Enseñanza del Cálculo: Las rupturas epistemológicas y sus implicaciones

José Ramón **Jiménez** Rodríguez
Departamento de Matemáticas, Posgrado en Matemática Educativa, Universidad de Sonora
México
joseramon.jimenez@unison.mx

Resumen

Es ampliamente conocida la importancia del análisis epistemológico de los conceptos matemáticos para la didáctica: identificar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo histórico del concepto; el análisis epistemológico también parece indispensable si se plantea el ambicioso objetivo de renovar o innovar el acercamiento didáctico al respectivo concepto. Como resultado parcial de una investigación documental, en este trabajo se presenta una síntesis preliminar de las rupturas epistemológicas que tuvieron lugar en la evolución histórica del Cálculo, y se esbozan sus implicaciones.

Palabras clave: Análisis epistemológico; Cálculo infinitesimal; Educación superior; Enseñanza del Cálculo; Ruptura epistemológica; Viraje epistemológico.

Introducción: de rupturas y virajes

Es ampliamente conocida la importancia del análisis epistemológico de los conceptos matemáticos para el diseño didáctico, particularmente cuando se plantea el ambicioso objetivo de renovar o innovar el acercamiento didáctico al respectivo concepto. Una de las herramientas que se suele emplear en dicho análisis es la noción de *ruptura epistemológica*, asociada con una visión no continuista ni lineal de la evolución del conocimiento científico, proceso marcado por momentos de crisis, retroceso, e incluso cambios drásticos de orientación (los llamados virajes epistemológicos). En las visiones más radicales, tales momentos constituyen efectivamente rupturas con el pasado de una disciplina científica, un deslinde sin posible reconciliación (Rovira y Carbonell, 2006). Así pues, el rasgo distintivo de una ruptura epistemológica es su irreversibilidad (Beliáiev y Pierminóv, 1981).

A diferencia de la noción de ruptura, la idea de "viraje epistemológico" es menos radical, de entrada, asume implícitamente cierta continuidad en el desarrollo del conocimiento científico: lo que ha ocurrido es simplemente un cambio de orientación o de perspectiva, pero siempre como consecuencia del desarrollo previo. El término "disonancia epistemológica" también tiene esta connotación continuista, aunque enfatiza el momento de crisis, tensión o desacuerdo entre visiones (teorizaciones) concurrentes al interior de una disciplina científica.

En un ámbito más particular, el problema de identificar, analizar y caracterizar las rupturas epistemológicas que han tenido lugar en la evolución de los conceptos y métodos fundamentales del Cálculo, hasta el momento, ha sido poco estudiado desde el punto de vista de la Educación Matemática, al igual que el problema, esencial para la didáctica, de entender las implicaciones que de dichas rupturas se derivarían para la enseñanza del Cálculo. En este trabajo pretendemos contribuir al estudio de tales cuestiones, con base en nuestro análisis de diferentes investigaciones –entre las que destaca la de Beliáiev y Pierminóv (1981)–, cuyas aportaciones han permanecido hasta el momento dispersas, sin un esfuerzo de sistematización y síntesis.

El contexto histórico

La invención del cálculo infinitesimal es resultado de un largo proceso de exploraciones e investigaciones parciales realizadas por muchos autores, y tuvo lugar durante los siglos XVII y XVIII, aunque algunas ideas germinales relacionadas con lo que en la actualidad se conoce como Cálculo se remontan a la antigüedad griega.

Grosso modo y de manera convencional, podemos ubicar cuatro grupos de problemas históricos que dieron origen e impulsaron al desarrollo del Cálculo (Kline, 1972; Katz, 1998). Se trata de los siguientes: a) el cálculo de la velocidad instantánea y de la aceleración de un cuerpo móvil, conocida la distancia que éste recorre en dependencia del tiempo, y viceversa, calcular la distancia recorrida por un móvil conociendo su aceleración o su velocidad variable a lo largo de su trayectoria; b) el trazado de tangentes a curvas arbitrarias, en tanto la tangente intuitivamente representaba la dirección instantánea del movimiento de un objeto, así como también permitía la determinación de las normales a las curvas, fundamental para la confección y el pulido de lentes ópticas; c) problemas de optimización de carácter práctico, relacionados con el lanzamiento de proyectiles (el ángulo que maximizara el alcance de una bala de cañón, así como la altura máxima de dicho proyectil bajo distintos ángulos de lanzamiento), la determinación de las trayectorias de los planetas (en especial, sus posiciones más cercanas y más lejanas al Sol), particularmente el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra; d) problemas formulados en el lenguaje geométrico, pero que estaban directamente relacionados con los problemas prácticos anteriormente enlistados: el cálculo de longitudes de curvas (la rectificación de curvas), el cálculo de áreas de figuras planas y de volúmenes de cuerpos sólidos, relacionados con el cálculo de la fuerza de atracción gravitatoria entre una masa puntual y un cuerpo sólido, o la determinación de los centros de masa y de gravedad de los cuerpos sólidos, la explicación del flujo de las mareas, etc.

Al abordar estos problemas, cada uno de los pensadores que lo hizo utilizó alguna versión adaptada del método de exhaución de los antiguos griegos. Esto los llevó a desarrollar la idea de cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales, y a recurrir en sus cálculos a la idea de infinito. Aunque problemáticos, la utilización de ambos conceptos hizo posible no solamente resolver estos problemas, sino también desarrollar un enfoque general para el estudio de las magnitudes variables en los fenómenos naturales, dando lugar de este modo al estudio de problemas sobre variación.

A pesar de hacer posible la resolución de problemas como los ya mencionados, y la obtención de resultados correctos en muchos otros, e incluso de permitir ganar cierta comprensión de las posibles causas de los fenómenos naturales, impulsando de este modo el avance científico, el nuevo aparato matemático creado adolecía de ciertas deficiencias e imprecisiones de carácter lógico. La primera de ellas concernía a la existencia misma de las cantidades infinitesimales. La segunda tenía que ver con el valor numérico de tales cantidades: ¿eran o no iguales a cero? La tercera generó una discusión acalorada en el seno de la comunidad científica, y estaba relacionada con la introducción de cantidades no arquimedeanas en el aparato matemático de la época. Los pensadores que habían desarrollado tal aparato, aunque advirtieron tales detalles, al principio no les dieron demasiada importancia, siendo conscientes de que se trataba de una herramienta demasiado potente como para descartarla, pero a medida que se iba ampliando el campo de aplicación del nuevo método, la tensión se hacía cada vez más evidente.

Ante este panorama, la comunidad matemática de aquellos tiempos quedó dividida en dos campos: unos se propusieron resolver los problemas lógicos relacionados con el sentido de los conceptos de "infinitesimal", primeras y últimas razones, entre otros, dirigiendo sus esfuerzos a poner fundamentos rigurosos al método del Cálculo, y a demostrar por la vía deductiva las proposiciones fundamentales. Otros se lanzaron audazmente a explorar nuevas situaciones y problemas en los que podían utilizar el instrumental matemático de las cantidades infinitesimales, logrando resultados admirables en las aplicaciones prácticas del Cálculo y contribuyendo a la creación de nuevas áreas científicas. Es precisamente en este momento de la historia en el que podemos ubicar el origen de una de las tensiones que hoy en día nos ocupan en relación con la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Se trata de la tensión que surge entre el recurso a la intuición y las exigencias formales de rigor en el seno del conocimiento matemático.

Esta tensión formidable llevó a los matemáticos de aquella época a plantear el problema de fundamentar rigurosamente la aritmética de las cantidades infinitesimales. Este problema no fue resuelto de inmediato, sino como resultado de un largo proceso de desarrollo que se prolongó durante casi un siglo, y culminó con la construcción de los números reales, la definición formal de los conceptos de función y límite, y la consecuente exclusión de las cantidades infinitesimales del aparato conceptual del Cálculo. El concepto de límite permitió a los matemáticos entender por fin por qué los resultados válidos que habían sido obtenidos mediante recursos intuitivos y herramientas infinitesimales eran matemáticamente correctos. Sin embargo, en este proceso el Cálculo se fue transformando en una disciplina abstracta, casi por completo alejada de sus orígenes y aplicaciones primigenios. Tal transformación se refleja de manera elocuente en las diversas definiciones que de la noción de función se fueron formulando.

Las rupturas epistemológicas en el aparato conceptual del Cálculo primigenio

En el largo proceso de fundamentar lógicamente el Cálculo, los matemáticos debieron deshacerse de una serie de visiones filosóficas y metodológicas comunes en su época. Tales actos de renuncia consistieron en rupturas epistemológicas –o al menos en virajes notables– de la filosofía del Cálculo con respecto a sus orígenes intuitivos y prácticos, problemas-fuente y herramientas primigenias. Los más significativos de ellos, y que han sido consignados de manera separada y parcialmente analizados por diferentes autores (García Bacca, 1946; Grattan-Guinnes, 1970; Grabiner, 1981; Beliáiev y Pierminóv, 1981; Ferraro, 2004; Alemán, 2012), se describen a continuación.

Primera ruptura epistemológica: el rechazo de los argumentos metafísicos (naturales) para justificar las operaciones con las cantidades infinitesimales.

Las argumentaciones de carácter metafísico surgieron de manera natural en el Cálculo primigenio. Se trata de explicaciones causales formuladas a partir de ciertas esencias de la naturaleza, de la materia, de ciertas fuerzas universales, de la continuidad de las cosas y procesos, lo que correspondía con el estilo de pensar del siglo XVII, cuando todavía era dominante la idea de que la ciencia suprema es la filosofía, y de que todas las leyes específicas debían ser deducidas con base en ciertas interpretaciones filosóficas generales de la materia, del espacio, etcétera. Tal tendencia se manifestó también en los primeros intentos de fundamentación del Cálculo, y fue particularmente notable en la posición asumida por Leibniz (García Bacca, 1946). Al justificar las propiedades y operaciones con las cantidades infinitesimales, Leibniz consideraba un grano de arena en comparación con una montaña, o comparaba el diámetro de la Tierra con la distancia hasta las estrellas fijas, o el diámetro de una pequeña esfera que podemos sostener en nuestras manos, con el diámetro de la Tierra, y argumentos análogos (Beliáiev y Pierminóv, 1981).

A pesar de no abandonar completamente los argumentos de carácter metafísico, Euler representa la primera ruptura epistemológica del Cálculo primigenio con sus orígenes. Euler hizo importantes esfuerzos por liberar al Cálculo de su dependencia de la metafísica y su relación con la mecánica, y se propuso desarrollarlo como un campo autónomo. Esta idea le fue sugerida por las distintas soluciones que en aquél tiempo fueron planteadas al problema de la catenaria, y en las que no fue necesario utilizar argumentos de naturaleza metafísica (Palomo, 2016). Euler rechazó tajantemente todas las argumentaciones que, con base en analogías físicas, formulaban los matemáticos de la escuela leibniziana para justificar el cálculo con infinitésimos. Para Euler, un infinitésimo no es sino un cero absoluto. El error en que incurrían los seguidores de Leibniz, según Euler, era no distinguir las relaciones aritmética y geométrica entre ceros. La suma de dos ceros es igual a cero, pero el cociente de dos ceros puede ser igual a cualquier número, lo que depende del tipo de cantidades que se relacionan en el cociente, y que tienden a cero en su magnitud numérica. En otras palabras, lo que Euler afirmaba era que la igualdad $0 = 0$ no implica la igualdad $\frac{0}{0} = 1$ (Ferraro, 2004). Euler definió al Cálculo Diferencial como un “método para determinar cocientes de incrementos infinitesimales, los cuales se obtienen a partir de ciertas funciones, cuando a la cantidad variable de la cual dependen se le asigna un incremento infinitesimal” (citado de Belyáiev y Perminóv, 1981, p. 39). De este modo, transformó al Cálculo de las magnitudes variables en un álgebra de funciones, entendidas éstas como expresiones analíticas en las que figuran constantes y variables, relacionadas mediante una cantidad finita de operaciones elementales, sin que necesariamente dichas funciones fueran modelos de una relación entre cantidades involucradas en alguna realidad material. Euler “afirmó que el verdadero objeto del cálculo no eran los diferenciales, sino los coeficientes diferenciales, y que el algoritmo del cálculo no transformaba diferenciales en diferenciales, sino funciones en funciones" (Ferraro, 2004, p. 35). Esto, además, tuvo un efecto importante: despegar el cálculo de funciones del marco geométrico cartesiano en el que estaba inserto, y en el cual las expresiones analíticas estaban directamente relacionadas con curvas generadas de manera cinemática, es decir, por el movimiento de un punto en el plano.

Segunda ruptura epistemológica: el deslinde con la mecánica

Como hemos señalado, el Cálculo nació y creció estrechamente ligado a problemas de la física y la geometría. Newton consideraba al Cálculo Diferencial no como una teoría general de funciones, sino como cinemática teórica. Para Newton, Leibniz y muchos otros, resultaba natural pensar que toda función es continua y tiene derivada, ya que todo movimiento es fluido y tiene cierta velocidad, y también que toda aproximación a un límite es monótona, ya que el objeto en su movimiento puede aproximarse a un punto dado únicamente por un solo lado, desde una sola dirección. La evidencia intuitiva de la continuidad del movimiento, respaldada por la evidencia también intuitiva de la continuidad de su representación gráfica (la curva), fueron elementos básicos en las producciones científicas de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, e incluso de la segunda mitad del siglo XIX (Bergé y Sessa, 2003; Ausejo y Medrano, 2015).

Sólo de manera gradual empezó a abrirse camino la idea de que el cálculo no debería ser fundamentado con base en argumentos propios de la mecánica. Ya hemos consignado el esfuerzo que en esta dirección inició Euler. Una objeción más fundamental fue expuesta de manera contundente por Lagrange: el Cálculo es Matemática, no física (Grabiner, 1981). Incluir el movimiento en el aparato argumentativo del Cálculo implicaba introducir una idea totalmente extraña a él. Según Lagrange, el Cálculo Diferencial debía ser considerado como una teoría más fundamental que la mecánica y, por consiguiente, debía ser explicado y fundamentado con independencia de la mecánica y, en general, de cualesquier consideraciones empíricas y físicas (Belyáiev y Perminóv, 1981). Su objeto de estudio debían ser exclusivamente cantidades algebraicas.

¿Por qué se dio este viraje hacia el álgebra, luego de renunciar a la mecánica y en parte a la geometría? Grabiner (1981) lo explica de este modo.

> Los matemáticos del siglo XVIII basaban su fe en la generalidad y certeza del álgebra en la idea de que el álgebra era una "aritmética universal". En esa aritmética universal, las operaciones de la aritmética ordinaria se aplicaban a las literales; se entendía que ellas representaban cualquier número. Así, los matemáticos podían obtener relaciones simbólicas complicadas, que arrojaban resultados aritméticos válidos cuando las literales eran sustituidas por números. (…) Por lo general, en el siglo XVIII (e incluso en el XIX), la aritmética se consideraba bien fundamentada y, dado que el álgebra era simplemente una aritmética generalizada, se creía que la verdad de sus conclusiones estaba tan bien fundamentada como la verdad de la aritmética (p. 49).

Otro factor que influyó para que el álgebra fuera considerada una base pertinente para el Cálculo, especialmente por Lagrange, fue que las series infinitas y otras expresiones infinitas formaban parte del álgebra. La filosofía y la praxis del álgebra incluían, por tanto, procesos infinitos y finitos. La aceptación universal de las expansiones decimales infinitas, junto con la aritmética finita, proporcionó una analogía tentadora para el salto de las operaciones algebraicas finitas a las infinitas (Grabiner, 1981). Habiendo redefinido el objeto de estudio del Cálculo, el punto crucial de la argumentación de Lagrange consiste en la afirmación (falsa, como se comprendió posteriormente) de que es posible desarrollar cualquier función en una serie de potencias ascendentes de su incremento (Botazzini, 1986).

Lagrange representa la segunda ruptura epistemológica del Cálculo con sus orígenes. En virtud de esto, Lagrange puede ser considerado como precursor de una tendencia que se impondrá definitivamente a partir de Cauchy. Aunque el fundamento que propuso –el análisis algebraico de las cantidades finitas– resultó insuficiente, eventualmente empezó a prevalecer, alejando al Cálculo de todo recurso a la evidencia cinemática y/o geométrica, y encaminándolo a encontrar en el marco del análisis algebraico, y exclusivamente dentro de él, los fundamentos del cálculo infinitesimal (Botazzini, 1986). El título completo de una de las obras monumentales de Lagrange resume esta ruptura: "Teoría de las funciones analíticas, conteniendo los principios del cálculo diferencial, expurgados de toda consideración relativa a los infinitamente pequeños y límites, y reducidos al análisis algebraico de cantidades finitas".

Caben señalar dos cosas. Primeramente, la concepción lagrangiana no consideraba a las funciones como una correspondencia entre conjuntos numéricos, sino como una regla que vinculaba dos cantidades variables, y se plasmaba en una única expresión analítica (Ferraro, 2004). En segundo lugar, la principal consecuencia de esta ruptura fue la expulsión del tiempo newtoniano del aparato conceptual del Cálculo (Alemán, 2012).

Tercera ruptura epistemológica: el deslinde radical con la geometría

Es bien sabido que, desde la antigüedad clásica, el estudio de las magnitudes estuvo ligada a la geometría. La geometría se constituyó en el dominio natural de validación del trabajo con magnitudes continuas. Esta situación no cambió mucho con la emergencia y desarrollo del álgebra en la Edad Media. Los métodos primigenios desarrollados por los algebristas árabes para resolver ecuaciones cuadráticas, por ejemplo, tienen una clara connotación geométrica. De ellos conocemos el método de "completar el cuadrado". Aunque a partir de Lagrange y D'Alembert los matemáticos separaron al Cálculo de la mecánica, durante largo tiempo continuaron recurriendo a argumentos de carácter geométrico como algo obvio y legítimo, considerando la geometría como una ciencia empírica que estudia las propiedades del espacio "real". Con la incorporación del lenguaje algebraico, la geometría de Descartes llegó a ser considerada como fundamento obvio de todo proyecto de matematización (Bergé y Sessa, 2003).

Para la mayoría de los matemáticos del siglo XVIII, la existencia de la derivada y la integral se desprendía de manera evidente del análisis de una curva, de su tangente y del trapecio curvilíneo correspondiente, y por lo tanto el problema relativo a la existencia de estos objetos no se planteaba en el sentido analítico (Belyáiev y Perminóv, 1981). A medida que evolucionaba el Cálculo, y particularmente con la introducción de las funciones discontinuas, resultaba cada vez más clara la insuficiencia de la geometría como base para su fundamentación. A principios del siglo XIX, el filósofo y matemático checo Bernhard Bolzano formuló una crítica mordaz de las analogías (tanto físicas como geométricas) que se empleaban en la Matemática.

> …es evidente que se trata de una intolerable ofensa en contra del método correcto deducir verdades de la matemática pura (o general, es decir, la aritmética, el álgebra y el análisis) a partir de leyes que pertenecen únicamente a la parte aplicada (o particular) de ella. Una demostración auténticamente

> científica o una fundamentación objetiva de cierta verdad que es válida para cualesquier magnitudes, indiferentemente de si éstas se encuentran o no en el espacio, de ningún modo puede ser una verdad sólo para las magnitudes que se ubican en el espacio… (Belyáiev y Perminov, 1981, p. 44).

La renuncia categórica a utilizar argumentos de carácter geométrico para justificar las operaciones y conceptos del Cálculo fue decididamente impulsada por Bernard Bolzano (1781-1848). Para él todo debía reducirse al álgebra, sin apelar a los infinitesimales, a la geometría, a las ideas de espacio y tiempo o a cualquier otra idea intuitiva (Grabiner, 1981). Bolzano evitó deliberadamente el lenguaje del movimiento y el término infinitesimal. Cabe mencionar que Bolzano difería con la mayoría de sus contemporáneos; en un estudio al respecto se enfatizan “las dos líneas de pensamiento que separaban las ideas de Bolzano sobre el Análisis de las de sus coetáneos: el categórico rechazo de la idea de infinito en todas sus formas, y la estricta separación entre los conceptos aritméticos y geométricos, que a veces llegaba a la supresión de estos últimos” (Alemán, 2012).

Cuarta ruptura epistemológica: el rechazo categórico de las magnitudes variables (cantidades)

Desde tiempos antiguos, la cantidad era considerada como un ente que precede lógicamente al número, mientras que el número era visto como una herramienta para tratar la cantidad. El concepto de número como medida de la cantidad era algo común, al menos hasta el siglo XVIII. En algunas culturas el cero fue introducido simplemente como ausencia de cantidad; es el nombre que se da a “la nada” (Ferraro, 2004). Durante muchos siglos, esta visión de los números excluyó la posibilidad de vislumbrar que “los objetos matemáticos pudieran tener su origen en un acto libre de la voluntad, y exige que estén arraigados en la realidad, directa o indirectamente, como elementos de una teoría que pretenda interpretar lo real” (Ferraro, 2004).

Fue Richard Dedekind (1831-1916) quien puso punto final a este ciclo de rupturas, asentando la fundamentación del Cálculo sobre la noción de número, un objeto genuinamente matemático. Para ello, se apoyó en el trabajo de Hermann Hankel (1839-1873), quien propuso un cambio radical de visión sobre los números.

> Considero que el concepto de número es totalmente independiente de las nociones de espacio y tiempo [...] Los números son creaciones libres de la mente humana; sirven como un medio para aprehender más fácilmente y con más agudeza, la diversidad de las cosas [...] [incluso] para investigar nuestras nociones de espacio y tiempo, al relacionar estas últimas, con el dominio numérico creado en nuestra mente (citado en Ímaz y Moreno, 2010, pp. 48-49).

De este modo, los números no son descubiertos o percibidos a partir de la realidad, sino que son “inventados”, son solo símbolos, “objetos intelectuales”, para los cuales se definen operaciones y relaciones formales, con tal de que dichas relaciones y operaciones estén libres de contradicciones lógicas. Hankel y Dedekind representan el inicio de la cuarta y definitiva ruptura epistemológica del Cálculo con sus orígenes. Esta ruptura fue culminada por el alemán Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), quien aritmetizó definitivamente el análisis, liberándolo de cualquier reminiscencia al cambio temporal o a proceso dinámico alguno en el seno de las operaciones matemáticas.

Las cuatro rupturas que hemos consignado tuvieron como resultado la transformación del Cálculo en una disciplina diferente, o más bien, la formación de una nueva disciplina: el Análisis Matemático. El Cálculo primigenio, con su visión intuitiva, física y dinámica, continuó siendo objeto de aplicación a las nuevas ramas del conocimiento científico y tecnológico que se iban desarrollando, en buena medida impulsadas por el Cálculo mismo. Éste continuó siendo usado, y lo es en la actualidad, como una Matemática práctica, mientras que el Análisis fue consolidando su estatus de Matemática pura.

Reflexiones finales

Como resultado de una investigación documental, hemos identificado y caracterizado brevemente cuatro rupturas epistemológicas, en el proceso histórico de constitución del Análisis Matemático a partir del Cálculo Infinitesimal. Resta aún identificar y caracterizar las implicaciones didácticas y curriculares que dichas rupturas podrían haber tenido en la constitución del currículo escolar de Cálculo y en su metodología de enseñanza, al igual que en su transposición a los libros de texto. Esto implica, además. un trabajo necesario para la Didáctica: profundizar en el estudio de los actos epistemológicos que se registran en los diferentes episodios de ruptura, en el proceso histórico de evolución del Cálculo al Análisis Matemático, así como de sus implicaciones cognitivas, didácticas y curriculares.

Referencias

Alemán Berenguer, R. A. (2012). Del cálculo diferencial al funcional: consideraciones epistemológicas sobre dos desarrollos históricos. Metatheoria, 2(2), 91-121. Disponible en RIDAA-UNQ Repositorio Institucional Digital de Acceso Abierto de la Universidad Nacional de Quilmes. Consulta 29 – 12- 2024 http://ridaa.unq.edu.ar/handle/20.500.11807/2412

Ausejo E., Medrano S. F. J. (2015) De Lacroix a Cauchy: la fundamentación del Cálculo Infinitesimal en Mariano José Vallejo (1807-1832). Asclepio. *Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia*, 67 (2), julio-diciembre 2015, pp. 113-145. ISSN-L:0210-4466, http://dx.doi.org/10.3989/asclepio.2015.31

Beliáev, Y. A., Pierminóv, V. Y. (1981). *Problemas filosóficos y metodológicos de la matemática*. Editorial de la Universidad de Moscú.

Bergé, A.; Sessa, C. (2003) Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Relim*e Vol. 6, Núm. 3, julio, 2003 pp. 163-197

Botazzini, U. (1986) *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Translated by Warren Van Egmond. Springer-Verlag New York Inc.

Ferraro, G. (2004) Differentials and differential coefficients in the Eulerian foundations of the calculus. *Historia Mathematica* 31 (2004) 34–61.

García Bacca, J. D. (1946) La posición histórica de Leibniz en la fundamentación filosófica y científica del cálculo infinitesimal. *Filosofía y Letras, Revista de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional de México*, Tomo XII, julio-septiembre 1946 Número 23, pp. 11-44.

Grabiner, J. V. (1981*) The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, New York: Dover.

Grattan-Guinness, I. (1970) Bolzano, Cauchy and the 'New Analysis' of the Early Nineteenth Century, *Archive for History of Exact Sciences* 6 (5): 372-400.

Ímaz, C. y Moreno A., L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor*. México, Trillas.

Katz, V. (1998*). A history of mathematics, an introduction*. Addison-Wesley.

Kline, M. (1972) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid, Alianza Universidad.

Palomo M. (2016) ¿Supone el Cálculo Infinitesimal un abandono de la metafísica? *Revista Dissertatio de Filosofia*, 43 (S3), 351-369. DOI: 10.15210/dissertatio.v0i0.9787. Descargado el 02/12(2024 de https://periodicos.ufpel.edu.br › article › view

Rovira, J.; Carbonell, E. (2006) ¿Hubo ruptura epistemológica en la ciencia del siglo XIV? *Quaderns d'Italia*, N. 11, p. 99-109. DOI 10.5565/rev/qdi.158 <https://ddd.uab.cat/record/14428> [Consulta: 7 noviembre 2024].