M., Clements, D. Arnoff, J., Battista, K., & Van Auken, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 503-532. https://doi.org/10.2307/749731

Choy, B.H. (2014). Teachers' productive mathematical noticing during lesson preparation. In Nicol, C., Liljedahl, P., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting f PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 297-304). PME.

Clements, C., & Sarama, J. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.

Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M., & Earnest, D. (2018). Curricular Noticing: A framework to describe Teachers' interactions with curriculum materials*. Journal for Research in Mathematics Education, 49*(5), 521-532. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.5.0521

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM – Mathematics Education, 53*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Fernández, C. & Choy, B.H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, teaching, psychological and social perspectives. In S. Llinares, O. & Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (*Second Edition)* (pp. 337–360). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418967_013

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(3), 105-124. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 18,* 30–43.

MEP. (2012). Programas de Estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P. & Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentation of a learning trajectory. *ZDM Mathematics Education, 53,* 57-72. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author. Smith, M. S., Bill, V., & Hughes, E. K. (2008). Thinking through a lesson: Successfully implementing a high level task. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(3), 132–138. https://doi.org/10.5951/mtms.14.3.0132

Taylan, R.D. (2018). The Relationship between pre-service mathematics teachers' focus on student thinking in lesson analysis and lesson planning tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16,* 337–356. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9778-y

Tataroğlu Taşdan, B., Tekin Dede, A., & Yiğit Koyunkaya, M. (2022). Examining pre-service mathematics teachers' argumentation-supported lesson plans and their noticing during planning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *55*(6), 1309–1329. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2054741

Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R., & Kaiser, G. (2024). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM–Mathematics Education*, *56,* 249-264. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x