Cálculo diferencial: Etapas y competencias cognitivas en el proceso de la modelación matemática

Jannet **Chablé**
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 10
México
jannet1609@gmail.com
Flor **Carrillo**
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
f.carrillo@pucp.edu.pe
Jesús **Flores**
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
jvflores@pucp.pe

Resumen

Esta comunicación tiene como objetivo analizar las competencias involucradas en las etapas de modelación matemática que emergen de estudiantes de educación preuniversitaria al resolver un problema de cálculo diferencial en un contexto de Medicina. El análisis de los datos se realiza desde una perspectiva cognitiva, y algunos resultados muestran que los conocimientos previos de los estudiantes favorecen la construcción de representaciones mentales, fortaleciendo así el proceso de modelado de la situación real. En consecuencia, la modelación matemática les permite relacionar la Matemática con la Medicina, y en particular, desarrollar competencias al determinar la velocidad de la sangre en una arteria.

Palabras clave: Educación preuniversitaria; Modelación; Cálculo diferencial; Medicina; GeoGebra; Tarea; Competencias; Resolución de problemas.

Antecedentes

Investigaciones educativas enfocadas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas han trabajado para definir la modelación matemática. Existen grupos de investigadores que consideran la modelación matemática como un proceso que relaciona situaciones de la vida y la Matemática, donde la relación se representa con un modelo matemático (Pollak, 1968; Kaiser-Meβmer, 1986, Blum, W. y Niss, M., 1991). Conviene definir que "un modelo matemático es una construcción matemática diseñada para estudiar un sistema o fenómeno particular del mundo real" (Giardano et al. 2003, p. 54).

Es preciso subrayar que un proceso es considerado como una componente de la modelación, este se experimenta de manera cíclica, más aún, en un proceso de modelación se estudia un modelo matemático (Niss, M. y Blum, W., 2020). Por su parte, Kaiser et al., (2006) señalan que al proponer cualquier modelo matemático está implícito el modelado matemático, razón por el cual los autores categorizan distintos propósitos que hay durante el proceso de un modelado: i) emplear los modelos matemáticos, considerados auténticos, se puede usar para distintas aplicaciones de la vida cotidiana; ii) dificultades que enfrentan los estudiantes durante la resolución de actividades matemáticas; iii) las herramientas tecnológicas (TICs) son recursos que sirven de apoyo a los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de un problema; iv) herramienta de enseñanza de la Matemática; y v) forme parte de un diseño curricular.

En el aprendizaje de las Matemáticas otros aspectos y logros que se pueden alcanzar bajo el proceso de modelación son las competencias de modelación. Niss y Højgaard (2011) las describen como la capacidad que tiene el estudiante para resolver y plantear modelos matemáticos existentes en la vida cotidiana, asimismo, la capacidad de razonar modelos matemáticos ya propuestos, determinar e interpretar los elementos que compone el modelo matemático. Otro rasgo que señala Borromeo- Ferri (2018), para comprender las atemáticas, se puede lograr por medio de distintos tipos de tareas de modelación. Asimismo, el uso de herramientas tecnológicas, Greefrath (2011) estima que es necesario comprender el problema real para que sea transformado a un leguaje matemático, durante la transformación llevados por ciclos o fases de modelación, emplear los recursos tecnológicos permite simplificar, relacionar, visualizar y validar los datos del problema real a un modelo matemático.

Lo dicho anteriormente no significa que el proceso de modelación está definido y regido por los aspectos antes mencionados, las investigaciones continúan en la actualidad. En tal sentido, la modelación en la matemática educativa es un proceso que proporciona otra forma de generar conocimiento, por supuesto que los aspectos o características resaltados son parte esencial en el contexto enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Competencias de modelación y tareas matemáticas

Distintas investigaciones en educación destacan la conexión entre los procesos de modelación y el desarrollo de competencias. Maaß, K. (2006) señala que la comprensión de un problema y su relación con la realidad constituyen competencias fundamentales en modelación matemática, así como la interpretación y validación de resultados. Por su parte, Borromeo- Ferri (2018) y Maaß, K. (2007) enfatizan que una tarea en modelación bien diseñada no solo proporciona conocimientos diversos a los estudiantes, sino que también fomenta competencias metacognitivas a lo largo de los ciclos de modelación, incluyendo subcompetencias específicas en cada etapa del proceso. Asimismo, Maaß (2006) advierte que las tareas matemáticas más complejas pueden generar errores y dificultades, pero abordarlos durante el proceso de modelación fortalece las competencias de los estudiantes y les permite avanzar hacia la construcción de un modelo matemáticos.

Una de las actividades que comúnmente realiza el estudiante para practicar y entender las Matemáticas es una tarea, problema o ejercicios. Hieber y Wearne (1993) aluden que el estudiante aprende en relación a la tarea que se le proporcione, pero a su vez, el desarrollo de estrategias de una tarea puede conducir a diferentes procesos cognitivos para su aprendizaje. En este caso para las tareas de modelación. Como expresa Maaß (2007), las tareas tienen características como el de ser complejas, realistas y auténticas, en ese sentido, el proceso de modelación es un andamio para resolverlas. Efectivamente, una tarea ayuda a desarrollar competencias para el estudiante, más aún si estas tareas tienen diferentes niveles para resolverlas Matemáticas (MaaB, K, 2010).

Los planteamientos de Borromeo-Ferri (2018) indican que la resolución de tareas de modelación adquiere sentido cuando el estudiante se enfrenta a diversas alternativas para resolverlas, ya que este proceso le permite desarrollar estrategias para la solución, así como interpretar y validar la situación real. En este sentido, de acuerdo con la autora, la selección de una tarea adecuada conducirá al estudiante a desarrollar alternativas y/o competencias para resolverlas, a su vez, enfrentarse a dificultades inherentes a dicho proceso. La autora plantea que un ciclo de modelación muestra cada una de los aspectos antes mencionado, y que el estudiante puede desarrollar objetivos de aprendizaje dependiendo del tipo de tarea.

Otro elemento que refiere Niss, M. y Blum, W. (2020) para resolver las tareas de modelación es con el uso de las TICs porque sus características permiten explorar, manipular y visualizar los caminos para resolver las tareas o proponer modelos matemáticos, todo durante el proceso de modelación. Además, Molina-Toro et al. (2019) y Greer y Verschaffel (2007) identifican una estrecha relación entre las TIC y el proceso de modelación, ya que estas herramientas facilitan la organización y el acompañamiento del proceso, generando nuevo conocimiento matemático, lo que contribuyen a un aprendizaje duradero en los estudiantes.

Tecnología (TICs)

En los últimos años, la tecnología está tomando relevancia en la manera de enseñar y aprender Matemáticas. Blum, W. (2015) ha identificado que el uso de la tecnología sirve para experimentar, simular, visualizar y calcular tareas o actividades de modelización. Existen investigaciones educativas en el campo de la modelación matemática que muestran que la tecnología está presente en el proceso de modelación. Por ejemplo, en el ciclo de la modelización, Greefrath (2011) externa que un problema real se debe comprender para ser proyectado a un lenguaje matemático, en ese sentido, las TICs son un soporte para entender el problema, en particular, simplificar y visualizar. Asimismo, el autor describe que las TICs proporcionan experiencias tanto en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, como se puede observar en la asignación de tareas digitales dado que permite al estudiante simule y/o manipule posibles soluciones al momento de resolverlas.

También, las implicaciones de observar etapas en el ciclo de la modelación y como lo hace notar Daher y Shahbari (2013), las TICs sirven para construir representaciones matemáticas que surge de las aportaciones o ideas del estudiante cuando resuelve una tarea de modelación, de igual forma planificar los procedimientos, validar las decisiones que surgen en el proceso de solución, los guía a proponer, aproximar o construir modelos matemáticos. De todo esto desprende que existen una relación entre las tareas, los beneficios de usar TICs y las competencias que se pueden lograr cuando se trabaja en conjunto en un proceso de modelación. En específico, las competencias que desarrolla el estudiante en cada etapa del proceso de modelación. Este comunicado describe como estos tres aspectos, tarea, Software GeoGebra y competencias fueron base para interpretar situaciones de la vida real, la Medicina, y su relación con el cálculo diferencial.

Calculo diferencial: la relación entre la Biología y la Matemática

En el sector educativo, el aprendizaje de las Matemáticas ha sido considerado un reto para los estudiantes. Distintas investigaciones educativas concluyen que hay diferentes dificultades para comprender las Matemáticas, de manera particular, la persistencia en los errores para comprender las Matemáticas. Abrate, et al., (2006) expresan que los estudiantes no reflexionan sobre las tareas y problemas que se les plantea, no indagan sobre datos y estrategias que los lleve a la resolución de tareas. En particular, Feudel y Biehler (2021), Nurwahyu et al. (2020) y Tang et al. (2022) declaran que los estudiantes presentan dificultades en la interpretación de problemas que involucran la derivada en otras disciplinas. Como el caso de relacionar la Medicina con la interpretación de la derivada, esto implica procesos de modelación matemática de fenómenos, que permiten comprender y predecir cambios en sistemas biológicos y fisiológicos.

En ese sentido, atendiendo las dificultades de aprendizaje de las Matemáticas encontradas en la literatura. Soares y Borba (2014) dan a conocer el rol que juega la tecnología en tareas de cálculo, en áreas específicas como Biología, Biomatemática y Bioinformática. Los autores, señalan que emplear el GeoGebra ayuda a: visualizar y reflexionar sobre los conceptos del cálculo diferencial; proporcionar información sobre la secuencia de razonamiento sobre los contenidos; generar pensamientos colectivos y retroalimentación, las cuales abonan al aprendizaje del concepto de derivada, recta secante y cambio instantáneo. Atendiendo a las dificultades existentes por comprender el tema de derivada, este trabajo muestra los procesos de modelación para resolver e interpretar un modelo matemático que tiene implicaciones en la Medicina. Considerando que el estudiante tiene y desarrolla competencias durante el proceso de modelación. Para esta comunicación se ha empleado los ciclos de modelación de Borromeo Ferri (2006).

Aspectos teóricos de la investigación

La investigación de Borromeo-Ferri (2018) con estudios empíricos ha aportado de manera más eficaz el aprender y enseñar Matemática, para la autora la modelización matemática es camino que describe la relación existente entre la Matemática y la realidad. Asimismo, en el proceso de modelación están presente ciclos de modelación matemática, un aspecto relevante de los ciclos es la clasificación psicológica y perspectivas cognitiva (Borromeo, 2006, 2007). *Situación Real:* presentar el problema. El individuo trata de comprender el problema lo que permite una *Representación Mental de la Situación:* dependerá del tipo de pensamiento matemático y/o experiencia que posee el estudiante lo que permitirá que la situación problema sea simplificada y, además, se inicie un proceso de modelado. A partir de la representación que recrea el individuo y los conocimientos extramatemáticos que posee el estudiante produce un *modelo real* de la situación real. En consecuencia, se propone un *Modelo matemático* que permite que el estudiante trabaje con fórmulas/variables. Resultados matemáticos: es la interpretación de resultados a partir del modelo matemático, véase Figura 1. Además, los estudiantes validan sus resultados matemáticos con la situación problema (Borromeo, 2006, 2007).

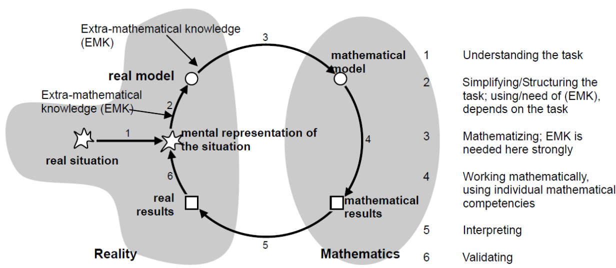

Figura 1. Ciclos de modelación (Borromeo, 2006).

Descripción de la experimentación y el problema en contexto

La Universidad de Guadalajara, México, la educación preuniversitaria trabaja con un diseño curricular llamado Bachillerato General por Competencias (Universidad de Guadalajara, s.f). En el desarrollo de esta tarea de modelación, previamente, los estudiantes ya habían decidido estudiar sus respectivas carreras profesional, estudiantes de último semestre de educación preuniversitaria (17 a 18 años). Como parte de la evaluación final, considerando el tema de la derivada, el profesor a cargo del grupo organizó equipos de 5 estudiantes, los estudiantes de ese equipo habían decidido estudiar Ingeniería y Medicina.

La tarea, velocidad de la sangre, asignada fue un problema extraído de un libro, el objetivo de la tarea era resolver e interpretar los elementos del modelo que representa la velocidad de la sangre, y representar cada variable usando el GeoGebra. El problema dado es: *Velocidad de la sangre en una arteria.* La velocidad (en centímetros/segundos) de sangre r cm desde el eje central de una arteria está dada por $v(r) = k\ (R^2 - r^2)$ donde k es una constante y R es el radio de la arteria. Suponga que $k = 1000$ y $R = 0.2cm$. Determine $v(0.1)$ y $v'(0,1)$ e interprete sus resultados. (Soo T, 2012, p. 596).

Resultados y Conclusiones

A continuación, se describe los resultados evidenciados durante la resolución del problema, dado que durante el proceso de modelación podemos observar ciclos (Borromeo -Ferri, 2007), en este apartado el proceso observado se describe por etapas. En la siguiente tabla se relata las etapas del proceso.

Tabla 1
Descripción de las etapas observadas durante el desarrolla de la tarea.

Etapas	Descripción/ procesos
Comprender la tarea (1)	De manera individual, los estudiantes externaron sus conocimientos acerca de la salud, lluvias de ideas: por ejemplo, diferenciar vena, arteria y órganos. Discusión sobre si era importante resolver primero el modelo, $\boldsymbol{v(r)}$.
Simplificar la tarea (2)	Identificaron y discutieron cuál vista grafica de GeoGebra les ayudaría a crear el prototipo que simulara la arteria. Esta etapa tomo tiempo para hacer muchas versiones del prototipo. Crearon un cilindro en la vista $\boldsymbol{R^3}$ en GeoGebra y deslizadores $\boldsymbol{k, R}$. Además, en la vista $\boldsymbol{R^2}$ colocaron imagen de un cuerpo humano con un corazón que se expandía y reducía.
Matematizar (3)	Identificaron que necesitaban Factorizar, usar Reglas de derivación, Máximos y Mínimos para resolver el problema.
Trabajando con Matemáticas (4)	Resolver $\boldsymbol{v(r)}$
Interpretar (5)	El cilindro simula la arteria. En el centro del cilindro colocaron una esfera muy pequeña, la cual representa la velocidad de la sangre por la arteria.
Validar (6)	Comprobaron los resultados para los valores de $\boldsymbol{k, R}$. y puntos al manipular los deslizadores. Animación del prototipo de la arteria donde la esfera blanca recorría el centro del cilindro

Fuente: creación propia.

Etapa (1) de la situación real presente en el proceso de modelación: Interpretar las variables del modelo $v(r) = k\ (R^2 - r^2)$ con el mundo real, a saber, el diámetro de una arteria, la velocidad de la sangre en la arteria cuando tiene obstrucciones (grasa en la arteria). Este proceso de modelación distingue una *situación real* (Borromeo, 2006, 2007), calcular la velocidad de la sangre de una arteria, el problema tiene implicación en la medicina que es controlar el flujo de la sangre, el cual depende de algunos factores; ejercicio, aumento de la temperatura corporal y los estados de ansiedad del cuerpo humano. *Etapa (2) de representaciones mentales en el proceso de modelación para simular la arteria:* Las aportaciones cognitivas de cada estudiante son consideradas *representaciones mentales*. Los estudiantes emplearon GeoGebra para simular sus representaciones mentales, es decir, manipular los variables y así diferenciar r, R, k. En paralelo, crearon el prototipo de una arteria, el trabajo colaborativo los llevo a diferenciar qué vistas graficas de GeoGebra seria la indicada para simular la arteria.

Etapa (3) emplear conocimientos previos durante el proceso de modelación. La existencia de algunos contenidos previos aportó a la resolución del problema, entre los que resaltaron; las reglas de derivación, factorizar para encontrar los máximos y mínimos. Además, existe una relación con la etapa 2, el prototipo creado en GeoGebra llevo a los estudiantes con conocimientos previos en temas de la medicina a asociar que, cuando una persona tiene colesterol en las arterias, este se adhiere a las paredes, quedando así el eje central como el principal camino de la sangre, relacionar una de las variables con la medicina. *Etapa (4) resolver el modelo real en el proceso de modelar la velocidad de la sangre a través de una arteria*: los estudiantes hicieron los cálculos necesarios para determinar la velocidad, al mismo tiempo, se observó que la etapa 3 tuvo un impacto en esta etapa, como resultado el calcular la derivada fue rápido, y el prototipo les ayudó a verificar el resultado.

Etapa (5) interpretar variables del modelo matemático en el proceso de modelación: Dado que los estudiantes ya disponían de un modelo matemático, el prototipo de un cilindro simulando la arteria llevo a los estudiantes a interpretar que la variable r, a saber: cuando c es una constante positiva, después de derivar $r = 0$. *Etapa (6) validar más variables en el proceso de modelación:* Esta última etapa se desprende de la etapa 5, los estudiantes, y con apoyo de los deslizadores en GeoGebra, fueron comprobando que pasaba con las variables R, k tenían el control de la variable r pero que sucedía cuando se cambiaba el valor de las variables R, k . Una conclusión del valor de R es representar cuando una arteria esta obstruida por grasa, esto conecta con la etapa 1, porque existen factores que afecta las arterias, una situación real que es estudia en el campo de la Medicina.

En la siguiente Figura 2, se ilustra un bosquejo de las etapas que anteriormente se describieron. El trabajo realizado por los estudiantes empezó por considerar el cuerpo humano y distintos factores que puede dañar una arteria, luego con la construcción del prototipo-arteria usando GeoGebra tomando como referencia el modelo.

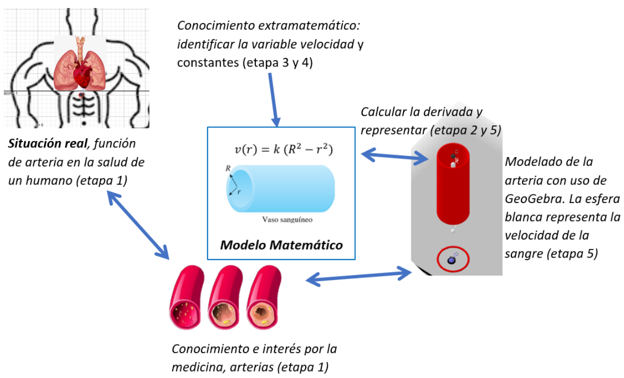

Figura 2. Etapas de los procesos de modelado.

En el marco de la modelación matemática, el tipo de tarea debería ser de interés para el estudiante, empezando por el nivel de educativo, porque acota el tipo de tarea que se intenta resolver, en ese sentido, los resultados muestran que un factor importante y que permitió a los estudiantes participar y colaborar con entusiasmo fue que el modelo matemático propuesto era significativo para su futura carrera profesional. La etapa 1 y 2 evidencian que los estudiantes tenían conocimientos relevantes de cómo trabaja una arteria, generándoles competencia para expresar sus representaciones mentales partiendo del modelo matemático. Los conocimientos y perspectivas cognitivas individuales de los estudiantes fueron características presentes en el proceso de modelación, a saber, identificar tres contenidos matemáticos, competencia por construir el "mejor" prototipo-arteria apoyándose de GeoGebra, y a fin y efecto de proponer ideas, establecer estrategias, interpretar y validar posibles soluciones de un modelo matemático.

Referencias

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática análisis de causas y sugerencia de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María

Blum, W & Niss, M (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects- State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM,* 28 (2), 86-95.

Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. *Mathematical modelling, ICTMA*, *12*, 260-270.

Borromeo, R. (2018). *Modelling Mathematical*. Springer

Blum, W., (2015). Quality teaching of mathematical modelling; What do we know, what can we do? En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer.

Daher, W. & Shahbari, J. (2013). Pre-service teachers´ modelling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1, 1-22.

Feudel, F. y Biehler, R. (2021). Students' Understanding of the Derivative Concept in the Context of Mathematics for Economics. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, *42*(1), 273–305. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z

Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling–Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 301–304). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30

Greer, B. & Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies – overview. In: Blum, W. et al. (Eds). *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 219-224). New York: Springer.

Giordano, F., Weir, M., & Fox, W. (2003). *A first course in Mathematical Modelin*g. 3 editions. China Machine Press.

Hiebert, J., y Wearne, D. (1993). Instructional Tasks, Classroom Discourse, and Students' Learning in Second-Grade Arithmetic*. American Educational Research Association Stabl, 30*(2), 393–425.

Kaiser-Meßmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht* (Empirische Untersuchingen, Vol. 2). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G., Blomhøj, M. y Sriraman, B. (2006). Toward a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM*, 38 (2), 82-85.

Maaß, K. (2006). ¿Qué son las competencias de modelización? *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 113-142.

Maaß, K. (2007). Modelar en clase: ¿Qué queremos que aprendan los alumnos? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan, & Mathematical Modelling (Eds.), *Education, engineering and economics* (pp. 65-78). Chichester: Horwood Publishing.

Maaß, K. (2010). Esquema de clasificación para tareas de modelización. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*, 285-311.

Molina-Toro, J., Rendón-Mesa, P. y Villa-Ochoa, Jhony (2019). Research Trendes In digital Technologies and Modeling in Mathematics Education. *Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15 (8), em 1736*. https://doi.org/10.29333/ejmste/108438

Niss, M. & Højgaard, T. (2011). *Competencias y aprendizaje de las matemáticas: Ideas e Inspiración para el Desarrollo de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Dinamarca*. Universidad de Roskilde: IMFUFA. Traducción al inglés del original danés (2002).

Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Taylor G Francis.

Nurwahyu, B., Tinungki, G., y Mustangin. (2020). Students' Concept Image and Its Impact on Reasoning towards the Concept of the Derivative. *European Journal of Educational Research*, *9*(4), 1723–1734. https://pdf.eu-jer.com/EU-JER_9_4_1723.pdf

Pollak, H.O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 1*, 24-30.

Soares, D.D., & Borba, M.D. (2014). The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. *ZDM, 46*, 575 - 587.

Universidad de Guadalajara. (s.f). *Sistema de educación media superior*. https://www.sems.udg.mx/presentacion-bgc