Invariantes Geométricos como uma possibilidade didática

Renan Severo **Ferreira**
Secretária de Educação do Rio Grande do Sul
Brasil
renansevero@hotmail.com
Carmen Vieira **Mathias**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
carmen@ufsm.br

Resumo

Este trabalho constitui um relato de uma atividade realizada em com o objetivo de descrever algumas possibilidades didáticas para o uso dos invariantes geométricos com o auxílio do *software* GeoGebra. Tais possibilidades emergiram a partir da análise do conteúdo produzido por professores participantes de uma oficina realizada de forma remota. No presente trabalho, apresentamos atividades envolvendo invariantes geométricos, desenvolvidas por quatro professores, nas quais identificamos conteúdos e conceitos que podem ser abordados a partir desses invariantes, além de como sua utilização pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Tecnologias; Invariantes geométricos; Formação continuada

Definição e relevância do problema

Quando pensamos na palavra "invariante", nossa imaginação remete a algo que não muda. Se buscarmos o significado dessa expressão no dicionário, encontramos a seguinte definição: “Que não varia”; “em matemática, diz-se de uma grandeza, uma expressão, uma relação, uma propriedade etc., que se conserva inalterada para um grupo de transformações” (Ferreira, 1999, p. 805).

No contexto matemático, Libeskind et al. (2018) afirmam que:

> [...] a invariância é um conceito-chave em matemática. Em qualquer teorema matemático, há algum aspecto de invariância – quando certas propriedades dos objetos mudam, outras podem permanecer invariantes. Os alunos nem sempre reconhecem propriedades invariáveis; portanto, é importante que os professores as apontem quando houver alguma propriedade invariante envolvida. (Libeskind et al., 2018, p. 107).

Além disso, "os invariantes estão muito presentes na matemática e na nossa vida diária, já que o ser humano busca se guiar através de padrões, sejam eles padrões de convivência social, padrões étnicos ou outros." (Lopes, 2012, p. 1).

Na Matemática, e especialmente na geometria, existem inúmeros exemplos de invariantes. Um exemplo claro ocorre quando recortamos uma figura em vários pedaços: a soma das áreas desses pedaços permanece constante e é igual à área da figura original. O mesmo princípio pode ser observado quando um cubo é dividido em vários cubinhos ou quando utilizamos uma corda para formar diferentes figuras – neste caso, o perímetro das figuras é a invariante, pois mantém-se igual ao comprimento da corda (Lopes, 2012, p. 1).

Na Geometria, uma das formas de ilustrar os tipos de invariantes é por meio do uso de um *software* de matemática dinâmica, que permite a construção geométrica de figuras e o deslocamento de seus pontos. Quando esse procedimento é realizado corretamente, utilizando as ferramentas adequadas, percebe-se que determinadas propriedades permanecem inalteradas.

Neste trabalho, buscamos apresentar algumas possibilidades didáticas para o ensino dos invariantes geométricos com o auxílio do *software* GeoGebra. Essas possibilidades foram levantadas por professores durante uma oficina, na qual um dos módulos foi dedicado à exploração do conceito de invariantes geométricos por meio desse *software* de matemática dinâmica.

Referencial teórico

As ferramentas digitais são um recurso valioso para educadores; elas podem ser acessadas pela maioria das pessoas por meio de computadores e dispositivos móveis. Embora trazer esses recursos para o contexto escolar seja um desafio, vale destacar o quanto eles podem ajudar a desenvolver a aprendizagem. Gravina e Santarosa (1999) afirmaram que as ferramentas tecnológicas dão caracterizações dinâmicas aos materiais de aprendizagem. Isso estimula muito os processos cognitivos do aluno. Segundo Gainutdinova et al. (2020), é essencial disseminar métodos que se baseiem no ensino e na utilização de tecnologias, o que é muito produtivo em um espaço educacional, pois ajuda na produção de diversas formas de interação entre o aprendiz e docente. A utilização de softwares de matemática dinâmica pode auxiliar nesse processo, intensificando a imaginação, a manipulação de objetos e ajudando a compreender conceitos.

Gravina (1996) ainda destaca que um aspecto importante do pensamento matemático é a abstração da invariância, visando seu reconhecimento e entendimento, nada melhor do que a variação oferecida pelos softwares. Sobre isso, Machado, Bortolossi e Almeida Junior (2018) destacam a importância desses softwares do ponto de vista cognitivo, pois, com eles, é possível criar infinitos exemplos, o que favorece o aprendizado de conceitos por meio dos invariantes geométricos.

Um desses programas que auxiliam na visualização dos invariantes geométricos é o *software* de Matemática Dinâmica GeoGebra. Com ele, podemos construir figuras da mesma forma que no papel. A diferença é que podemos arrastá-las para qualquer direção, invertê-las e verificar suas congruências — tudo simultaneamente. Leung (2003) afirma que esse é um dos fatores mais significativos dos *softwares* de Matemática Dinâmica, tornando-os poderosos meios para a aquisição de conhecimento. Ao utilizar o recurso de arrasto, conseguimos perceber simultaneamente aspectos relevantes da Geometria, o que é essencial para a formulação de conjecturas matemáticas. O ato de arrastar permite movimentar as figuras e perceber que as propriedades dos entes geométricos construídos não se alteram, e isso pode ser feito de maneira fácil e ágil, facilitando a descoberta.

Para Baccaglini-Frank (2012), atividades que utilizam o arrasto possibilitam a exploração, o que é fundamental para a construção de conjecturas. Essas atividades auxiliam os alunos a mobilizarem seus conhecimentos prévios, contribuindo para o desenvolvimento do aprendizado e a evolução do pensamento matemático. Além disso, atividades que instigam a investigação e a descoberta dos invariantes são realizadas por meio de experiências visuais, facilitadas pela precisão dos *softwares*.

Leivas (2009, p. 22) conceitua a visualização como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos". O autor postula que, na Matemática, a visualização não deve ser vista apenas como a representação de objetos, mas também como uma forma de expressar uma linguagem. Ela pode ser o principal modelo no processo de abstração e desempenha um papel significativo na construção do conhecimento matemático.

Conforme Santos (2014, p. 21), "uma das razões para se investir na implementação da visualização nas salas de aula está associada às habilidades mentais e visuais que os alunos desenvolvem e adquirem". A autora também afirma que:

> [...] imaginar, tocar e manipular são fatores que influenciam no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, proporcionando estrutura para a compreensão de determinados conceitos. E quando o manipular não está ao alcance, a visualização pode conduzir a uma tentativa de dar concretude ao pensamento, construindo uma imagem mental, um significado ao significante. (Santos, 2014, p. 21).

Com o auxílio do *software*, podemos movimentar objetos geométricos e visualizar suas características. Isso também pode ser feito com ferramentas tradicionais, como régua e compasso, que auxiliam na visualização de diversas figuras geométricas. Esses softwares despertam a curiosidade de quem os utiliza. De acordo com Gravina (2001, p. 89), "os ambientes de Geometria Dinâmica também incentivam o espírito de investigação matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento".

Assim, percebe-se que os softwares de Matemática Dinâmica podem ser grandes aliados no desenvolvimento do conhecimento em Geometria. Como o próprio nome sugere, eles são dinâmicos, facilitando as construções geométricas e a visualização de conceitos.

Desenvolvimento da pesquisa

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa aplicada, cujo objetivo é gerar conhecimentos voltados para a aplicação prática, contribuindo para a solução de problemas específicos (Gerhardt e Silveira, 2009, p. 35). Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa qualitativa, pois foca em aspectos da realidade que não podem ser quantificados, priorizando a percepção e a argumentação das relações sociais (Gerhardt e Silveira, 2009).

A pesquisa envolveu quinze professores e acadêmicos de Matemática inscritos na oficina Experiências Matemáticas, conduzida de forma remota por meio do ambiente Moodle. A oficina foi estruturada em quatro módulos, sendo um deles destinado à exploração do conceito de invariantes geométricos. Os participantes foram convidados por meio de divulgação em redes sociais (Facebook e Instagram) e grupos de WhatsApp, além do convite formal a professores da rede municipal de ensino, realizado pelo Núcleo de Tecnologia Educacional Municipal.

Para conduzir a investigação, utilizamos como instrumentos um questionário inicial, realizado por meio de um formulário online do Google em que buscamos identificar o perfil social e educacional dos participantes da pesquisa. Também, ao longo da oficina, foram propostas três tarefas. A primeira, teve como objetivo aprofundar a compreensão do conceito de invariante geométrico, além de proporcionar aos participantes a oportunidade de utilizar o arrasto e a visualização como ferramentas para responder aos questionamentos propostos. A segunda tarefa apresentou uma abordagem alternativa para a exploração dos invariantes geométricos, incentivando os participantes a formular conjecturas. Por fim, a terceira tarefa estimulou a criatividade dos participantes em um ambiente colaborativo, promovendo a troca de ideias e conhecimentos.

Os registros produzidos nas tarefas foram organizados e classificados com base em categorias temáticas. Inicialmente, foram identificadas duas categorias principais: formalismo matemático e aspectos formativos. Na análise das tarefas, trechos com temáticas semelhantes foram agrupados, resultando na subdivisão da categoria formalismo matemático em duas subcategorias: justificativa e conceito. Já a categoria aspectos formativos foi segmentada em três subcategorias: contribuição, possibilidades didáticas e trabalho colaborativo. Neste trabalho, daremos ênfase à subcategoria possibilidades didáticas, explorando como os participantes utilizaram os invariantes geométricos no desenvolvimento das atividades propostas. Daremos ênfase a terceira atividade, pois foi dela que emergiram tal subcategoria.

Possibilidades didáticas

Na terceira atividade proposta, os participantes foram convidados a criar ou editar uma atividade cujo objetivo fosse explorar o conceito de invariante geométrico e, posteriormente, compartilhá-la com os colegas por meio do fórum do ambiente virtual, conforme ilustrado na Figura 1.

Parte 1

Escolha o enunciado de uma atividade de um livro didático, de um site, de uma apostila ou elabore você mesmo, que o foco seja determinar um invariante geométrico. Em seguida, no GeoGebra, construa um arquivo que você utilizaria para abordar essa questão em uma situação de estudo pessoal ou com vista à sala de aula. Poste seu arquivo neste fórum, acompanhado do enunciado da questão e de uma breve descrição de como utilizou o GeoGebra para resolver a questão escolhida.

Você deve realizar a Parte 1 até 03 de Dezembro às 23h59min (horário de Brasília).

Parte 2

Escolha construções realizadas por, no mínimo, dois colegas e interaja com eles fazendo perguntas, sugerindo alterações ou acréscimos em suas construções. Você pode sugerir, por exemplo, um outro modo de utilizar o GeoGebra para abordar a atividade proposta pelo colega, ou, ainda, dizer de que modo utilizaria a proposta do colega (atividade e arquivo do Geogebra) em uma aula sua.

Você deve realizar a Parte 2 até 05 de Dezembro às 23h59min (horário de Brasília).

Figura 1. Atividade colaborativa.

Nessa tarefa, os participantes deveriam desenvolver uma atividade focada na identificação de um invariante geométrico. Em seguida, precisavam construir o arquivo no *software* GeoGebra e publicá-lo no fórum, juntamente com a descrição da atividade. Posteriormente, na etapa denominada Parte 2, os participantes deveriam comentar e sugerir melhorias em pelo menos duas atividades propostas por seus colegas.

A seguir, apresentamos alguns exemplos desenvolvidos pelos participantes. Para preservar a identidade dos autores, utilizamos codinomes, como A1, A2, A3..., A15. A participante A1 elaborou uma atividade envolvendo a construção de uma parábola e de um triângulo baseado na definição da parábola. Conforme descrito por A1, inicialmente, é necessário construir uma parábola no *software* GeoGebra e, em seguida, formar um triângulo cujos vértices são um ponto na parábola, o foco e um ponto na diretriz. Para isso, a participante disponibilizou um protocolo de construção e o respectivo arquivo. ggb, ilustrado na Figura 2.

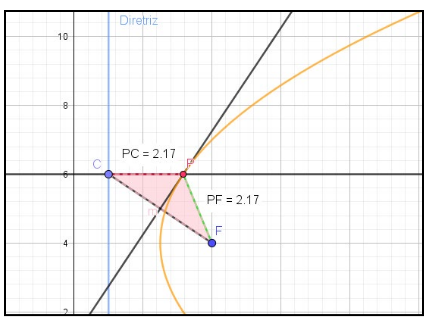

Figura 2. – Construção realizada pela participante A1.

A partir dessa construção, a participante sugeriu a exploração de algumas propriedades geométricas identificadas, o que constitui a segunda parte da atividade, conforme ilustrado na Figura 3.

Parte 2 (Triângulo):

a) Com a ferramenta polígono construa o triângulo CFP;

A depender do nível escolar da turma, há uma porção de propriedades que podem ser exploradas nessa construção.

- Alguns exemplos

Questões:

1) Existe algum invariante geométrico nessa construção?
2) Se sim, quais as características deste objeto? Existe uma classificação precisa para ele?
3) Caso exista essa classificação, como você pode argumentar essa conclusão sobre esse objeto?
4) Você conseguiria, com teoremas matemáticos, demonstrar?

Acredito que o professor poderia também explorar a desigualdade triangular com essa construção, visto que não há o triângulo quando os 3 pontos estão alinhados, ou seja, a soma do módulo de dois segmentos é igual ao módulo do terceiro.

Figura 3. – Parte 2 da tarefa 3, realizada pela participante A1.

A1 destacou as possibilidades de explorar conceitos tanto da Geometria Analítica quanto da Geometria Plana, além do uso de ferramentas menos comuns no GeoGebra, como a função Lugar Geométrico. Dessa forma, os alunos podem visualizar e compreender propriedades geométricas, além de se familiarizarem com novas ferramentas do software, ampliando seu repertório para atividades futuras.

O participante A2 desenvolveu uma atividade que relaciona propriedades do baricentro de triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo qualquer. O resultado, ilustrado na atividade por meio do GeoGebra, é conhecido como o Teorema de Napoleão (Figura 4).

Enunciado: Construa um triângulo ABC em que os pontos A, B e C são livres e sobre cada um de seus lados construa um triângulo equilátero para o exterior de ABC. Trace o triângulo T formado pelos baricentros dos triângulos equiláteros assim obtidos. Movimente os pontos A, B e C. O que você observa em relação ao triângulo T?

No Geogebra usei a ferramenta ponto para criar A, B, C. Em seguida a ferramenta polígono para formar o triângulo ABC. Depois usei a ferramenta polígono regular para construir os triângulos equiláteros. Na sequência usei o comando CentroDeGravidade(<Polígono>) para cada triângulo equilátero e concluí usando a ferramenta polígono para construir o triângulo formado pelos baricentros.

Figura 4. – Parte 1 da tarefa 3, realizada pela participante A1.

O resultado final da construção está representado na Figura 5.

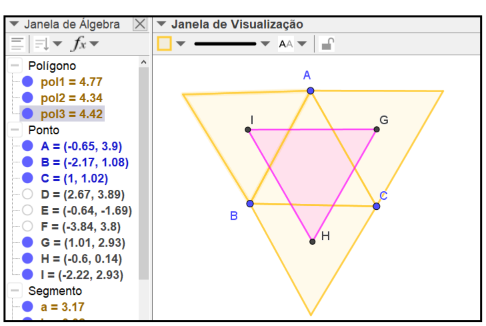

Figura 5. – Construção realizada pela participante A2.

Segundo A2, essa atividade permite levantar conjecturas sobre a natureza do triângulo obtido. Por exemplo, os participantes podem formular a hipótese de que o triângulo formado pelos baricentros dos triângulos equiláteros também seja equilátero. Além disso, as medidas dos lados desse triângulo podem ser analisadas para reforçar a hipótese sobre o invariante geométrico identificado.

O participante A11 propôs uma atividade explorando as relações entre quadriláteros, como ilustrado na Figura 6.

Dado um quadrilátero qualquer ABCD:

- Construa o ponto médio dos lados AB, BC, CD e DA, chamando-os de E, F, G e H, respectivamente.

- Construa o quadrilátero EFGH.

Quais relações possuem ABCD e EFGH e o que EFGH possui que ABCD não necessariamente possui?

Figura 6. – Parte 1 da tarefa 2, realizada pela participante A11.

A construção correspondente está representada na Figura 7.

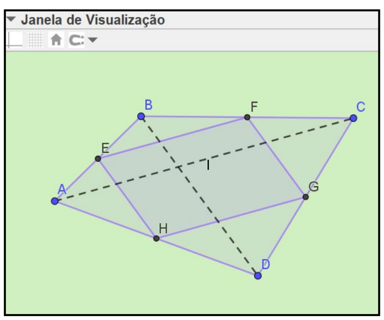

Figura 7. – Construção realizada pela participante A11.

Após a realização da construção, utilizando as retas suporte dos segmentos EH e FG, e aplicando o comando “relação”, verifica-se que essas retas são paralelas. O mesmo procedimento pode ser aplicado aos segmentos EF e GH, permitindo concluir que EFGH é um paralelogramo. Além disso, considerando as diagonais AC e BD, e utilizando o Teorema da Base Média, podemos inferir que o quadrilátero EFGH possui metade da área do quadrilátero ABCD. Esse resultado corresponde ao conhecido Teorema de Varignon.

Outros participantes desenvolveram atividades explorando propriedades de polígonos e invariantes geométricos, como quadriláteros, triângulos isósceles, escalenos, equiláteros e trapézios. Além disso, algumas atividades abordaram conceitos geométricos fundamentais, como ângulos, áreas, baricentro, ortocentro, incentro, circuncentro, medianas, mediatrizes, retas perpendiculares e bissetrizes.

Considerações

Neste trabalho, exploramos a presença dos invariantes em conceitos geométricos, evidenciando que sua aplicação se estende a uma ampla variedade de tópicos da Matemática escolar. As atividades desenvolvidas demonstraram que os invariantes geométricos podem ser abordados de forma significativa tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, proporcionando aos alunos uma compreensão mais aprofundada das propriedades matemáticas envolvidas.

Além disso, a integração dessas atividades com softwares educacionais, como o GeoGebra, amplia consideravelmente as possibilidades didáticas. Durante o trabalho realizado foi possível verificar que o uso de ferramentas tecnológicas pode tornar o processo de ensino e aprendizagem interativo, possibilitando a visualização e manipulação de entes geométricos de forma intuitiva. Esse recurso não apenas potencializa a construção do conhecimento, mas também favorece a autonomia dos alunos no processo de investigação matemática.

Para os professores, a utilização de tecnologias educacionais representa uma oportunidade de inovar suas práticas pedagógicas, enriquecendo as discussões em sala de aula e incentivando a experimentação. Além disso, o uso desses recursos permite a criação de materiais didáticos personalizados, adaptados às necessidades dos alunos e às particularidades dos conteúdos abordados.

Os resultados deste estudo evidenciam que a exploração dos invariantes geométricos por meio de tecnologias digitais pode despertar a curiosidade dos estudantes, estimular o pensamento matemático e promover um aprendizado com maior significado. Dessa forma, reforçamos a necessidade de incentivar o uso de ferramentas tecnológicas no ensino da Matemática, pois elas não apenas enriquecem o processo de ensino e aprendizagem, mas também impulsionam novas descobertas e conexões dentro do universo matemático.

Referências e bibliografia

Baccaglini-Frank, A. (2012). Dragging and making sense of invariants in dynamic geometry. *Mathematics Teacher*, *105*(8), 616–620. https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.8.0616 .

Ferreira, A. B. de H. (1999). *Dicionário eletrônico Aurélio Século XXI*. Nova Fronteira e Lexikon Informática.

Gainutdinova, T. Y., Denisova, M. Y., Shirokova, O. A., & Mikhaylovsky, M. N. (2020). The use of digital and information technologies in order to increase the effectiveness of mathematical education. *Talent Development and Excellence, 12*(3s), 188–198. http://www.iratde.com/index.php/jtde/article/view/263.

Gerhardt, T. E., & Silveira, D. T. (2009). *Métodos de pesquisa* (1ª ed.). UFRGS.

Gravina, M. A., & Santarosa, L. M. C. (1999). A aprendizagem matemática em ambientes informatizados. *Informática na Educação: Teoria e Prática, 1*(2), 73–88. https://lume.ufrgs.br/handle/10183/20962.

Gravina, M. A. (2001). *Ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo* (Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul). https://lume.ufrgs.br/handle/10183/2545.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: A riqueza da possibilidade da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática* (Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná).

Libeskind, S., Stupel, M., & Oxman, V. (2018). The concept of invariance in school mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(1), 107–120. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355992.

Lopes, D. (2012). Invariantes – Como algo que não muda mudará sua vida. In *Anais da XV Semana Olímpica* (pp. 1–9). Maceió.

Machado, E. J. C., Bortolossi, H. J., & Almeida Junior, R. V. (2018). *Explorando geometria 2D e 3D na escola básica com o software gratuito GeoGebra para smartphones e tablets*. Sociedade Brasileira de Matemática. https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2019/06/final-geometria-2d-e-3d-corrigido.pdf.

Santos, A. H. (2014). *Um estudo epistemológico da visualização matemática: O acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização* (Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná). https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/37264.