



Uma análise de erros dos alunos em resoluções de questão sobre otimização em uma prova de cálculo

Felipe Leite **Granato**

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil

lipegranato@gmail.com

Juliana da Silva Porto **Mendonça**

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil

porto_j@yahoo.com.br

Carlos Antonio **Oliveira**

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil

carlosroot4@gmail.com

Márcia Maria Fusaro **Pinto**

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil

marcia@im.ufrj.br

Marianna Del' Secchi **Sypniewski**

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil

mariannadsypi@gmail.com

Resumen

Este artigo traz resultados de uma análise de erros de alunos em resoluções de um problema de otimização. A questão foi proposta em uma prova aplicada em disciplina regular unificada de cálculo no primeiro semestre de 2024, oferecida em cursos de Ciências Exatas em uma universidade pública. Adotamos a metodologia em Bardin (1979) para analisar o uso do teorema de máximos e mínimos em intervalos fechados pelos alunos, contrastando as argumentações em suas soluções. Resultados destacam a frequência de respostas em branco, a ausência de argumentos justificando os procedimentos utilizados, e indícios de compreensão mais ampla da questão em abordagens alternativas ao uso de procedimentos retomando o teorema.

Palavras-chave: Brasil; Educação Matemática; Ensino de Cálculo; Análise de Erros.

Introdução

A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior é estudada internacionalmente como um processo delicado, tanto para os alunos quanto para os professores. Especificamente, para os cursos na área das Ciências Exatas, o ensino e aprendizagem das disciplinas introdutórias do Cálculo nos semestres iniciais revela-se como um grande desafio. As altas taxas de reprovação em tais disciplinas em instituições de ensino superior do Brasil foi pauta de debate acalorado na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), contexto da pesquisa aqui relatada. Ao mesmo tempo em que os docentes do Departamento de Matemática (DM) constituíam um grupo de estudos sobre a disciplina de Cálculo I buscando abordagens alternativas para o período pós pandemia, a diretora da Escola Politécnica da mesma instituição reconhecia, em encontro com estudantes, a anormalidade de taxas de reprovação alcançando 70%, com o agravante de que, em alguns cursos, esse índice se tornara regular ao longo de anos.

Para melhor entender o contexto desse estudo, tal índice de 70% de reprovação refere-se a resultados finais de uma disciplina de Cálculo I unificado, oferecida a cursos das engenharias que a incluem em seus currículos. Esse formato unificado da disciplina propõe programa e cronograma comuns a todos os cursos que a oferecem, e provas únicas em horário extra classe. O índice de reprovação, portanto, corresponde a uma média geral que pode mascarar variações significativas entre os diferentes perfis de cursos e de estudantes. Vale mencionar que a universidade contexto da pesquisa atende a políticas de inclusão do governo federal, oferecendo cotas para estudantes da escola pública e adotando o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como forma de ingresso na universidade. Ao perfil então transformado dos ingressantes em seus cursos (quando comparados a modos anteriores de ingresso dos estudantes na mesma universidade) acrescentam-se os efeitos decorrentes do período da pandemia na formação dos estudantes no ensino fundamental. Esse novo indivíduo, que sobretudo tem acesso a uma miríade de fontes digitais de informação, é centro do desafio enfrentado pelos professores de cálculo. Respondendo institucionalmente, o DM propõe intervenções pedagógicas e estruturais para mudar o cenário revelado, buscando melhores condições de aprendizado e redução da evasão. O projeto Análise de Erros em Provas Unificadas de Cálculo I é parte deste movimento.

Esta comunicação traz resultados de uma análise de erros cometidos por alunos em uma questão sobre otimização, proposta na segunda prova de Cálculo I. Em uma primeira seção elaboramos a perspectiva adotada para o entendimento do erro e da análise das respostas dos alunos. A apresentação do projeto e aportes metodológicos da pesquisa que se segue precedem a apresentação e análise do material produzido. Encerramos com uma discussão dos resultados.

A pesquisa sobre análise de erros

A análise de erros na Educação Matemática é abordada sob diferentes perspectivas. Borasi (1987), por exemplo, enfatiza que os erros cometidos pelos alunos não devem ser vistos apenas como sinais de falhas no aprendizado que necessitam de correção. Em vez disso, a autora propõe que os erros sejam utilizados como "trampolins" para a exploração matemática, servindo como

pontos de partida para atividades criativas de resolução de problemas e como oportunidades para uma compreensão mais profunda do conteúdo matemático e da própria natureza da Matemática. Para a autora, os erros podem promover reflexões e descobertas conceituais, estimulando um aprendizado mais ativo e investigativo. Este entendimento é compartilhado em Cury (2006) e também em Cury e Bisognin (2009), ao propor a realização de atividades a partir dos erros como possibilidade para os alunos refletirem sobre suas dificuldades e para o professor detectar necessidades individuais, para depois elaborar as aulas para o grande grupo. Cury e Cassol (2004) discutem três tipos distintos de pesquisa sobre análise de erros em Educação Matemática: (i) o primeiro, focado apenas na detecção e classificação dos erros cometidos sem uma teoria pedagógica explícita, resultando, muitas vezes, em críticas ao ensino ou aos estudantes, sem explorar causas ou possibilidades de mudança; (ii) o segundo tem como base a análise e classificação dos erros com a finalidade de compreender as causas dos erros, considerando os obstáculos conceituais e processos de ensino-aprendizagem; (iii) e um terceiro tipo desloca a ênfase para atividades propostas aos alunos analisando seus erros à luz de uma teoria específica e proporcionando uma discussão sobre os erros, em si.

A análise de erros nesta pesquisa fundamenta-se na compreensão de que os erros cometidos por estudantes em avaliações revelam dificuldades de aprendizagem, mas também podem orientar mudanças na metodologia de ensino como em (ii) e (iii). Essa abordagem vai além da mera identificação dos erros e sua classificação. Buscamos identificar padrões de erros no contexto ou situação em que emergem, e investigar as origens e os seus significados compreendendo-os como orientadores potenciais para aprimorar o processo de aprendizagem.

Referências metodológicas

Essa pesquisa busca identificar e analisar erros dos alunos em provas de Cálculo I para fundamentar discussões sobre a retenção na disciplina bem como para sugerir alternativas de ensino. Tal projeto, proposto pelo chefe em exercício do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática da UFRJ, foi desenvolvido no primeiro semestre de 2024. A equipe de pesquisadores envolvidos são os autores deste texto.

A primeira etapa iniciou em agosto de 2024, com a definição dos registros escritos a serem considerados em provas aplicadas para em torno de 900 alunos naquele primeiro semestre, arquivadas, para compor o corpus da pesquisa. Trazemos aqui resultados da análise de respostas a uma questão sobre otimização. Tal escolha deve-se a importância e ao número de questões em branco nas resoluções em uma das três provas aplicadas excepcionalmente no semestre em que iniciamos a pesquisa. Em decorrência de uma greve de funcionários no segundo semestre de 2024, optamos por realizar as provas do curso de Cálculo unificado em três turnos de aulas, ao invés de concentrá-las em um único horário vespertino extra turno.

Aportes metodológicos

A análise documental proposta em Bardin (1979), adotada em pesquisas de natureza qualitativa, quantitativa e mista (quali-quantitativa), contempla um conjunto de técnicas para analisar um conjunto de dados. Nesta pesquisa, de cunho qualitativo, usamos a metodologia ao explorar os registros escritos pelos alunos nas provas aplicadas e analisar os erros nas resoluções de uma

questão específica de otimização. A análise de conteúdo adotada como metodologia oferece instrumentos claros, transparentes e adequados de constituição de dados e de análise, para revelar o que está enunciado no texto. As respostas escritas dos alunos foram organizadas em unidades para posteriormente identificar eixos temáticos e, por fim, categorias para análise das respostas a questão escolhida. A seguir, as etapas metodológicas que em Bardin (1979) são denominadas Leitura Flutuante, Regras de escolha, Temas, Eixos Temáticos, Categorização dos Dados:

Leitura Flutuante

A análise inicial é conduzida por uma leitura flexível do corpo do trabalho, em nosso caso, as respostas dos alunos em uma prova de Cálculo 1, sendo instrumento para escolhas e produção do material empírico a ser analisado. Em nossa pesquisa, foi nessa etapa que identificamos um grande número de respostas em branco a uma questão de otimização na prova aplicada em um dos turnos. Isto influenciou a escolha da questão para iniciarmos nossa análise.

Regras de escolha

Bardin (1979) propõe modos para sistematizar e organizar dados, possibilitando inferências sobre os textos em análise. Inclui três regras básicas, que passamos a discutir. Regras de exaustividade potencializam a leitura de todas as respostas dos alunos na questão escolhida, esgotando singularidades. A regra de representatividade permite identificar respostas segundo uma perspectiva particular. A regra de homogeneidade propõe a escolha de unidades de registro para sintetizar as respostas dos alunos.

Unidades de Registro - Temas

As múltiplas características das respostas dos alunos determinam diferentes Temas a serem analisados. O Quadro 1 apresenta os resultados da nossa pesquisa nesta etapa.

Eixos Temáticos

Um ou mais temas podem compor um eixo temático, revelando um “pano de fundo” para possibilitar a análise. Em nossa pesquisa, os eixos constituídos a partir dos temas anteriores são expressos segundo três características principais: a *Modelagem Matemática*, o *Desenvolvimento da resolução* e a *Justificativa e argumentação matemática*.

Categorização dos dados

Regras de homogeneidade dos dados utilizadas nos diversos eixos temáticos têm o intuito de qualificar significados das respostas dos alunos. Novas categorias reagrupam os eixos temáticos da etapa anterior, potencializando discussão teórica em torno de categorias principais. No caso dessa pesquisa, os eixos temáticos convergem para a *Linguagem algébrica e discurso matemático* e *Argumentação matemática e uso de instrumentos*.

O material empírico produzido em análise

Neste artigo discutimos os resultados da análise das resoluções da questão a seguir:

Os proprietários de uma locadora de automóveis determinaram que, se cobrarem dos clientes x reais por dia para alugar um carro, onde $50 \leq x \leq 200$, o número de carros que eles alugam pode ser modelado pela função linear $n(x) = 100 - 5x$. Supondo que os proprietários planejam cobrar dos clientes entre R\$50 por dia e R\$200 por dia para alugar um carro, quanto eles deveriam cobrar para maximizar sua receita? (Nota: Receita = Quantidade $\times$ Preço)

A matematização envolvida na questão consiste em fazer o produto entre a função número de carros $n(x) = 100 - 5x$ e o preço x , escrevendo a função receita $r(x) = x(100 - 5x)$ ou seja, $r(x) = 100x - 5x^2$, onde $50 \leq x \leq 200$. Esta última é a expressão algébrica da função a ser otimizada. Os Quadros 1 e 2 a seguir trazem as respostas dos alunos organizadas em Unidades de registro (Quadro 1), posteriormente reagrupados em Eixos Temáticos (Quadro 2). O uso alternado do itálico na identificação dos Temas é apoio para inferirmos os Eixos Temáticos.

Quadro 1

Unidades de Registro - Temas Iniciais da questão 6

Temas (identificação)	Observações sobre os temas
Não resolveu a questão	Solução deixada em branco, ou restrita a um enunciado do procedimento, ou sem sentido aparente.
<i>Erro na modelagem (para determinar a função a ser trabalhada)</i>	Usou a função número de carros e não a função receita
<i>Erro na escrita algébrica (ao determinar a função a ser trabalhada)</i>	Não usou a propriedade distributiva do produto em relação a soma ao escrever a função receita algebricamente.
<i>Função incorreta, desenvolvimento correto.</i>	Determinou o ponto crítico da função, derivando e igualando a zero a função receita errada.
Função correta, desenvolvimento errado, sem justificativa	Função receita correta, procedimento correto, erro na derivada, ponto encontrado assumido como máximo sem justificar
Função correta, desenvolvimento correto, sem justificativa	Função correta, procedimento correto, desenvolvimento correto, ponto encontrado assumido como máximo sem justificativa
<i>Função correta, desenvolvimento correto, justificativa gráfica</i>	Esboço do gráfico da função ancorando a justificativa de que o ponto determinado é de máximo
<i>Função correta, desenvolvimento correto, justificativa usando derivada segunda</i>	Uso do teste da derivada segunda como critério.
<i>Função correta, desenvolvimento correto, justificativa usando derivada primeira</i>	Determinação de regiões de crescimento e decréscimo a partir do sinal da derivada primeira da função receita.
<i>Função correta, desenvolvimento correto, justificativa analisando valores nos extremos do intervalo</i>	Comparação entre valores da função nos extremos do intervalo e no ponto crítico, usando Teorema de Máximos e Mínimos em intervalos fechados como critério, sem enunciá-lo ou mencioná-lo.
Função correta, exploração de valores no intervalo.	Tentativa e erro para localizar o ponto do intervalo onde a função assume maior valor, comparando valores com valores da função receita nos extremos do intervalo.
Função correta, desenvolvimento correto, justificativa “incorreta” ou parcial.	Justificativa gráfica, mesclando conhecimentos do cálculo e do ensino médio (funções do segundo grau)
<i>Não usou instrumentos do Cálculo.</i>	Usou conhecimentos do ensino médio sobre funções do segundo grau.

Fonte: consulta privada. 2024.

Ressaltamos aqui o fato de a Modelagem Matemática na resolução do problema poder estar errada (ou correta), mas os procedimentos (ou passo a passo) usando os instrumentos do cálculo (ou não) da resolução poderem estar corretos (ou não). Indo além, a justificativa e argumentação matemática podem ou não atender ao rigor formal/algébrico usual. Tais evidências sugerem como eixos potenciais para análise a Modelagem Matemática, Desenvolvimento da Resolução, e por fim Justificativa e argumentação matemática que pode ou não estar registrada na resolução escrita pelo aluno. O Quadro 2 contempla estas relações.

Quadro 2

Eixos Temáticos da questão 6

Eixos Temáticos				Temas iniciais
		Solução em branco		Não resolveu a questão
Modelagem Matemática	Desenvolvimento da Resolução	Justificativa e argumentação matemática	Erro na modelagem matemática da questão	Erro ao determinar a função a ser trabalhada
				Erro na escrita algébrica
				Desenvolvimento correto.
			Modelagem correta, desenvolvimento sem justificativa, ou com justificativa incorreta.	Desenvolvimento errado sem justificativa
				Desenvolvimento correto, sem justificar
				Desenvolvimento correto, justificativa incorreta.
			Modelagem correta, desenvolvimento com justificativa correta ou parcialmente correta.	Desenvolvimento usa derivada segunda
				Desenvolvimento usa derivada primeira
				Justificativa analisando valores nos extremos do intervalo
				Justificativa gráfica
			Não usou o Cálculo	Função correta, exploração de valores no intervalo.
				Não usou o Cálculo.

Fonte: consulta privada. 2024.

Discussão

Discurso matemático e linguagem algébrica

A modelagem matemática de um problema apresentado como uma narrativa – como é o caso na questão objeto desta análise, demanda matematizar uma situação formulada em termos não totalmente matemáticos, ou seja, demanda adotar um novo discurso e reescrever a narrativa inicial em um outro contexto. São inúmeras as pesquisas que sugerem esta reescrita como uma prática a ser desenvolvida, uma vez que é importante e não é imediata. Tais práticas são investigadas desde a década de 70 por um grupo de pesquisa holandês que as denomina Educação Matemática Realística (RME). Abordagens desse grupo, que tem grande influência no Programme for International Student Assessment (PISA) e repercussão internacional, se fazem sentir em nosso país nas orientações curriculares e avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Vale mencionar que mesmo tendo os estudantes do ensino médio trabalhado com os conhecidos “problemas com palavras”, registramos resoluções em branco e a modelagem incorreta do problema restrita apenas à equação correspondente à quantidade $n(x) = 100 - 5x$ sem multiplicar a expressão pelo preço x para obter a função a ser maximizada. Respostas como estas são com frequência relacionadas à leitura do problema e sua escrita em linguagem matemática. São discutidas em Cury (2004), por exemplo, como fontes de dificuldades, principalmente as matematizações, que exigem a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática. Casos como esses representam uma mudança no discurso e tais mudanças não ocorrem tão suavemente quanto (talvez) esperamos que ocorram.

Por fim, alguns (poucos) alunos multiplicaram $n(x) = 100 - 5x$ pelo preço x mas usam incorretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Ribeiro e Cury (2015) mencionam tal erro e destacam que [...] o conhecimento da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, se não entendida no ensino fundamental, pode trazer dificuldades no Cálculo Diferencial, quando o estudante precisa saber simplificar frações algébricas, entre outros itens. (ibid, p. 83). Inferimos assim que a dificuldade não se restringe ao discurso matemático e mudanças no discurso, podendo incluir a não familiaridade com regras operatórias e linguagem algébrica, e generalizações de regras aprendidas para naturais e inteiros, em Cury e Kozen (2005, 2006). O que remete à Matemática desenvolvida na Educação Básica.

Argumentação matemática e uso de instrumentos

Para avaliar a argumentação matemática presente nas provas analisadas, utilizamos o modelo estrutural de argumentação proposto por Toulmin (2003). O autor define que um argumento é uma afirmativa elaborada com base em uma justificativa. Uma simples conclusão, sem quaisquer dados produzidos em seu apoio, não é um argumento (Toulmin, 2003, p. 114).

Na análise das respostas, destacamos o número de questão em branco ou que apresentam resoluções sem justificativas. Entre aqueles que chegaram à resposta correta, muitos recorreram ao teorema de máximos e mínimos em intervalos fechados, sem enunciá-lo ou verificar suas hipóteses. O que nos levou a inferir que, embora o aluno seja capaz de registrar uma solução desenvolvida em etapas corretas, a resolução pode corresponder a um processo mecânico.

O modelo de Toulmin permite uma análise em detalhes de fenômenos como este na argumentação, evidenciando a tendência em omitir ou subutilizar elementos essenciais como o respaldo, a qualificação e a refutação. Essa abordagem predominantemente procedimental impõe desafios pedagógicos significativos, pois, ao utilizar teoremas como métodos práticos, sem considerar hipóteses e significados, os alunos reduzem o Cálculo à aplicação de regras, como se teoremas correspondessem a mais um conjunto de procedimentos mecânicos a serem usados, sem internalizar os princípios matemáticos subjacentes. As soluções consideradas corretas usavam o teorema de máximos e mínimos em intervalos fechados, sem comentar suas hipóteses ou até mesmo enunciá-lo. Os testes da derivada primeira e da derivada segunda foram utilizados corretamente, verificando e comparando (não em todas as resoluções analisadas) o valor crítico encontrado com o valor da função nos extremos do intervalo. Esse ritual na argumentação foi independente da função a ser otimizada estar ou não escrita corretamente. Por outro lado, há registros de soluções que não utilizavam os instrumentos do Cálculo e decorriam do uso de visualização e/ou de testes de valores pertencentes ao intervalo considerado. Os fatos da função a ser maximizada ser de segundo grau e o formato do seu gráfico ser conhecido – a parábola, foram utilizados elaborando justificativas a partir do conhecimento construído no ensino médio.

Nossas reflexões sobre esses incidentes tornaram-nos sensíveis ao uso de teoremas e à relação entre a compreensão puramente técnica dos procedimentos para solução do problema de otimização e a compreensão conceitual da solução apresentada. A possibilidade de uso de teoremas como estratégias de modo procedimental, mecânico e técnico levou-nos a refletir sobre alternativas que incentivem a argumentação matemática, promovendo atividades que estimulem não apenas o "como", mas também o "por quê" das técnicas utilizadas.

Considerações finais

Muitas pesquisas sobre erros dos alunos em provas de Cálculo identificam a falta de conhecimentos anteriores da Educação Básica. Em nossa pesquisa argumentamos em favor de uma análise menos técnica concordando que "...uma vez detectado o erro, uma análise do mesmo deveria levar a uma revisão dos procedimentos didáticos que o originaram." (Moren, David e Machado, 1992, p.2). Por este motivo questionamos suas origens e seus significados com a intenção de entendê-los como orientadores do ensino e aprendizagem.

Referências e bibliografia

- Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Borasi, R. (1987) Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 2-8.
- Cury, H.N. (2004). *Análise de erros em Educação Matemática*. Veritati (UCSAL) 3(4). 95-107.
- Cury, H., Cassol, M. (2004) Análise de Erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. *Acta Scientiae* 6(1). 27-36.
- Cury, H.N. (2006). Análise de Erros e Formação de professores: Sugestões para Ensino e Pesquisa em cursos de Licenciatura em Matemática. *Contexto e Educação*, n.76. Editora Unijui.
- Cury, H.N., Bisognin, E. (2009). Análise de Soluções de um problema representado por um sistema de equações. *Bolema*, 33, 1-22. Rio Claro. SP.
- Cury, H. N., Konzen, B. (2005, 2006) Análise de resoluções de questões em Matemática: as etapas do processo. *Educação Matemática em Revista-RS*, 7(7), 33-41.
- Ribeiro, A., Cury, H.N. (2015). *Álgebra para a formação do professor*. Belo Horizonte: Editora Autêntica.
- Moren, E. B., David, M.M.M, Machado, M.P.L (1992). Diagnóstico e análise de erros em matemática: subsídios para o processo de ensino e aprendizagem. *Cadernos de Pesquisa*, 83, 43-51.
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press.