Patrones numéricos: de la observación a la formalización con congruencias numéricas

Reiman Yitsak **Acuña** Chacón
Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
reiacuna@tec.ac.cr
Bolívar Alonso **Ramírez** Santamaría
Sección de Matemática, Sede Occidente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
bolivar.ramirez@ucr.ac.cr

Resumen

Este taller propone una actividad colaborativa enfocada en la identificación y análisis de patrones numéricos, partiendo de la observación de patrones numéricos y su comportamiento en diferentes contextos. Los participantes explorarán cómo estos patrones pueden ser formalizados utilizando congruencias numéricas y principios de aritmética modular. A través de ejemplos prácticos y trabajo en equipo, se busca profundizar en la comprensión de conceptos matemáticos clave y fomentar habilidades de razonamiento lógico y crítico. Este taller está diseñado para responder a la necesidad de desarrollar habilidades de análisis y razonamiento matemático, y su metodología colaborativa fortalece tanto el aprendizaje de conceptos matemáticos como las competencias comunicativas en los participantes.

Palabras clave: Patrones numéricos, Congruencias numéricas, Aritmética modular, educación matemática, Trabajo colaborativo.

Introducción

Este taller está diseñado específicamente para docentes de Matemáticas, investigadores educativos y formadores que buscan nuevas estrategias para integrar conceptos abstractos como las congruencias numéricas y la aritmética modular en contextos prácticos de enseñanza. Con un enfoque centrado en el aprendizaje activo y colaborativo, el taller responde a los desafíos actuales en la Educación Matemática, como la necesidad de promover el razonamiento lógico y la capacidad de los estudiantes para identificar patrones numéricos en diferentes contextos.

La identificación de patrones numéricos es una habilidad esencial en Matemáticas que permite comprender y predecir comportamientos en distintos contextos numéricos. Las congruencias numéricas y la aritmética modular son herramientas fundamentales para formalizar y generalizar estos patrones, proporcionando una base sólida para el estudio de la teoría de números y sus aplicaciones.

En el ámbito educativo, es crucial promover metodologías que involucren a los estudiantes en procesos activos de descubrimiento y formalización matemática. Este taller responde a esa necesidad, ofreciendo una experiencia práctica que conecta la observación empírica con la formalización teórica, alineándose con las tendencias actuales en Educación Matemática que enfatizan el aprendizaje activo y colaborativo (NCTM, 2014).

Objetivo general

Desarrollar la habilidad de identificar y formalizar patrones numéricos mediante el uso de congruencias numéricas y aritmética modular, a través de actividades colaborativas y ejemplos prácticos.

Objetivos específicos

- Fomentar el análisis y la observación crítica de patrones en conjuntos numéricos.
- Introducir y aplicar conceptos de congruencias numéricas y aritmética modular.
- Promover el trabajo en equipo y el intercambio de ideas en la resolución de problemas matemáticos.
- Reflexionar sobre la importancia de la formalización teórica en la comprensión de estructuras numéricas.
- Desarrollar la capacidad para aplicar teoremas matemáticos en la resolución de problemas.
- Fomentar la habilidad de comunicar hallazgos matemáticos de manera efectiva en un entorno colaborativo.

Referencia teórica

La aritmética modular es una rama de la teoría de números que estudia las propiedades de los números enteros bajo la operación de congruencia. Dos números enteros a y b son congruentes módulo n si n divide a la diferencia $a - b$, lo cual se denota como:

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Este concepto es fundamental para el análisis de patrones en potencias y otros contextos numéricos. Teoremas como el Pequeño Teorema de Fermat y el Teorema de Euler proporcionan herramientas poderosas para comprender el comportamiento de las potencias en módulos específicos (Burton, 2011).

Pequeño Teorema de Fermat

Si p es un número primo y a es un entero no divisible por p, entonces:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

En términos equivalentes, si p es un número primo y a es un entero cualquiera, se cumple

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

El teorema afirma que si p es un número primo, las potencias de a en modulo p tienen un comportamiento cíclico. Esto es particularmente útil en criptografía y en el estudio de números porque permite simplificar cálculos y entender patrones en potencias elevadas.

Ejemplo 1: Uso del Teorema de Fermat

Considere los números $a = 2$ y $p = 5$ (el cual es un número primo). Note que

$$2^{5-1} = 2^4 = 16 \equiv 1 \pmod 5.$$

Es decir,

$$2^4 \equiv 1 \pmod 5 \quad \text{o bien} \quad 2^5 \equiv 2 \pmod 5.$$

Teorema de Euler

Para cualquier entero positivo n y entero a que sean coprimos, se cumple

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n,$$

donde $\phi(n)$ es la función totiente de Euler, que cuenta la cantidad de enteros positivos menores que n que son coprimos con n.

Es importante recordar que dos números enteros n y a son coprimos (o primos relativos) si su máximo común divisor es igual a 1, es decir, $\operatorname{mcd}(n, a) = 1$.

Para la función totiente de Euler $\phi(n)$ existe una fórmula para calcularla que depende de la factorización en primos de n, es decir, si n se descompone en factores primos como:

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k},$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son los factores primos distintos de n, entonces:

$$\phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

El Teorema de Euler es una generalización del Pequeño Teorema de Fermat y se aplica a cualquier entero positivo n, no necesariamente primo y es uno de los resultados fundamentales en la teoría de números. De hecho, si n fuera primo note que $\phi(n) = n - 1$, y por lo tanto y el Teorema de Euler se reduce al Pequeño Teorema de Fermat**:**

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Ejemplo 2: Uso del Teorema de Euler

Considere los números $n = 24$ y $a = 5$. Como $\text{mcd}(24,5) = 1$ se puede usar el Teorema de Euler. Para ello note que $24 = 2^3 \cdot 3$, entonces

$$\phi(12) = 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 8$$

Así, hay 8 números menores o iguales a 24 que son coprimos con $24: \{1,5,7,11,13,17,19,23\}$.

Luego, observe que $5^{\phi(24)} = 5^8 = 390625 \equiv 1 \pmod{24}$, es decir,

$$5^{\phi(24)} \equiv 1 \pmod{24}$$

Ciclos modulares

Cuando se calculan potencias de un número bajo un módulo n, los resultados suelen repetirse siguiendo un patrón cíclico. Por ejemplo, si se considera $a = 3$ y $n = 7$ y se hacen cálculos con dichas congruencias se tiene:

$$\begin{gathered} 3^1 \equiv 3 \text{ (mod 7)}, \\ 3^2 \equiv 2 \text{ mod 7)}, \\ 3^3 \equiv 6 \text{ (mod 7)}, \\ 3^4 \equiv 4 \text{ (mod 7)}, \\ 3^5 \equiv 5 \text{ (mod 7)}, \\ 3^6 \equiv 1 \text{ (mod 7)}, \\ 3^7 \equiv 3 \text{ (mod 7)}, \\ 3^8 \equiv 2 \text{ (mod 7)}. \end{gathered}$$

Note que después de $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$, los resultados de las potencias de $3 \pmod{7}$ comienzan a repetirse y son solo 6 números diferentes, que corresponde al orden del grupo multiplicativo reducido $\mathbb{Z}_7^* = \{1,2,3,4,5,6\}$, con la cual es una propiedad fundamental en grupos cíclicos y módulos primos (Silverman, 2006).

En general, al considerar $a^k \pmod{n}$**,** se observa que los valores posibles de las potencias de a en módulo n están determinados por el tamaño del grupo multiplicativo reducido $\mathbb{Z}_n^*$. Este grupo está compuesto por todos los números enteros entre 1 y $n - 1$ que son coprimos con n, y su tamaño u orden corresponde al valor de la función totiente de Euler $\phi(n)$. De hecho, este comportamiento está relacionado con el Teorema de Euler y el Pequeño Teorema de Fermat (Hardy & Wright, 2008).

Formalización Modular: importancia y trabajo cooperativo

La aritmética modular, introducida por Carl Friedrich Gauss en *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), es una herramienta fundamental en la teoría de números y un recurso clave en la enseñanza de las matemáticas. En particular, los ciclos modulares proporcionan un enfoque intuitivo para analizar patrones numéricos, facilitando el desarrollo de habilidades analíticas esenciales en los estudiantes.

Desde una perspectiva educativa, los ciclos modulares son ideales para introducir conceptos como la periodicidad y la simetría mediante actividades prácticas. Como señala Burton (2011), estos patrones "fortalecen la comprensión de la estructura subyacente en los números enteros y sus operaciones bajo módulos" (p. 14). La representación visual de los ciclos modulares ayuda a los estudiantes a identificar regularidades, estableciendo conexiones entre conceptos abstractos y aplicaciones concretas en contextos diversos.

Además, los ciclos modulares enriquecen las experiencias en el aula al fomentar el aprendizaje profundo y colaborativo. Biggs (2002) destaca que "la interacción con problemas de patrones cíclicos promueve tanto la curiosidad matemática como la resolución cooperativa de problemas" (p. 100). Este enfoque refuerza no solo las habilidades matemáticas individuales, sino también la capacidad de los estudiantes para trabajar en equipo, un elemento esencial para la construcción de conocimiento compartido.

Desde la perspectiva pedagógica, el análisis de patrones en potencias modulares ofrece una oportunidad única para que los estudiantes colaboren, dividan tareas, validen cálculos y discutan sus hallazgos. Según Johnson y Johnson (1999), el trabajo en equipo fomenta la resolución de problemas complejos y desarrolla habilidades comunicativas fundamentales. En este contexto, los ciclos modulares se convierten en una herramienta poderosa para consolidar el aprendizaje matemático de manera significativa y colaborativa.

Ejemplo 3: Determinar un patrón y un ciclo para las unidades en las potencias de 2

1. Presentación y discusión de una pregunta generadora**:** se presenta a los partícipes una lista inicial de potencias de 2, como sigue:

$$2^1 = 2, \qquad 2^2 = 4, \qquad 2^3 = 8, \qquad 2^4 = 16, \qquad 2^5 = 32, \qquad 2^6 = 64, \ldots$$

En grupos, se plantea el siguiente problema: ¿Qué regla existe para las cifras de las unidades cuando se calculan potencias de 2?

Los partícipes discuten la naturaleza de la pregunta y verbalizan respuestas iniciales como:

- "Al calcular potencias de 2, las cifras de las unidades pueden ser 2,4,8, y 6."
- "El cálculo de potencias de 2 muestra que la cifra de las unidades sigue un patrón cíclico."
- "La cifra de las unidades nunca es un número impar."

A partir de estas observaciones, los estudiantes registran evidencias como las siguientes:

- $2^1 = 2$ (cifra de las unidades: 2)
- $2^2 = 4$ (cifra de las unidades: 4)
- $2^3 = 8$ (cifra de las unidades: 8)
- $2^4 = 16$ (cifra de las unidades: 6)
- $2^5 = 32$ (cifra de las unidades: 2)
- $2^6 = 64$ (cifra de las unidades: 4)
- $2^7 = 128$ (cifra de las unidades: 8)
- $2^8 = 256$ (cifra de las unidades: 6)

De esta manera, observan que las cifras de las unidades siguen un ciclo de longitud o periodicidad 4: $\{2, 4, 8, 6\}$.

2. Formalización del patrón: con la guía de los docentes, los partícipes exploran la relación de este patrón con el concepto de módulo. En este caso, se utiliza el módulo 10, ya que las cifras de las unidades están relacionadas con los residuos al dividir entre 10. Así, el patrón se puede expresar formalmente como:

$$2^n \equiv 2, 4, 8, 6 \pmod{10}.$$

Dado que este ciclo se repite cada 4 potencias, el patrón puede simplificarse aún más utilizando $n \pmod{4}$.

$$2^n \equiv 2^{n \pmod{4}} \pmod{10}.$$

3. Profundización según el nivel del partícipe: dependiendo del nivel de los partícipes, se puede extender la actividad a:

a. Verificar el patrón con herramientas tecnológicas como Excel, GeoGebra o Python para realizar cálculos adicionales y explorar su repetición.
b. Demostrar el patrón mediante inducción matemática, verificando que los 4 casos del ciclo se cumplen:
    - Si $n = 4k$, entonces $2^n \equiv 6 \bmod 10$.
    - Si $n = 4k + 1$, entonces $2^n \equiv 2 \bmod 10$.
    - Si $n = 4k + 2$, entonces $2^n \equiv 4 \bmod 10$.
    - Si $n = 4k + 3$, entonces $2^n \equiv 8 \bmod 10$.

En este proceso, los participantes conectan la observación empírica con una explicación formal, fortaleciendo su comprensión de la periodicidad modular y la importancia del razonamiento inductivo.

Sobre la identificación de patrones numéricos

La identificación de patrones numéricos no solo desempeña un papel central en la enseñanza de la teoría de números, sino que también tiene aplicaciones prácticas fundamentales en campos como la criptografía y la teoría de códigos, donde las congruencias numéricas son herramientas clave. Asimismo, el desarrollo de habilidades para analizar patrones resulta esencial en diversos niveles educativos, ya que contribuye significativamente al fortalecimiento del pensamiento matemático abstracto (Rosen, 2012).

Metodología

Durante el taller, los participantes contarán con rúbricas de autoevaluación que les permitirán reflexionar sobre su comprensión de los conceptos presentados. Al finalizar, se aplicará una encuesta que evaluará tanto la efectividad del taller como las áreas de mejora. Estas herramientas permitirán optimizar futuras iteraciones del taller y garantizar que cumpla con las expectativas del público.

El taller se desarrollará mediante una combinación de exposiciones breves, actividades prácticas y discusiones en grupo. Las principales metodologías serán:

- Trabajo en grupos pequeños: los participantes se dividirán en grupos de entre 3 a 5 personas para fomentar la interacción y el intercambio de ideas.
- Resolución de problemas: se proporcionarán conjuntos de números y problemas para analizar y buscar patrones.
- Discusión guiada: el facilitador guiará debates y reflexiones sobre los hallazgos de los grupos.
- Presentaciones grupales: cada grupo presentará sus conclusiones al resto de los participantes. Cada actividad del taller se ha diseñado para desarrollar habilidades específicas:
    - En la actividad de observación de patrones, los grupos identificarán ciclos en potencias y explorarán estrategias de análisis como la agrupación de términos similares o el uso de divisores comunes.
    - En el trabajo en grupos, se asignarán roles como moderador, analista y presentador, facilitando la colaboración efectiva. Esta estructura busca no solo fomentar la comprensión matemática, sino también promover el liderazgo y la responsabilidad dentro del equipo.

Justificación de la Estrategia Seleccionada

El aprendizaje colaborativo no solo favorece una comprensión más profunda a nivel individual, sino que también promueve la construcción de un entendimiento colectivo de los conceptos matemáticos (Johnson y Johnson, 1999). Diversos estudios destacan que el trabajo en grupo permite a los estudiantes desarrollar habilidades analíticas, sociales y comunicativas, aspectos fundamentales en la Educación Matemática (Polya, 1957). Además, esta metodología fomenta la reflexión crítica y facilita el intercambio de conocimientos entre los participantes, enriqueciendo significativamente el proceso de aprendizaje.

Agenda General del Taller

Materiales necesarios: calculadoras básicas, pizarras, marcadores y material de papel para anotaciones. Cada fase está diseñada para optimizar el uso de estos materiales. La duración total será de una hora con 50 minutos, distribuido de la siguiente forma:

1. Introducción y Formación de Grupos (10 minutos).
    - Presentación del taller y objetivos. Organización de los participantes en grupos.
2. Actividad 1: Observación de Patrones Numéricos (20 minutos).
    - Se entregarán a los grupos conjuntos de números y potencias para analizar.
    - Un ejemplo: Analizar las unidades de potencias sucesivas de 5 $(5^1, 5^2, 5^3, \ldots)$.
3. Discusión Intermedia (10 minutos).
    - Cada grupo comparte sus observaciones iniciales.
    - El facilitador introduce conceptos básicos de congruencias.
4. Actividad 2: Formalización con Congruencias Numéricas (30 minutos).
    - Los grupos aplican congruencias para formalizar los patrones observados.
5. Actividad 3: Aplicación de Teoremas y Resolución de Problemas (25 minutos)
    - Se presentan problemas que requieren el uso del Pequeño Teorema de Fermat o el Teorema de Euler.
    - Problemas: Calcular $3^{50} \pmod{11}$ y $4^{25} \pmod{15}$.
6. Presentaciones Grupales (20 minutos).
    - Los grupos presentan sus soluciones y métodos al resto.
7. Conclusiones y Cierre (15 minutos).
    - Reflexión y discusión conjunta sobre lo aprendido. (Incluir la formalización)

Conclusiones

La importancia de este taller radica en su capacidad para dotar a los participantes de herramientas prácticas que puedan integrarse en diversos entornos educativos. Combinando la observación empírica con la formalización matemática, los conceptos explorados se presentan como aplicables tanto en la enseñanza secundaria como en la formación docente, promoviendo una comprensión más profunda de las congruencias numéricas y su papel en el análisis de patrones.

A través de una metodología colaborativa basada en el trabajo en equipo y la resolución de problemas, el taller fomenta el pensamiento crítico, el razonamiento lógico y la comunicación efectiva. Estas competencias transferibles no solo enriquecen la enseñanza de las matemáticas, sino que también preparan a los asistentes para abordar desafíos complejos en contextos académicos y profesionales, contribuyendo a un aprendizaje significativo y duradero.

Referencias y bibliografía

Biggs, N. L. (2002). *Discrete Mathematics*. Oxford University Press.
Burton, D. M. (2011). *Elementary Number Theory.* McGraw-Hill.
Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae*. Fleischer. https://archive.org/details/disquisitionesa00gaus/page/XIV/mode/2up
Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press.
Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1999). Learning Together and Alone: Cooperative, Competitive, and Individualistic Learning Individualistic Learning. Allyn & Bacon.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All. NCTM.*
Pólya, G. (1957). *How to Solve It.* Princeton University Press.
Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications.* McGraw-Hill.
Silverman, J. H. (2006). *A Friendly Introduction to Number Theory* (3rd ed.). Pearson.