Promoviendo el aprendizaje de conceptos de cálculo a través del infinito

José Antonio **Juárez**-López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
México
jajul@fcfm.buap.mx
Irving Aarón **Díaz**-Espinoza
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
México
zaidazonipse@hotmail.com

Resumen

Esta propuesta se originó de una investigación previa con actividades que abordan el concepto de infinito en profesores que imparten cálculo diferencial e integral en preparatoria. Estas actividades tenían el propósito de evidenciar en profundidad las concepciones que presentaron los profesores y sus posibles implicaciones en los cursos de cálculo. Los hallazgos sugieren que las dificultades al concebir el infinito influyen en las concepciones de otros conceptos, por ejemplo, el de la integral definida, límites al infinito o asíntotas de una función racional de variable real. Además, la literatura sugiere que es necesario trabajar el concepto de infinito, puesto que las concepciones presentes influyen en el tratamiento posterior de otros conceptos en cálculo. Así, el presente estudio propone diversas actividades que abordan el concepto de infinito y su relación con otros conceptos de cálculo diferencial e integral en profesores de preparatoria.

Palabras clave: Actividades de Aprendizaje, Infinito, Profesores, Cálculo, Preparatoria

Introducción

Esta revisión de literatura y resultados de investigación previa surge de una serie de investigaciones realizadas por los autores que fueron abordadas con profesores de Matemáticas en servicio que imparten cursos de cálculo diferencial e integral en preparatoria. Los participantes en dichos estudios fueron profesores que laboran en el estado de Tlaxcala, México tanto de servicio público como privado. El objetivo común de estas investigaciones fue explorar y cambiar las concepciones que tienen los profesores de Matemáticas en servicio de preparatoria acerca del infinito, tanto en contextos aritméticos como geométricos. Para lograrlo, primero se llevó a cabo entrevistas semiestructuradas con el fin de explorar las concepciones previas del infinito en los participantes. Después, se implementó de un taller a largo de un periodo de un año escolar con el propósito de cambiar dichas concepciones del infinito previamente identificadas (Diaz-Espinoza et al., 2023; Díaz-Espinoza et al., 2024; Díaz-Espinoza & Juárez-López, 2023). Los resultados de dichas investigaciones convergieron en la discusión que aquí se propone.

El tema de integración y derivada juega un papel importante en la mayoría de los cursos de cálculo en todo el mundo y estos dos conceptos son ingredientes primordiales del cálculo. Esto es reforzado en entrevistas con profesores que están por iniciar cursos de cálculo donde argumentan que un cierto dominio de estos tópicos son fundamentales para la comprensión del cálculo en los estudiantes (Sofronas et al., 2011).

Los infinitesimales están relacionados con lo que Manfreda Kolar & Hodnik Čadež (2012) denomina infinitamente cerca donde infinito es percibido como acercarse a un objeto determinado lo más cerca posible. Desde esta perspectiva el sujeto puede percibir como dos objetos iguales si están lo suficientemente cerca de tal manera que la diferencia tiende a cero.

Se sugiere que para comenzar un curso de cálculo primero es importante explorar las ideas que tiene el estudiante acerca de lo infinitamente cerca. Una forma que ayuda a explorar esas ideas son preguntas del tipo *¿Cuál es el número positivo más cercano a un número fijo (por ejemplo 5)?* Según diversas investigaciones se puede categorizar las respuestas de los estudiantes en dos tipos: *i*) números decimales finitos con diferente cantidad de cifras (por ejemplo, 4.999); *ii*) números decimales infinitos periódicos (por ejemplo, 4.999 ...). Particularmente, en una investigación donde se explora las respuestas de estudiantes a esta pregunta se encontró que casi tres cuartas partes de los entrevistados presentan respuestas del tipo *ii* (Manfreda Kolar & Hodnik Čadež, 2012).

Infinito en el concepto de límite

Excluir al infinito en el tratamiento de los límites o la integral definida trae consigo una mala imagen de dichos conceptos. Resultados como los mostrados en Ghedamsi y Lecorre (2021) revelan que los estudiantes tienen dificultades con la interpretación formal de enunciados de cálculos informales, por ejemplo, al acercarse al infinito, los números se acercan progresivamente. Explicaciones que pueden ser pobres en argumentación en las primeras clases de límites en cálculo diferencial como "*1/0=∞ porque al dividir un número entre otro muy pequeño resulta en un número muy grande*" induce al estudiante a pensar en el infinito como un número excesivamente grande con el cual puede operar. De hecho, eso mismo ocurre con profesores. Por ejemplo, en una investigación reciente de los autores de esta investigación se preguntó a docentes de bachillerato *¿qué es infinito para usted?* y entre las respuestas se encontraron ideas de un infinito conceptualizado como un número excesivamente grande, imposible de calcular o escribir y se utiliza el símbolo ∞ para expresar dicho número (Diaz-Espinoza et al., 2023).

Así, límites como el de la función $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a 0 muchas veces es tratado como infinito pareciendo coherente en el estudiante, bajo el argumento anterior de que $\frac{1}{0}$ es igual a infinito como si se tratase de un número y, más aún, peligrosamente coherente para el profesor. Sin embargo, cualquier profesor debería tener muy claro que dicho límite no existe. Sólo considere los límites laterales por la izquierda y la derecha y note que tienen un valor diferente $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente. El hecho de una concepción errónea del infinito como un número excesivamente grande desconocido y operable, que en la literatura se le conoce como infinito natural (Krátká et al., 2021), dificulta tratar el límite como inexistente.

A modo de resumen, la literatura habla de dos tipos de concepción del infinito: potencial y actual. Una concepción potencial está relacionada con el infinito como un proceso sin fin, mientras que una concepción actual vislumbra el infinito como un objeto. Son diversas las investigaciones a través de las últimas décadas que han escrudiñado en cómo son las concepciones del infinito tanto en profesores como estudiantes, concluyendo convergentemente en que el infinito actual no se puede conceptualizar solo a través del proceso del infinito potencial, sino que requiere la conceptualización de un punto final de ese proceso (Hannula et al., 2006; Manfreda & Hodnik, 2012; Tall, 2001).

Una sugerencia para tratar las concepciones naturales del infinito, son situaciones donde sea necesario una conceptualización del infinito potencial, es decir, el infinito como un proceso. Pocos investigadores han presentado resultados que muestren el pensamiento de los estudiantes sobre el infinito como punto de partida para una exploración de la comprensión de los límites. Un ejemplo de ello es la investigación de Jones (2015), donde las actividades involucran límites al infinito y límites infinitos, concluyendo que la falta de una concepción dinámica sólida del infinito a menudo llevó a los estudiantes a utilizar métodos inapropiados, como sustituir directamente el infinito por x, o pensar demasiado en lo que sucede en el infinito, en lugar de lo que sucede cuando x tiende a infinito.

Actividades donde aparecen límites al infinito o límites infinitos en contextos reales ayudan al estudiante a visualizar las variables involucradas. Así, el infinito potencial se revela como una longitud cada vez mayor, el tiempo que sigue indefinidamente o un objeto que se acelera cada vez más, en consecuencia, el uso de funciones con un contexto real durante la enseñanza de límites podría ayudar a los estudiantes a construir una concepción dinámica solida del límite (Jones, 2015).

De igual manera, algunos investigadores describen el concepto de límite como compuesto de tipos separados: límite como "proceso" y límite como "objeto", por ejemplo. Los investigadores que utilizan este marco conceptual señalan que existe una dificultad clave para ayudar a los estudiantes a ver que hay un objeto asociado con ese proceso. Es decir, los estudiantes a menudo ven el límite como algo que no se alcanza y por lo tanto es solo un proceso. No se dan cuenta de que $\lim_{x \to a} f(x)$ tiene un valor (siempre que exista) y, en consecuencia, también es un objeto. Además, los significados del lenguaje cotidiano de palabras como 'acercarse' o 'tiende a' pueden reforzar este proceso ya que estas palabras sugieren que el límite nunca se alcanza.

Como advierten Zolt et al. (2023), algunas de las creencias fundamentales de los estudiantes, como la distinción entre un límite que se acerca a un valor y un límite que es igual a un valor, no son fáciles de perturbar. Se tiene la hipótesis de que aliviar creencias alrededor del concepto del infinito puede consolidar la idea de un límite que es igual a un valor. Respecto a ello, esta tendencia del límite como un valor que nunca se alcanza también ha sido reportado en diferentes puntos de la literatura cuando se aborda lo infinitamente pequeño. Por ejemplo, en una investigación reciente con estudiantes de cálculo cuando resuelven una integral definida típica $\int \frac{1}{x^2} dx$ en el intervalo $[1, \infty)$ la mayoría de ellos considera que tiene un valor. Sin embargo, después de calcular una serie de valores en la sucesión de intervalos $[1,10], [1,100], \cdots, [1,1\,000\,000]$ obteniendo $0.9, 0.99, \cdots, 0.999999$, respectivamente, muchos de ellos obtuvieron respuestas del tipo "se acerca a uno" o "nunca llegara a uno" (Zolt et al., 2023).

Este mismo fenómeno de que 0.999999 ... y 1 son visualizadas como dos cantidades diferentes y no como dos representaciones del mismo número son reportadas en estudios del infinito presentando conclusiones convergentes en que una minoría de estudiantes puede aceptar que 0.999999 ... y 1 son iguales porque por naturaleza parecen diferentes, uno más pequeño que otro y no hay operación numérica que apoye lo contrario como sucede en comparación con $\frac{1}{3}$ y 0.333333 ... (Diaz-Espinoza et al., 2023; Juter, 2019; Kattou et al., 2010; Yopp et al., 2011).

Se tiene la hipótesis de que situaciones que ayuden a tratar la igualdad $0.999 \ldots = 1$ como verdadera en los estudiantes puede ayudar a construir una concepción del infinito actual y, en consecuencia, un significado más sólido del valor al que "tiende" un límite (sí existe) o el valor de una integral definida en un intervalo dado. En ese sentido, investigaciones han mostrado situaciones donde se aborda dicha igualdad con profesores o estudiantes (Ángeles-Navarro & Pérez-Carreras, 2010; Diaz-Espinoza et al., 2023; Díaz-Espinoza et al., 2024; Eisenmann, 2008; Wistedt & Martinsson, 1996; Yopp et al., 2011).

Por ejemplo, en una investigación de Díaz-Espinoza et al. (2024) con profesores de bachillerato que impartían cursos de cálculo se les planteó situaciones en diferentes sesiones sobre la igualdad de 0.999999 ... y 1. En la primera sesión se les preguntó su opinión sobre los números 0.999 ... y 1 categorizando sus respuestas en tres tipos: i) el número 0.999 ..., donde el número de nueves después del punto es infinito, es igual a 1 ya que no hay números entre 0.999 ... y 1; ii) no hay números entre 0.999 ... y 1, pero 0.999 ... y 1 son números diferentes de todos modos; y iii) hay números entre 0.999 ... y 1, por lo que son números diferentes. La mayoría de los profesores estuvieron en la categoría ii) y iii) mostrando una concepción del infinito potencial.

En la segunda sesión, se abordó la misma igualdad con ayuda de un apoyo visual particularmente, la recta numérica. Se pedía que fuesen calculando el punto medio entre 0.9 y 1 colocando los puntos sobre la recta numérica. Después, se les cuestionó sobre que sucedía si continuaban este proceso indefinidamente y como se visualizaría en la recta numérica. En esta situación las respuestas ofrecidas por los profesores se categorizaron en dos: i) 0.999 ..., donde el número de nueves después del punto es infinito, y en la recta el punto esta sobre el uno; ii) 0.999 ..., donde el número de nueves después del punto es infinito, y en la recta el punto esta antes del uno. La mayoría de los profesores estuvieron en la categoría i) mostrando una concepción del infinito actual.

Finalmente, en la tercera sesión se abordó la suma de decimales periódicos infinitos a través de la igualdad $\frac{1}{9} = 0.111 \ldots$, donde los profesores calcularon la suma de $\frac{1}{9} + \frac{1}{9}$ y, por otro lado, la suma de su representación decimal periódica infinita $0.111 \ldots + 0.111 \ldots$ y argumentando si obtuvieron el mismo resultado. Como se esperaba los profesores argumentaron que eran equivalentes las dos expresiones. Después, se planteó la situación de sumar nueve veces $\frac{1}{9}$ y si fuese equivalente a su representación decimal periódica. Al final los profesores mostraron concepciones del infinito actual argumentando que $0.999999 \ldots$ y 1 son los mismos números porque $0.999999 \ldots$ es periódico y tiene una infinidad de nueves.

Se concluye en que situaciones donde se aborde al infinito potencial como un proceso y después se produzca un cambio conceptual por un infinito actual puede ayudar a una construcción del límite dinámica y que límites infinitos o límites al infinito puedan ser tratados con mayor profundidad por estudiantes. Además, que pueda ayudar a los estudiantes a cambiar su concepción de que un límite tiene un valor dado o que se aproxima a un valor dado.

Infinito y la derivada

Algunos investigadores informan que el conocimiento previo de una recta tangente a una circunferencia afecta la comprensión de la recta tangente a una curva en términos generales (Biza & Zachariades, 2010). Dada la poca presencia de la recta tangente en situaciones diversas que posibiliten la construcción de la derivada como interpretación geométrica de la recta tangente en un punto de la función, es importante que los profesores presenten a los estudiantes una amplia variedad de ejemplos de tangencia para tratar de prevenir algunos conceptos erróneos de los estudiantes a lo largo de su educación secundaria y preparatoria (Hogue & Scarcelli, 2022).

Una muestra de ello es la investigación de Villabona Millán et al. (2022) donde muestran dos problemas relacionados con la recta tangente a una curva, en el que se toman en consideración los aspectos dinámicos y estáticos del infinito. En uno de los problemas típicos de introducción a la derivada en cursos de cálculo se solicita al estudiante que encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva f en el punto P (véase Figura 1). En dicha investigación concluyeron que el sujeto propone que la situación al límite del proceso que genera pendientes de rectas secantes está directamente relacionada con la pendiente de la recta tangente. Esclarecer esta relación es importante, ya que puede hacer la diferencia entre una estructura dinámica de infinito y una estática. Además, mencionan que “en los procesos infinitos que son analizados a través de una situación al límite, la comprensión que tenga el sujeto sobre este concepto hace la diferencia entre ver un proceso infinito como inacabado o verlo como un todo (infinito potencial e infinito actual)” (Villabona Millán et al., 2022, p. 193). Por tanto, las concepciones dinámicas y estáticas del límite se relacionan con las concepciones que tenga el individuo del conjunto infinito sobre el cual el límite se defina.

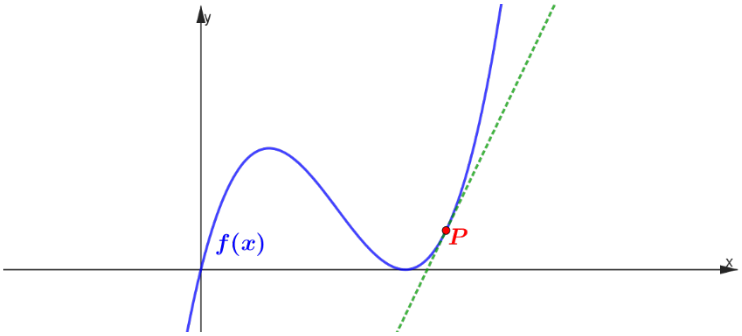

*Figura 1***.** Problema de la pendiente de la recta tangente en un punto P sobre la curva f.

Áreas, infinito e integral definida

Cuando se está en clase de cálculo integral un ejemplo común a analizar es $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ a través de las sumas de Riemann. El objetivo que se espera lograr es que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda de las regiones limitadas que tienen área finita. Como menciona el Plan y Programa de Estudios en México, el estudiante debe “reconocer la importancia de la suma de la suma de Riemann para el cálculo de área bajo la curva como antecedente de la integral definida” (Dirección General de Bachillerato [DGB], 2018, p. 21). La Figura 2 muestra un escenario posible donde se aproxima la integral a partir de cinco rectángulos izquierdos de igual base. El estudiante deduce que a partir de rectángulos cada vez más pequeños puede calcular una mejor aproximación de la integral anterior. Después se motiva al estudiante a pensar en la situación si los rectángulos son infinitamente pequeños y ver qué sucede con el valor de la integral. En términos generales la suma de Riemann tomará el valor de la integral, es decir, que el límite de la suma de Riemann cuando el ancho del rectángulo tiende a cero es el valor de la integral misma.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\Delta x)\Delta x = \int_1^2 f(x)dx$$

Sin embargo, si se cambia un poco la integral anterior por $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$, se ha evidenciado en investigaciones recientes que los estudiantes presentan dificultades para comprender que a pesar de que la integral está definida en una región ilimitada tiene área finita (Zolt et al., 2023): “el pensamiento inicial de los estudiantes sobre las integrales impropias sugiere incredulidad en que una región en un intervalo ilimitado pueda tener un área finita” (p. 513). Además, investigadores sugieren que los profesores pueden contribuir a la dificultad de los estudiantes para comprender integrales impropias prescindiendo del proceso límite y calculando las integrales mediante sustitución (González-Martin & Camacho, 2004).

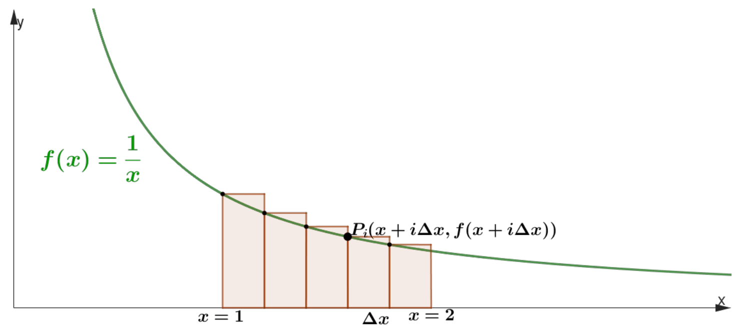

Figura 2. Rectángulos a la izquierda como aproximación a la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Problemas como estos también han sido analizados en otras investigaciones desde la paradoja del pintor o el cuerno de Gabriel, matemáticamente hablando y sin extendernos demasiado, esta paradoja es el resultado de conceptos generalizados de área y volumen utilizando cálculo integral, ya que el cuerno de Gabriel tiene una serie convergente asociada con el volumen y una serie divergente asociada con el área de la superficie con la paradoja del pintor. Wijeratne & Zazkis (2015) estudiaron las soluciones de un grupo de estudiantes de Cálculo al trabajar con dichas paradojas concluyendo que las consideraciones contextuales dificultan la capacidad de los estudiantes para resolver matemáticamente la paradoja, sugieren que el enfoque convencional para introducir los conceptos de área y volumen en Cálculo presenta un obstáculo didáctico. Además, asociar un atributo finito con algo infinito, como en el caso del cuerno de Gabriel, es claramente un obstáculo epistemológico ya que la dificultad de los estudiantes replica el desarrollo del conocimiento matemático a lo largo de la historia como se mencionó al principio de este documento.

Comentarios finales

El propósito principal de esta contribución es proponer el estudio sistemático previo del concepto de infinito cuando se abordan algunos conceptos centrales en el cálculo diferencial e integral. Dicha propuesta se basa en la idea fundamental de que el concepto infinito debería ser tratado como un contenido central en el aprendizaje y la enseñanza de algunos conceptos matemáticos avanzados, sobre todo durante la formación inicial de profesores de Matemáticas.

Como se ha mostrado en investigaciones realizadas por los mismos autores, la comprensión del infinito no debe ser dada por sentada por el profesor en clase de cálculo. Por el contrario, debe ofrecer un tratamiento previo a las concepciones presentes en los estudiantes acerca del infinito. Esto ayudaría a comprender de mejor manera conceptos clave del cálculo, como los mencionados anteriormente.

En ese sentido, el concepto de infinito podría ser un punto de partida idóneo para comenzar una reflexión más profunda que lleve a los docentes en formación a consolidar la noción de infinito en sus diversos contextos y aplicaciones, así como al desarrollo de un pensamiento didáctico más profundo y duradero.

Referencias

Ángeles-Navarro, M., & Pérez-Carreras, P. (2010). A socratic methodological proposal for the study of the equality 0 . 999 . . . = 1. *The Teaching of Mathematics*, *XIII*(1), 17–34.

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(4), 218–229. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.11.001

Díaz-Espinoza, I. A., & Juárez-López, J. A. (2023). Mathematics teachers' conceptions about infinity: A preliminary study at the secondary and high school level. *Union: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, *11*(3), 426–435. https://doi.org/10.30738/union.v11i3.16006

Diaz-Espinoza, I. A., Juárez-López, J. A., & Juárez-Ruiz, E. (2023). Exploring a mathematics teacher's conceptions of infinity: The case of Louise. *Indonesian Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 1–6. https://doi.org/10.31002/ijome.v6i1.560

Díaz-Espinoza, I. A., Juárez-López, J. A., & Miranda, I. (2024). Promoting conceptual change regarding infinity in high school mathematics teachers through a workshop. *Journal on Mathematics Education*, *15*(2), 473–494. https://doi.org/10.22342/jme.v15i2.pp473-494

Dirección General de Bachillerato. (2018). *Cálculo integral. Programa de EStudios. Sexto semestre*. https://dgb.sep.gob.mx/programas-de-estudio

Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that 0.999 …< 1? *Teaching of Mathematics*, *11*(1), 35–40.

Ghedamsi, I., & Lecorre, T. (2021). Transition from high school to university calculus: a study of connection. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 563–575. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01262-1

Gonzalez-Martin, A. S., & Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 479–486. https://eric.ed.gov/?id=ED489755

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4*(2), 317–337. https://doi.org/10.5485/tmcs.2006.0129

Hogue, M., & Scarcelli, D. (2022). Nonequivalent definitions and student conceptions of tangent lines in calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(9), 2391–2421. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1878302

Jones, S. R. (2015). Calculus limits involving infinity: the role of students' informal dynamic reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(1), 105–126. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.941427

Juter, K. (2019). University students' general and specific beliefs about infinity, division by zero and denseness of the number line. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *24*(2), 69–88.

Kattou, M., Thanasia, M., Katerina, K., Constantinos, C., & George, P. (2010). Teachers' perceptions about infinity : a process or an object ? In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1771–1780). www.inrp.fr/editions/cerme6

Krátká, M., Eisenmann, P., & Cihlář, J. (2021). Four conceptions of infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(10), 2661–2685. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1897894

Manfreda Kolar, V., & Hodnik Čadež, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389–412. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9357-7

Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(2), 131–148. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.02.001

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 199–238. https://doi.org/10.1023/A:1016000710038

Villabona Millán, D., Roa Fuentes, S., & Oktaç, A. (2022). Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *40*(1), 179–197. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3277

Wijeratne, C., & Zazkis, R. (2015). On painter's paradox: Contextual and mathematical approaches to infinity. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*(2), 163–186. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0004-z

Wistedt, I., & Martinsson, M. (1996). Orchestrating a mathematical theme: Eleven-year olds discuss the problem of infinity. *Learning and Instruction*, *6*(2), 173–185. https://doi.org/10.1016/0959-4752(96)00001-1

Yopp, D. A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999...=1. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(4), 304–318. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.07.007

Zolt, H., Wrightsman, E., Ford, L., & Patterson, C. L. (2023). Believing in Infinity: Exploring Students' Conceptions of Improper Integrals. *PRIMUS*, *33*(5), 502–516. https://doi.org/10.1080/10511970.2022.2082615