



## Conocimiento especializado del profesor de Matemática en formación inicial: Argumentos matemáticos de la demostración

**Jennifer Fonseca Castro**

Escuela de Matemática, Universidad Nacional

Costa Rica

[jennifer.fonseca.castro@una.cr](mailto:jennifer.fonseca.castro@una.cr)

**Christian Alfaro Carvajal**

Escuela de Matemática, Universidad Nacional

Costa Rica

[cristian.alfaro.carvajal@una.cr](mailto:cristian.alfaro.carvajal@una.cr)

### Resumen

El propósito de este estudio es identificar las características de los argumentos matemáticos que resultan más persuasivos para los docentes de matemáticas en formación inicial de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA). La investigación se enmarca dentro del paradigma interpretativo y adopta un enfoque cualitativo. Participaron 30 profesores en formación inicial, de los cuales 19 estaban en su cuarto año de bachillerato y 11 en su primer año de licenciatura. Se les aplicó un cuestionario durante el primer semestre de 2022, en el que se presentaron cinco argumentos para demostrar la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Para analizar la información, se utilizó el análisis de contenido, creando seis categorías basadas en las características de los argumentos mencionados por los participantes. Los resultados revelaron que la mayoría de los encuestados considera convincente un argumento matemático cuando utiliza elementos lógicos o matemáticos correctos, cuando las ideas se expresan de forma clara y sencilla, y cuando se emplean elementos matemáticos básicos que facilitan la comprensión del argumento.

*Palabras clave:* Argumentos matemáticos; Conocimiento especializado del profesor de Matemática en formación inicial; Demostración matemática; Formación inicial de profesores de Matemáticas; Matemática Superior.

## Introducción

La demostración es un tema de interés en la Educación Matemática, concretamente en la enseñanza de las Matemáticas. En este sentido, la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) sugiere que debe estar presente en los programas de estudio de todos los niveles educativos. Según Stylianides (2007) investigadores y marcos curriculares plantean la inclusión de las demostraciones matemáticas como parte de la formación de los estudiantes en todas áreas temáticas y en todos los niveles educativos ya que son la base que permite comprender el conocimiento matemático.

En el caso de Costa Rica, la demostración forma parte del currículo matemático de la educación secundaria, concretamente, el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) la considera parte del proceso denominado razonar y argumentar. Tanto en las Matemáticas como en la Educación Matemática existen dos posiciones sobre la demostración, una que alude más a los aspectos lógicos-sintácticos en donde se considera como una secuencia de pasos utilizando reglas lógicas para garantizar una conclusión y otra que refiere más a lo semántico en donde lo fundamental sean las ideas que favorezcan la comprensión matemática (Durand-Guerrier et al., 2012a; Durand-Guerrier et al., 2012b; Hanna y De Villiers, 2012).

Si bien es cierto, el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas sobre los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos de la demostración es importante, también se debe considerar que, tanto en la demostración de teoremas como en la evaluación de los argumentos matemáticos propuestos por sus alumnos, los profesores pueden considerar otros elementos de convicción que les hagan tomar decisiones sobre su validez. Por tal razón, el propósito de esta investigación es estudiar las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores de Matemáticas en formación inicial.

## Elementos teóricos o conceptuales

En la comunidad matemática la aceptación de un teorema consiste en un proceso social en donde tiene más relevancia la comprensión y el significado que una demostración rigurosa del mismo. Algunos investigadores han indicado que la convicción de los profesores de Matemáticas sobre algún resultado puede estar basada en algunos elementos diferentes a su propio conocimiento (Knuth, 2002; Lin et al., 2012). Esto es relevante debido a las implicaciones que pueda tener en su desempeño profesional para el abordaje de la enseñanza de la demostración. Por tal razón, consideramos a la convicción de un argumento matemático, como las razones por las que los profesores de Matemáticas encuentran convincente a un argumento matemático.

El término argumento es una unidad discursiva básica de la argumentación y puede entenderse de diferentes formas en función del enfoque de esta (Lo Cascio, 1998; Vega, 2012). Para De Villiers (1993) y Hanna (2002), la demostración es un argumento cuyo propósito es garantizar la validez de una proposición matemática. Puede tener diversas formas de razonamiento, siempre y cuando sea convincente y aceptada por la comunidad, ya que en las Matemáticas la convicción se puede lograr empleando formas alternativas a una demostración lógica y formal (Stylianides, 2007). Según Crespo et. al. (2010), se distinguen seis formas: (i) las argumentaciones abductivas, donde se parte de una implicación, su consecuente y se deduce el

antecedente; (ii) las argumentaciones inductivas, en las que se determina la validez de una proposición basándose en el análisis de un número reducido de casos; (iii) las argumentaciones no monotónicas, que permiten ajustar los supuestos en función de nuevos casos o información; (iv) las argumentaciones visuales, que derivan conclusiones a partir de diagramas; (v) las argumentaciones a conocimiento cero, se refieren a demostraciones que en realidad no lo son; y (vi) las argumentaciones gestuales, en las que se defiende o expresa una idea mediante movimientos y ademanes. Lo anterior se utiliza de base para la selección de las demostraciones mostradas a los sujetos de investigación en el instrumento de recolección de información, a excepción de la forma (vi) por razones obvias.

### Elementos metodológicos

En esta investigación pretendemos profundizar y comprender cuáles son las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los 30 profesores en formación inicial participantes en el estudio que estaban matriculados durante el primer semestre del 2022 en la carrera denominada Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, 19 en el cuarto año que conformaron el grupo de bachillerato (GB) y 11 en el quinto año que consideramos como el grupo de licenciatura (GL).

Para la recolección de la información se aplicó un cuestionario con una duración aproximada de una hora y que los sujetos completaron de forma individual en los horarios asignados a los cursos matriculados. Puesto que nuestro interés era analizar las características de los argumentos matemáticos más convincentes para los sujetos de investigación, hemos considerado pertinente utilizar un resultado matemático presente en los programas de estudio de Matemáticas de la educación secundaria en Costa Rica, complejo e importante en la formación matemática de los estudiantes de secundaria (Romero y Rico, 1996) y necesario en el conocimiento del profesor de Matemáticas: la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Dicho resultado es sugerido en tales programas de estudios para introducir a los números irracionales.

La variedad de argumentos matemáticos para demostrar la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, así como las particularidades de cada una, las hemos considerado relevantes para poder caracterizar a los argumentos más convincentes. De esta manera, y de la mano con lo expuesto por Crespo et. al. (2010), se presentan cinco argumentos matemáticos que pretenden garantizar la validez de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Todos los argumentos, excepto el número 2, corresponden a demostraciones matemáticas correctas de este resultado. El argumento número 2 es una demostración matemática correcta, pero de la existencia de tal raíz, no de su irracionalidad. Posteriormente, se les pidió a los sujetos que ordenaran los cinco argumentos del 1 al 5 en donde 1 era el más convincente para ellos hasta el 5 que consideraran como el menos convincente. Además, debían brindar las razones por las que escogían al más y al menos convincentes.

Para analizar la información del cuestionario se empleó el análisis de contenido que es una técnica científica de investigación para hacer inferencias replicables y válidas de textos (u otra materia significativa) a los contextos de su uso. Este análisis implica el uso de procedimientos especializados, proporciona nuevas ideas, aumenta la comprensión del investigador de fenómenos particulares o informa acciones prácticas. Además, la frecuencia no es igual a la

importancia, y no decir algo puede ser tan importante como decir algo. El análisis de contenido analiza solo lo que está presente en lugar de lo que falta o no se dice (Cohen et al., 2007; Krippendorff, 2004). A partir de la revisión de las respuestas de los sujetos se consideraron seis categorías de análisis que consisten en las razones fundamentales por las que los sujetos consideran a un argumento matemático convincente. Estas se presentan en la Tabla 1 siguiente.

Tabla 1  
*Categorías de análisis emergentes de los resultados obtenidos del cuestionario.*

<b>Categorías de análisis</b>	<b>Definición de la categoría</b>
<b>(1) El uso de elementos concretos en el argumento</b>	El argumento es convincente debido a que se basa en ejemplos específicos o utiliza alguna referencia visual.
<b>(2) La familiaridad del argumento</b>	El argumento es convincente debido a que el profesor lo conoce o lo ha utilizado anteriormente, la convicción no se basa en las Matemáticas utilizadas, sino en la experiencia previa del profesor de Matemáticas con el argumento.
<b>(3) La forma ritual del argumento</b>	El argumento es convincente en función de su apariencia superficial en lugar de considerar los elementos de fondo.
<b>(4) La validez del argumento</b>	El argumento es convincente debido al uso de elementos lógicos o matemáticos correctos.
<b>(5) La simplicidad matemática del argumento</b>	El argumento es convincente porque se emplean elementos matemáticos simples y básicos que facilitan la comprensión del argumento.
<b>(6) La claridad del argumento</b>	El argumento es convincente debido a que las ideas planteadas se comprenden de manera clara y sencilla.

*Fuente:* elaboración propia

## **Resultados**

Los resultados se presentan considerando las respuestas de los sujetos de investigación en torno a las siguientes cuestiones: (a) escoger el orden en el que los argumentos le parecen más convincentes, (b) explicar las razones por las que ha escogido al argumento más convincente y (c) explicar las razones por las que ha escogido al argumento que le parece menos convincente.

En la Tabla 2, se presenta para cada argumento, la cantidad de sujetos que lo consideran como el más convincente y el menos convincente. Se puede observar que la gran mayoría de sujetos de investigación consideró al argumento 3 como el más convincente. Este argumento es el que usualmente se presenta a los profesores de Matemáticas en formación inicial en algunos cursos de la carrera de Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica, por lo que podríamos suponer que les es bastante familiar. Además, es el argumento que se presenta en las recomendaciones metodológicas en los programas de estudios de Matemáticas para la educación secundaria en Costa Rica dirigidas a los profesores para favorecer el proceso de razonar y argumentar en sus alumnos. Asimismo, se puede notar que los argumentos 1 y 2

fueron los menos convincentes para los sujetos de investigación. Es interesante que, solo el argumento 2 no corresponde a una demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, ya que únicamente demuestra su existencia y, sin embargo, únicamente ocho sujetos lo eligieron como el menos convincente. Además, solo seis de ellos detectaron que no era una demostración de la proposición dada en función de ese hecho. Si la convicción sobre la validez de un argumento estuviera basada únicamente en aspectos lógico-matemáticos, sería esperable que el argumento 2 sea el menos convincente de todos, por no ser una demostración matemática de la propiedad dada, sin embargo, no es el caso en nuestro estudio.

Tabla 2

*Número de sujetos que consideran a los argumentos más o menos convincentes.*

Número de argumento	Cantidad de sujetos que lo eligen como el más convincente	Cantidad de sujetos que lo eligen como el menos convincente
1	2	15
2	1	8
3	24	0
4	2	1
5	1	6

*Fuente:* elaboración propia basado en los resultados del cuestionario aplicado por los autores en 2022.

Esta situación, nos permite observar que la convicción de los profesores de Matemáticas sobre la validez de un argumento matemático tiene muchos matices. En cuanto a las características de los argumentos más convincentes, en la Tabla 3, se presentan el número de sujetos que evidenciaron en sus respuestas algunas de las características mencionadas.

Tabla 3

*Número de sujetos asociados a las características de los argumentos más convincentes.*

Características de los argumentos más convincentes	Cantidad de sujetos
(1) El uso de elementos concretos en el argumento.	1
(2) La familiaridad del argumento.	4
(3) La forma ritual del argumento.	1
(4) La validez del argumento.	23
(5) La simplicidad matemática del argumento.	5
(6) La claridad del argumento.	9

*Fuente:* elaboración propia basado en lo resultados del cuestionario aplicado por los autores en 2022.

Podemos observar que las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores en formación inicial en orden descendente son: la validez para 23 de los 30 sujetos, la claridad para 9 de los 30 sujetos y la simplicidad matemática para 5 de los 30 sujetos. Todas estas características apelan más a elementos de fondo que de forma en el argumento. Esto podría explicarse porque los sujetos de investigación están finalizando su

formación inicial en la que han estado involucrados en procesos de demostración más formales en donde se brinda mayor importancia a los aspectos rigurosos. Se puede apreciar que las características que aluden más a la forma del argumento han sido señaladas por pocos sujetos: la familiaridad en 4 de los 30 sujetos, la forma ritual en 1 de los 30 sujetos y el uso de elementos concretos en 1 de los 30 sujetos. La convicción en las Matemáticas puede estar asociada a otros elementos alternativos a los aspectos lógico-formales, de hecho, la aceptación de nuevos resultados en la comunidad matemática, se considera un proceso social en donde quizás los aspectos más relevantes sean la comprensión y el significado (De Villiers, 1993; Hanna, 2002).

### Conclusiones

El estudio de las características de los argumentos matemáticos más convincentes para los profesores de Matemáticas puede tener aristas más complejas que la sola consideración de los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos. En la convicción pueden intervenir elementos psicológicos, pues como señala Knuth (2002) en su investigación, algunos profesores estaban más convencidos por argumentos empíricos, aunque eran conscientes de que tales argumentos no eran demostraciones. Según Knuth (2002), es posible que los profesores de Matemáticas tengan diferentes tipos de convicción, tales como la convicción matemática o la convicción personal o psicológica. De los cinco argumentos matemáticos propuestos como demostraciones de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos en el cuestionario, el argumento 3 fue considerado como el más convincente por los profesores de Matemáticas en formación inicial. Dicho argumento es el que tradicionalmente se presenta a los sujetos de investigación en diferentes cursos de la carrera y es el que se recomienda emplear a los profesores en el programa de estudios de Matemática en la educación secundaria costarricense. Es posible que la familiaridad de los sujetos de investigación con dicho argumento influyera en su escogencia, sin embargo, la gran mayoría brindaron otras razones diferentes a esta.

Los argumentos 1 y 2 fueron los que más sujetos de investigación eligieron como los menos convincentes. El hecho de que solo 8 sujetos eligieran al argumento 2 como el menos convincente sugiere que los profesores pueden basar su convicción en otros aspectos diferentes a la corrección lógico-matemática. Es decir, si la validez lógico-matemática hubiese sido el único criterio de elección, sería esperable que todos los 30 sujetos escogieran al argumento 2 como el menos convincente por no corresponder a una demostración de la irracionalidad de raíz cuadrada de dos. Aunque el objetivo de nuestra investigación no era estudiar las características de los argumentos menos convincentes, hemos considerado este hecho digno de mención y como un elemento a considerarse en la formación inicial de los profesores de Matemáticas.

En cuanto a las seis características de los argumentos más convincentes consideradas en nuestro estudio, hemos apreciado que su ordenación por la cantidad de menciones es: I (4) la validez del argumento, II (6) la claridad del argumento y III (5) la simplicidad matemática del argumento. Las restantes características, (1) el uso de elementos concretos en el argumento, (2) la familiaridad del argumento y (3) la forma ritual del argumento, tuvieron muy pocas menciones. Por lo tanto, la mayoría de los sujetos encuentran a un argumento matemático convincente debido al uso de elementos lógicos o matemáticos correctos, porque las ideas planteadas se comprenden de manera clara y sencilla y además porque se emplean elementos matemáticos simples y básicos que facilitan la comprensión del argumento. Las características de

los argumentos matemáticos a las que la mayoría de los sujetos de investigación hicieron referencia en nuestro estudio están relacionadas más con el fondo que con la forma del argumento. Este resultado difiere de lo hallado por Knuth (2002) en su investigación, pues según este autor las características de los argumentos que los profesores de Matemáticas consideraron más convincentes en gran parte se relacionaban más con la forma que con el fondo, es decir, que los profesores se referían a cualidades relacionadas con la forma de un argumento: características del argumento, la familiaridad del profesor con el argumento, la cantidad de detalles proporcionados por el argumento o el método particular utilizado al construir el argumento. Para buscar una posible explicación de esta diferencia destacamos que en nuestro estudio los sujetos de investigación eran profesores de Matemáticas en formación inicial, por lo tanto, posiblemente el componente matemático tiene mayor importancia y relevancia en su convicción mientras que en el estudio de Knuth (2002) los 16 profesores participantes tenían una experiencia laboral entre los 3 a 20 años por lo que es posible que consideren otros factores, además de los aspectos lógico-matemáticos.

Existe consenso y un amplio reconocimiento a nivel internacional sobre el papel de la demostración matemática en la formación de los estudiantes en todos los niveles educativos (Cabassut et al., 2012; Mariotti, 2006; Stylianides, et al., 2017). En algunas ocasiones, como parte del desempeño profesional de los profesores de Matemáticas deben promover en sus alumnos procesos de razonamiento y argumentación para que comprendan la manera en la que esta actividad se lleva a cabo en la disciplina matemática, los orígenes y las conexiones del conocimiento matemático y nuevos métodos para resolver problemas (Durand-Guerrier et al., 2012a; Stylianides et al., 2017; Zaslavsky, et al., 2012). Esto implica que el profesor tenga que plantear tareas a sus estudiantes en las que deban realizar exploraciones, validar e interpretar resultados que origine la necesidad de realizar demostraciones (Durand-Guerrier et al., 2012a; Zaslavsky et al., 2012). Lo anterior sugiere que la demostración matemática debe formar parte del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, sin embargo, consideramos que las características de los argumentos más convincentes para los profesores de Matemáticas pueden tener una influencia importante en su conocimiento y en la forma en la que aborde la enseñanza de este tema en la clase de Matemáticas, por lo tanto, merece especial atención en futuras investigaciones como en la formación inicial y continua de los profesores de Matemáticas.

### Referencias y bibliografía

- Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. & Morselli, F. (2012). Conceptions of proof—In research and teaching. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169-190). Springer, Dordrecht: [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6\\_7](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_7)
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (sixth edition). London: Routledge.
- Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), 287-317. <http://www.redalyc.org/pdf/335/33508304.pdf>
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, (26), 15-30.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012a). Argumentation and proof in the mathematics classroom. *Proof and proving in mathematics education: The 19<sup>th</sup> ICMI study*, 349-367.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012b). Examining the role of logic in teaching proof. *Proof and proving in mathematics education: The 19<sup>th</sup> ICMI study*, 369-389.
- Hanna, G. (2002). Mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6\\_1](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_1)

- Hanna, G., & De Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. *Proof and proving in mathematics education: The 19<sup>th</sup> ICMI study*, 1-10.
- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, 33(5), 379-405.
- Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology*. California: Sage Publications.
- Lin, F. L., Yang, K. L., Lo, J. J., Tsamir, P., Tirosh, D., y Stylianides, G. (2012). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. *Proof and proving in mathematics education: The 19<sup>th</sup> ICMI study*, 327-346.
- Lo Cascio, V. (1998). Gramática de la argumentación: estrategias y estructuras. Madrid: Alianza Editorial, S.A.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publisher.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado. San José: autor. <https://mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Thales.
- Romero, I. y Rico, L. (1996). Sobre la introducción del concepto de irracionalidad en enseñanza secundaria: el caso de U2. *Educación Matemática*, 8(02), 18-32.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237-266).
- Vega, L. (2012). Inducción. Compendio de lógica, argumentación y retórica. En L. Vega. y P. Olmos (Eds), *Argumentación* (pp. 66-74). Madrid: Editorial Trotta.
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I. & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. En *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215-229). Dordrecht: Springer.