Processos de raciocínio mobilizados por estudantes de CDI para compreensão da Integral de Riemann

Alex Sandro de **Castilho**
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
alexs@utfp.edu.br
André Luis **Trevisan**
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
andreluistrevisan@gmail.com
Tainá Taiza de **Araujo**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
taina.taiza.araujo@gmail.com

Resumo

Este estudo investigou os processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Engenharia de uma Universidade Pública do Brasil ao resolverem uma tarefa exploratória sobre Somas de Riemann. De abordagem qualitativa e interpretativa, a pesquisa analisou como esses processos contribuíram para a construção de camadas de conhecimento associadas às Integrais de Riemann. Os estudantes formularam conjecturas, algumas das quais foram refutadas, exigindo reformulações e novas justificativas, e, posteriormente, elaboraram uma generalização para uma conjectura validada. Esses processos ativaram elementos fundamentais para a compreensão da estrutura da Integral de Riemann, destacando-se a Camada do Produto e a Camada da Soma.

Palavras-chave: Ensino de cálculo diferencial e integral; Integrais definidas; Integrais de Riemann; Processos de raciocínio Matemático.

Introdução

As dificuldades dos estudantes na compreensão dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e sua relação com a forma como esses conceitos são ensinados têm sido objeto de pesquisas em Educação Matemática há décadas. Estudos apontam que ambientes de ensino baseados na resolução de tarefas exploratórias (Trevisan & Mendes, 2018; Trevisan et al., 2021) desempenham um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio matemático (Jeannotte & Kieran, 2017; Trevisan & Araman, 2021; Trevisan et al., 2024), envolvendo a formulação e testagem de conjecturas, e justificações (Lannin et al., 2011). No CDI, pesquisas destacam que muitos alunos apresentam dificuldades em aplicar o conceito de integração, tanto na Matemática quanto em cursos de ciências subsequentes. Nesse sentido, a compreensão da estrutura da soma de Riemann é essencial para um entendimento robusto da integração definida (Jones et al., 2017).

Diante desse cenário, torna-se necessário o uso de tarefas que estimulem o raciocínio matemático e evidenciem a relação entre conceitos, sua aplicabilidade na resolução de problemas e a lógica subjacente aos procedimentos matemáticos. Este trabalho, fruto de uma intervenção com estudantes de Engenharia cursando CDI, investiga o papel dessas tarefas na construção de conceitos da disciplina, com foco nas camadas de conhecimento associadas às Integrais de Riemann (Sealey, 2006, 2014): produto, soma, limite e função. O objetivo é identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes ao resolverem uma tarefa e compreender como esses processos contribuem para a formulação dessas camadas de conhecimento. Na próxima seção, apresentamos a fundamentação teórica sobre a aprendizagem do conceito de integral definida e os processos do raciocínio matemático.

Fundamentação Teórica

Processos do raciocínio matemático

O raciocínio matemático é essencial na aprendizagem da matemática, especialmente no CDI. Estudos indicam que as ações do professor, como a escolha de tarefas e a comunicação em sala, têm papel central nesse desenvolvimento (Mata-Pereira & Ponte, 2017). Ellis et al. (2018) ressaltam que as discussões devem focar tanto em conceitos quanto na construção de significados por meio da comunicação.

Embora haja diversas definições de raciocínio matemático, há consenso de que ele envolve inferências justificadas (Jeannotte & Kieran, 2017; Ponte et al., 2020). A formulação de conjecturas e a identificação de padrões são processos cruciais para que os estudantes construam estratégias de resolução, mesmo antes de validá-las formalmente (Ponte et al., 2020).

Processos como generalização e comparação também são fundamentais. A generalização amplia propriedades para conjuntos maiores (Jeannotte & Kieran, 2017), enquanto a comparação analisa semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos. A justificação visa garantir a validade das inferências feitas, utilizando métodos como coerência lógica, contraexemplos ou exaustão (Ponte et al., 2020).

Aprendizagem do conceito de integral definida

Muitos estudantes concluem o CDI sem compreender plenamente as Somas e Integrais de Riemann, tratando-as apenas como procedimentos de cálculo, sem reconhecer sua importância conceitual (Sealey, 2014). Estudos mostram que, embora os alunos desenvolvam habilidades procedimentais avançadas, apresentam dificuldades em conectar diferentes representações da integral e compreender seus diversos significados (Greefrath et al., 2021).

Para superar essas dificuldades, Greefrath et al. (2021) propõem quatro modelos mentais básicos da integral definida: o modelo de área, que a interpreta como a medida da região delimitada pelo gráfico da função; o modelo de reconstrução, que relaciona a integral à variação total de uma quantidade; o modelo de média, que associa a integral ao valor médio de uma função contínua; e o modelo de acumulação, que enfatiza a integral como um somatório de pequenas contribuições.

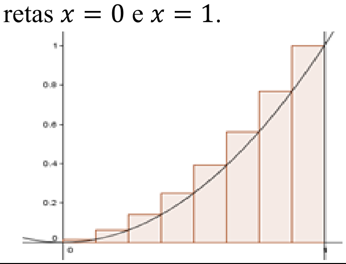
Além disso, Sealey (2014) sugere que a compreensão da Integral de Riemann envolve quatro camadas: Produto (multiplicação entre taxa e variação), Soma (aproximação por soma de Riemann), Limite (tendência da soma para um valor exato) e Função (interpretação da integral como uma função do limite superior de integração). A análise apresentada a seguir busca relacionar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes à construção dessas camadas conceituais.

Contexto da pesquisa e procedimentos metodológicos

Este estudo é uma pesquisa qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), baseada em dados de uma intervenção com estudantes ingressantes em um curso de Engenharia, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI 1), ministrada pelo segundo autor. A pesquisa faz parte de uma investigação maior sobre a organização de tarefas de aprendizagem para o desenvolvimento do raciocínio matemático e a construção de conceitos de CDI (Trevisan & Araman, 2021). Durante a intervenção, os estudantes foram organizados em grupos (3 a 4 integrantes) para discutir e resolver tarefas, seguidas por uma plenária. A tarefa, apresentada no Quadro 1, é um problema matemático estruturado, que favorece o desenvolvimento da linguagem e da formalização matemática (Ponte, 2005).

Quadro 1
Tarefa: Área de um segmento parabólico

1. Considere a região delimitada pela curva $f(x) = x^2$, pelo eixo e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.
a) Suponha que a região seja preenchida por retângulos, como na figura ao lado, todos com a mesma base. Construa uma sequência em que cada termo representa a medida da área de um desses retângulos. Trabalhe com frações.
b) Represente em notação de somatório a soma desses termos e efetue seu cálculo.
c) Nesse contexto, construa uma figura que ilustre $\sum_{i=0}^{7} \frac{1}{8} f(x_i)$.



Fonte: Adaptado de Trevisan et al. (2024).

A tarefa proposta enfatiza o modelo mental básico de área (Greefrath et al., 2021), promovendo a interpretação da integral definida como medida da área delimitada pelo gráfico da função e o eixo x. Além disso, busca explorar as camadas da Integral de Riemann (Sealey, 2014), conforme ilustrado no Quadro 2, permitindo que os alunos compreendam sua estrutura completa.

Quadro 2
Camadas da Integral de Riemann na Tarefa

Camada	**Representação simbólica**	**Tarefa: Área do segmento parabólico**
Camada 1: Produto	$[\frac{1}{c}.f(x_i)].[\triangle x]$	Representa a medida da área em um intervalo
Camada 2: Soma	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$	A medida da área aproximada acumulada em todos os intervalos
Camada 3: Limite	$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$	A medida da área exata acumulada em todos os intervalos
Camada 4: Função	$f(b) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{b} f(x_i) \triangle x$	Medida de área acumulada conforme b varia

Fonte: Adaptado de Trevisan et al. (2024).

Foram coletados registros escritos e gravações das discussões dos estudantes, transcritos e analisados para compreender os processos de raciocínio envolvidos, com foco em grupos que apresentaram argumentação e negociação de significados (Rodrigues et al., 2018). Este artigo analisa um grupo de três estudantes, identificando os processos de raciocínio matemático e sua relação com as camadas de conhecimento das Integrais de Riemann, seguindo abordagens metodológicas de Carneiro et al. (2022).

Apresentação e Análise de Dados

Nos trechos a seguir, enquanto o grupo resolve o item (a) da tarefa, evidenciamos elementos das primeiras camadas da Integral de Riemman e os processos de raciocínio envolvidos:

Estudante 02: *Acho que [a altura] é zero dois, zero quatro né? É isso mesmo.*
Estudante 01: *O zero vírgula seis ele tá na mesma altura aqui?*
Estudante 02: *Então, foi o que eu falei, o zero quatro tá, o zero quatro tá certinho mas esse daqui eu acho que não tá não.*

Inicialmente, o grupo conjectura que os valores no eixo y representam a altura dos retângulos, mas percebe que essa relação não se mantém para todos. Assim, descartam essa hipótese e, na busca por outra abordagem, formulam a conjectura de que a altura dos retângulos pode ser determinada pela expressão algébrica da função:

Estudante 02: *Aqui ó, ele dá a fórmula [$f(x) = x^2$].*
Estudante 01: *O x a gente pode colocar tipo um oitavo, dois oitavos, três oitavos, quatro oitavos…*
Estudante 02: *Se você fizer a conta do [cinco] oitavo[s] aqui ó, a altura disso aqui vai dar zero vírgula trinta e quatro… [na verdade] trinta e nove, é bem aproximado, se você usar, isso daqui, aqui como cinco oitavos e esse daqui…*

O estudante 02 sugere usar $f(x) = x^2$ para calcular as alturas, substituindo os valores de x. Para validar os resultados, convertem frações em decimais e confirmam a proximidade com os valores do eixo y. Após essa generalização, a discussão passa para a determinação das bases:

Estudante 01: *A base seria cinco oitavos e a altura zero quatro, você vai ter que construir a sequência do retângulo.*
Estudante 02: *Essa daqui é a área do primeiro retângulo, que é altura é… não, tá errado, aqui é um oitavo, porque a base é um oitavo só.*
Estudante 01: *A base do retângulo né? É porque no caso dos retângulos ele ia pegar, aqui ó a base dele aqui ó seria esse valor, esse aqui.*
Estudante 02: *Aham, que é um oitavo.*

O grupo inicialmente conjectura que a base é $f(x)$, mas logo descarta essa ideia, reconhecendo que é a distância entre pontos consecutivos, sempre $\frac{1}{8}$. A discussão prossegue:

Estudante 02: *A altura do primeiro é zero, aí esse daqui seria dois oitavos. É elevado ao quadrado. Dá um dezesseis avos.*
Estudante 01: *Deixa eu anotar aqui.*
Estudante 02: *Altura do primeiro é zero, segundo é um dezesseis avos, do terceiro é quanto?*
Estudante 01: *Da nove [sobre] sessenta e quatro.*
Estudante 02: *Talvez tenha um retangulozinho aqui, mas é que a gente não tá vendo.*
Estudante 01: *Pode ser.*
Estudante 03: *Eu também acho que tem um retangulozinho aqui.*
Estudante 02: *Aqui tem um retângulo pequeno? Ou é zero mesmo?*
Estudante 01: *Tem, aqui não é zero.*
Estudante 02: *Aqui é um oitavo, não, calma. É um sobre oito ao quadrado. Aqui é um [sobre] sessenta e quatro.*
Estudante 01: *Isso aí, agora tá certo. Agora quatro oitavos que é esse daqui. Tem que dar maior que zero [vírgula] dois.*
Estudante 02: *Quatro vezes quatro é dezesseis. Fica então dezesseis sessenta e quatro que dá para simplificar, dá para simplificar por quatro dezesseis eu acho. Não, dá quatro dezesseis, é só simplificar, [fica] um quarto.*

O estudante 2 inicialmente conjectura que a altura do primeiro retângulo é zero, justificando empiricamente pela representação gráfica. No entanto, ele logo percebe o erro e reformula, concluindo que a altura é $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$, validando com notação decimal. Além disso, o grupo simplifica frações, possivelmente por hábito, o que dificulta a percepção de um padrão na sequência de alturas. Após calcular todas as áreas, o estudante 2 identifica um padrão e inicia um processo de generalização.

Estudante 02: *Então eu acho que é esse daqui. Esse daqui é a altura de cada termo, e a largura é sempre um oitavo, então eu acho que a somatória vai ser… vai ser… n oitavo ao quadrado vezes um oitavo, vai ser cada termo.*

Nesse trecho, temos que o estudante 2 generaliza que $\left(\frac{n}{8}\right)^2\frac{1}{8}$ seria uma forma algébrica para representar as medidas das áreas, sendo $\left(\frac{n}{8}\right)^2$ a medida da altura, e $\frac{1}{8}$ a medida da base.

No item (b), o grupo deveria representar as áreas em notação de somatório e calcular sua soma, mas opta por somar termo a termo, ignorando a notação pedida. No último item, deveriam construir uma figura para a expressão $\sum_{i=0}^{7}\frac{1}{8}f(x_i)$, *comparando-a com a soma* $[\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{8}f(x_i)]$. A intenção era que reconhecessem a relação com soma superior e inferior, mas, em vez disso, discutem apenas o significado da notação e seu valor, sem construir a figura.

Estudante 01: *A somatória começa no zero. De zero até sete.*
Estudante 02: *É, vai um pouquinho antes.*
Estudante 01: *Vai ter que fazer a mesma coisa que a gente fez. Mas uma parte é diferente, porque i é igual a zero e vai até sete.*
Estudante 02: *O i_2, i_3, i_4, até o i_8, é a mesma coisa. O i_1 vai ser zero e o i_8 não tem. Do um ao sete a gente já tem.*
Estudante 01: *Será que é isso?*
Estudante 02: *Se substituir aqui vai ser a mesma coisa de substituir na nossa, mano. O número é igual. Ele vai começar no zero, então tem que fazer desde o zero.*

O grupo conjectura corretamente que a nova soma difere da anterior apenas pela ausência de i_8 e pela inclusão de i_0, reconhecendo a translação da partição. O estudante 2 estabelece comparações para justificar essa conclusão. No entanto, ao afirmar que os valores das somas seriam iguais, cometem um equívoco, pois a nova soma não inclui a área do último retângulo. Além disso, não elaboram conjecturas sobre a representação gráfica do somatório, indicando que nem todos os elementos da Camada da Soma da Integral de Riemann foram ativados.

Sintetizando esta análise destacamos que foram fundamentais as discussões entre os estudantes que possibilitaram a mobilização de diferentes processos de raciocínio organizados no Quadro 3.

Quadro 3
Processos de raciocínio envolvidos na discussão do grupo.

Formular conjecturas	• Os valores representados no eixo y correspondem à medida da altura dos retângulos; • A medida da altura dos retângulos pode ser calculada a partir da expressão algébrica da função; • A medida da base do retângulo é igual ao valor da função do ponto de abscissa x; • A medida da base é a distância entre dois pontos consecutivos da partição;

	• A medida da altura do primeiro retângulo é zero; • A medida da área do primeiro retângulo é nula. • A medida da altura do primeiro retângulo é $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$.
Justificar	• A expressão $f(x) = x^2$ pode ser usada para cálculo da medida da altura dos retângulos • Os valores em notação decimal podem ser comparados com valores indicados no eixo y na representação que estava junto ao enunciado da tarefa. • A representação gráfica, mostra um primeiro retângulo com medida de altura muito próxima de zero. • Os termos i2 até i7 serão os mesmos nas somas dos itens (a) e (c), mas i1 vai ser zero, e não vai existir i8.
Comparar	• A soma no item (c) é quase a mesma que do item (a). • O valor das somas dos itens (a) e (c) são os mesmos.
Generalizar	• Em qualquer um dos retângulos, a medida da base sempre será igual a um oitavo; • $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$ é a expressão geral para representar as medidas das áreas.

Fonte: Adaptado de Trevisan et al. (2024).

Tais processos, por sua vez, foram fundamentais para compreensão da Camada do Produto, e de alguns elementos da Camada da Soma da estrutura da Integral de Riemann (Sealy, 2014), atreladas ao modelo mental básico de área (Greefrath et al*.,* 2021). Dentre os elementos da Camada do Produto, destacamos: o reconhecimento da existência de uma medida constante da base de cada retângulo; do valor variável da medida da altura de cada retângulo, correspondendo ao valor da função dada no ponto final de cada subintervalo da partição; da formulação da expressão $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$, que generaliza a medida da área de cada retângulo como o produto da medida da sua base pela medida da sua altura. Sobre a Camada da Soma, há uma compreensão da notação de somatório, em especial da participação envolvida; também, da ideia de medida de área subjacente à essa adição de base.

Considerações finais

Neste trabalho, investigamos os processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de CDI na resolução de uma tarefa exploratória (Trevisan & Mendes, 2018; Trevisan et al., 2021) e analisamos como esses processos contribuem para a construção das camadas de conhecimento associadas às Integrais de Riemann. Os resultados indicam que a tarefa estimulou o modelo mental de área (Greefrath et al., 2021) e ativou duas camadas fundamentais da estrutura da integral (Sealey, 2014): Produto e Soma. A Camada do Produto foi acessada quando os estudantes compreenderam como calcular a área de cada retângulo, identificando a base comum e associando a altura ao valor da função nos pontos específicos. Esse entendimento emergiu por meio de processos como formulação de conjecturas, justificativas baseadas em conceitos e representações visuais, estabelecimento de relações entre soma e notação de somatório, além da generalização da área dos retângulos de forma algébrica (Jeannotte & Kieran, 2017).

Já a Camada da Soma foi explorada por meio da notação de somatório, mas sua compreensão pelos estudantes foi limitada. O reconhecimento do padrão matemático envolvido na soma foi comprometido pela simplificação das frações que representavam as alturas dos retângulos, o que dificultou a identificação da estrutura subjacente. De maneira geral, a tarefa demonstrou potencial para introduzir intuitivamente o conceito de Integral de Riemann e familiarizar os alunos com seus elementos essenciais. Embora o professor tenha planejado a exploração das quatro camadas da integral, no grupo analisado, as camadas Limite e Função não foram ativadas espontaneamente. No entanto, durante a discussão coletiva com a turma, esses conceitos emergiram ao abordar a aproximação da área pelos valores obtidos nos itens da tarefa e ao compreender que o aumento do número de retângulos melhora a precisão dessa estimativa.

Referências e bibliografia

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação* (M. J. Alvarez, S. B. dos Santos e T. M. Baptista, Trads.). Porto Editora.

Carneiro, L. F. G., Araman, E. M. O., & Trevisan, A. L. (2022). Procedimientos metodológicos en la investigación del razonamiento matemático de estudiantes cuando resuelven tareas exploratorias. *Paradigma (Maracay)*, *43*(2), 132–157.

Ellis, A., Özgür, Z., & Reiten, L. (2018). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 30*(2), 1–26. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0217-3

Greefrath, G., Hertleif, C., Böer, C., Böhm, L., Borromeo Ferri, R., & Ulm, V. (2021). Basic mental models of integrals: Theoretical conception, development of test instrument, and first results. *ZDM – Mathematics Education, 53*, 649–661. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-8

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9769-0

Jones, S. R., Lim, Y. R., & Chandler, K. R. (2017). Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1075–1095. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9714-5

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 169–186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9785-0

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática, 156*, 7–11.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2018). Práticas de discussão em sala de aula de Matemática: Os casos de dois professores. *Bolema, 12*(61), 398–418.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient? *Psychology of Mathematics Education, 2*, 46–53.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 230–245. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.002

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: Uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 11*, 209–227.

Trevisan, A. L., & Araman, E. M. O. (2021). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema, 35*(69), 158–178.

Trevisan, A. L., Alves, R. M. A., & Negrini, M. V. (2021). Ambiente de ensino e de aprendizagem de cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas: Resultados e perspectivas futuras. Em M. T. Mendes e A. M. Justulin (Orgs.), *Produtos educacionais e resultados de pesquisas em Educação Matemática,* 1, 155–174. Livraria da Física.

Trevisan, A. L., Araman, E., da Silva, A. J., de Araujo, T. T., Souza, A. V. P., & de Castilho, A. S. (2024). Processos de raciocínio mobilizados por estudantes de CDI na construção do conceito da integral de Riemann. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 17(1), 5.