



## **Análisis de las Aprehensiones Cognitivas en estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria al graficar una función cuadrática**

Domingo Felipe **Aráuz** Chévez  
Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León  
Nicaragua

[domingo.arauz@fh.unanleon.edu.ni](mailto:domingo.arauz@fh.unanleon.edu.ni)

Hilario Ernesto **Gallo** Cajina  
Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León  
Nicaragua

[ernesto.gallo@fh.unanleon.edu.ni](mailto:ernesto.gallo@fh.unanleon.edu.ni)

### **Resumen**

Las investigaciones previas han mostrado que el acto de realizar una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo visual, produce en el sujeto una Aprehensión Cognitiva. Por tanto, el objetivo de esta investigación es analizar las Aprehensiones Cognitivas presentes en estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria (EPS) al graficar una función cuadrática. Para ello adaptamos el marco teórico de Duval (1995) sobre Aprehensiones Cognitivas (perceptiva, secuencial, discursiva y operacional). En este estudio participaron 40 estudiantes para profesor de Matemáticas que cursaban en 2024 su segundo año, en una universidad pública de Nicaragua. El instrumento utilizado para este estudio es una actividad que contiene orientaciones para trabajar sobre la configuración de una función cuadrática. Para el análisis de los datos se identificaron subconfiguraciones que los EPS podían realizar sobre la función dada, las que sirvieron como evidencia de cada una de las cuatro Aprehensiones. Los resultados muestran cuatro grupos de EPS con diferentes evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas. Estos grupos evidencian la necesidad de incidir en los programas formativos con estrategias que permitan a los EPS lograr las Aprehensiones Cognitivas sobre la función cuadrática. El modelo teórico parece ser una herramienta útil para analizar las Aprehensiones Cognitivas sobre el objeto matemático en estudio.

**Palabras clave:** Aprehensiones Cognitivas; estudiante para profesor de matemáticas de secundaria; función cuadrática.

## Introducción

La forma en que se obtiene el conocimiento matemático ha sido preocupación de investigadores educativos; particularmente sobre las configuraciones y subconfiguraciones que realizan los estudiantes como consecuencia del estímulo visual del objeto matemático y de las relaciones que se realizan con este. Las investigaciones han estado enfocadas en analizar distintos objetos matemáticos y los sujetos investigados pueden ser de educación primaria, secundaria o futuros profesores de matemáticas (e.g. Bernabeu et al., 2022; Campos y Rodríguez, 2020; García-Reche et al., 2015; González, 2011).

En relación con las investigaciones donde los sujetos investigados son estudiantes de educación primaria encontramos a García-Reche et al. (2015) quienes propusieron a estudiantes de 5° y 6° grado dos problemas de generalización lineal y encontraron que los estudiantes muestran dificultad para usar y hacer un cambio en el tipo de aprehensión, como causa de la configuración de las figuras del objeto matemático estudiado, es decir, que perciben algunos patrones cuando el objeto es simple, pero no describen dichos patrones cuando la figura tiene alguna variante. Por su parte, Bernabeu et al. (2022) analizaron niveles de sofisticación en el desarrollo del pensamiento geométrico sobre los polígonos, caracterizando cómo los estudiantes de 9 años dotan de sentido matemático a las partes de las figuras, para determinar la pertenencia de un polígono a una clase. Los autores concluyen que, identificar atributos en los polígonos como concavidad/convexidad, es un primer paso para que los estudiantes empiecen a razonar con ello e identificar como un atributo común a un grupo de figuras permite identificar la clase, a través de las propiedades de exclusión e inclusión.

En relación con investigaciones donde los sujetos son estudiantes de secundaria, González (2011) analiza el tratamiento de las representaciones semióticas realizado por los estudiantes de noveno grado sobre el objeto matemático función cuadrática, en los registros algebraico, gráfico y verbal. González concluye que los estudiantes generalmente acuden a las representaciones algebraicas o auxiliares, antes que, al propio gráfico o explicación verbal, para dar cuenta de las posibles transformaciones realizadas sobre el objeto matemático.

En el caso que los sujetos investigados son estudiantes para profesor de matemáticas, hemos encontrado el estudio de Campos y Rodríguez (2020), quienes analizaron los registros de representación semiótica que estudiantes de primer año de la carrera para ser profesor ponen en juego al resolver inecuaciones y al expresar su conjunto solución y, además, describen el grado de aprehensión conceptual alcanzado luego de la enseñanza recibida. Los autores enfatizan la importancia de prestar atención a los tipos de tareas que se les proponen a los estudiantes, ya que de ello depende el aprendizaje del concepto matemático. Por ejemplo, si el estudiante propone una resolución algebraica exitosa de la inecuación, esto no podría entenderse como una señal de que comprende el concepto de inecuación, ya que el registro algebraico no es evidencia suficiente para tomar esa decisión, considerando que, el registro gráfico podría dar mejores alternativas para tomar decisiones sobre el aprendizaje y es donde hay pocas evidencias en los sujetos.

Si bien, se han realizado varias investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes de primaria y secundaria sobre diferentes objetos matemáticos, no hemos encontrado investigaciones sobre Aprehensiones Cognitivas cuando los sujetos son estudiantes para profesor de educación secundaria. Creemos que tener información del aprendizaje de los estudiantes para profesor sobre este objeto matemático, a través de las configuraciones y subconfiguraciones que usan, ayudaría a comprender de qué manera se están logrando las competencias necesarias para su función docente, dado que este objeto matemático pertenece al currículo nacional y lo deberá enseñar una vez que sea profesor en servicio. Esta información se vuelve útil para tener en cuenta en los programas formativos. Por tanto, el objetivo de esta investigación es analizar las Aprehensiones Cognitivas presentes en estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria al graficar una función cuadrática.

### **Aprehensión Cognitiva**

Duval (1995), establece que el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, dado que no existen otras maneras de tener acceso a los objetos matemáticos, sino a través de la producción de representaciones semióticas. Para este autor, la acción de realizar una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo visual, produce en el sujeto una aprehensión cognitiva.

En este sentido, Duval (1995, p.145-147), ha distinguido cuatro formas de Aprehensión Cognitiva, las que a continuación se describen:

- Aprehensión perceptiva: se caracteriza por la identificación de una configuración, en el plano o en el espacio, sin asociarle ninguna afirmación matemática. Es decir, en esta forma de aprehensión se puede percibir varias sub-configuraciones.
- Aprehensión secuencial: se produce cuando hay que construir una configuración o describir su construcción. En este caso, las diferentes sub-configuraciones emergen en un orden que están en relación con las propiedades matemáticas.
- Aprehensión discursiva: se produce una asociación de las configuraciones con afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades.) que determinan el objeto representado.
- Aprehensión operativa: se caracteriza por la realización de alguna modificación en la configuración inicial, añadiendo o suprimiendo elementos o reorganizándolos.

### **Aprehensiones cognitivas sobre una función cuadrática**

Creemos que las Aprehensiones Cognitivas que propone Duval, es posible evidenciarse sobre el objeto matemático función cuadrática, en la medida que a los EPS se les propongan actividades matemáticas para tal fin. Al graficar una función cuadrática, esto permite generar representaciones semióticas, dado que el sujeto puede realizar una acción sobre dicho objeto y producir en él estímulos visuales. Por ejemplo: Al proponerles a los EPS la siguiente actividad (Figura 1), se espera que muestren evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas en estudio, es decir, que la actividad pueda provocar en ellos acciones sobre el objeto matemático y que produzca estímulos visuales, con los que pueda ser capaz de realizar modificaciones de dicho objeto, con ayuda de las representaciones semióticas del mismo. Estamos de acuerdo que, es

posible evidenciar en los sujetos las Aprehensiones Cognitivas si estos tienen conocimientos previos sobre el objeto matemático evaluado.

En función del marco teórico y la actividad propuesta a los EPS (Figura 1), nos hemos trazado la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Qué evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas, sobre el objeto matemático función cuadrática, podemos encontrar en los EPS?

### Metodología

Esta investigación presenta la experiencia de una práctica educativa en un programa formativo, para futuros profesores de Matemática de educación secundaria. De acuerdo con el análisis de los datos es una investigación cualitativa, bajo el paradigma interpretativo. En este estudio participaron 40 estudiantes para profesor de Matemática que cursaban el segundo año, de los cinco, para ser licenciados en una universidad pública de Nicaragua, curso 2023. Al realizar el estudio los futuros profesores ya habían cursado asignaturas referidas a objetos matemáticos como ecuaciones de primer y segundo grado, así como los tipos de funciones. El instrumento de recolección de datos es una actividad propuesta a los EPS (Figura 1), la que propone a los EPS una función cuadrática de la forma  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ . Las cuestiones adicionales sobre la tarea propuesta pretenden hacer que los EPS realicen configuraciones sobre el objeto y de cierto modo, a los investigadores les permita identificar los tipos de Aprehensiones Cognitivas. Uno de los aspectos centrales, es la gráfica de la función original versus una que se obtiene desplazando dicha función una unidad, tanto a la derecha como hacia arriba de esta.

Dada la siguiente función  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ , haga lo que se le indica:

a) ¿Qué tipo de función es? ¿De qué otra forma la puede expresar? Argumenta

b) ¿De qué formas se puede graficar dicha función? Explique

c) Dibuje la función en la siguiente cuadrícula

d) Si traslada un lugar a la derecha y uno hacia arriba de la posición original, ¿cuál sería la nueva función? ¿De qué forma se puede ver gráficamente diferencias entre las funciones? Argumente lo que vaya realizando

Nota: Dibujarla en el mismo plano y con otro color la nueva función y nombrarlas para diferenciarlas

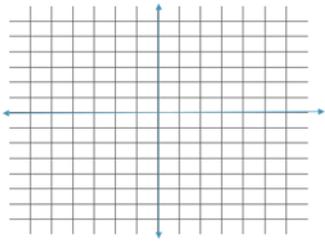


Figura 1. Actividad propuesta a los EPS en el estudio.

### Análisis

Una vez que los participantes realizaron la actividad, los registros de cada participante fueron rotulados como P1, P2, ..., P40. Luego se identificaron las subconfiguraciones del objeto matemático respecto a cada Aprehensión Cognitiva (Tabla 1).

Tabla 1  
Aprehensiones Cognitivas sobre la función Cuadrática.

Aprehensión Cognitiva	Características (subconfiguraciones del objeto)
Aprehensión Perceptiva	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiene noción de que la tarea es una función cuadrática</li> <li>• Tiene en cuenta que la gráfica es una parábola</li> </ul>
Aprehensión Secuencial	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expresa la función cuadrática como binomio al cuadrado.</li> <li>• Indica que para graficar la función basta con hallar el vértice y un punto a cada lado de él</li> <li>• Obtiene el vértice y los dos puntos para cada función</li> <li>• Traza la gráfica de cada función</li> </ul>
Aprehensión Discursiva	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Declara que el objeto matemático es una función cuadrática.</li> <li>• Usa conceptos matemáticos como pares ordenados, plano cartesiano, vértice, trinomio cuadrado perfecto o factorización para describir el proceso de resolución</li> </ul>
Aprehensión Operativa	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza correctamente el traslado de la función en el plano</li> <li>• Obtiene algebraicamente la nueva función con el desplazamiento pedido</li> <li>• Tiene en cuenta que el nuevo vértice de la función es un punto de la función original y que todos ellos se trasladaron una unidad horizontal y vertical</li> </ul>

Fuente. Elaboración propia

Después se verificó el nivel de evidencia de cada subconfiguración en tres categorías de análisis, a través de una tabla: usando color rojo cuando **no hay evidencias** de las subconfiguraciones, color verde para **evidencias no tan claras** de las subconfiguraciones, y, color amarillo cuando hay **evidencias claras** de estas. Por último, se agruparon respuestas similares de los EPS, con la finalidad de mostrar patrones de evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas.

Por ejemplo, una evidencia de la Aprehensión Perceptiva es cuando los estudiantes para profesor identifican que la función es cuadrática o bien que su gráfica es una parábola. Este tipo de Aprehensión se podría evidenciar junto a la discursiva. La Aprehensión Secuencial se puede evidenciar en la medida en que los EPS hacen uso de propiedades y fórmulas al resolver la actividad. Al indicar que es una función cuadrática, podrían argumentar que lo es, por ser un polinomio de grado dos.  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ . También, al argumentar que este polinomio podría ser expresado en la forma del binomio al cuadrado  $f(x) = (x - 1)^2$ , y que para graficarla podría hallar el vértice y un punto a cada lado de este. Al darse cuenta de que en la función  $f(x) = (x - 1)^2$ , el vértice es  $(1, 0)$ ; dado que esta función tiene la forma de  $y = a(x - h)^2 + k$ , donde el punto  $(h, k)$  es el vértice de la parábola,  $y = (x - 1)^2 + 0$ . Por consiguiente, podría evaluar la función en 0 y 2 para las abscisas y obtener así los tres puntos guías, a como vemos en la tabulación siguiente (Figura2).

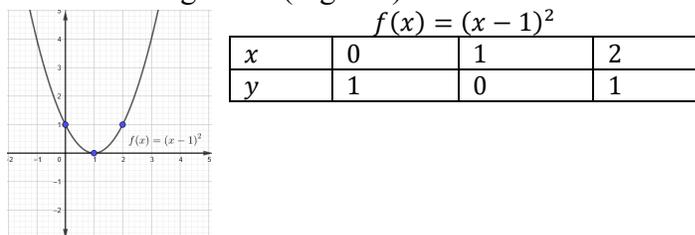


Figura 2. Gráfica de la función original.

Por otro lado, una evidencia de Aprehensión Operativa se podría ejemplificar, cuando los EPS se dan cuenta que para trasladar la función una unidad, tanto a la derecha como hacia arriba de los ejes coordenados, basta con sumar una unidad a los valores de la tabulación anterior, y así, obtener los tres puntos para trazar la nueva función, tal y como se muestra en la siguiente tabulación.

$x$	1	2	3
$y$	2	1	2

Una vez obtenido los tres puntos los ubica en el plano cartesiano y dibuja la parábola en el mismo plano. Luego, puede sumarle a  $h$  y  $k$  una unidad para obtener una nueva función:  $y = (x - (1 + 1))^2 + (0 + 1)$ ;  $y = (x - 2)^2 + 1$ . La figura 3 muestra la gráfica de ambas funciones. Por último, la Aprehensión Discursiva podría evidenciarse cuando los EPS realizan argumentaciones sobre lo que vayan haciendo, por ejemplo, usar conceptos como función cuadrática o de segundo grado, parábola, plano cartesiano, pares ordenados, abscisas, ordenadas, tabulación, vértice de una parábola.

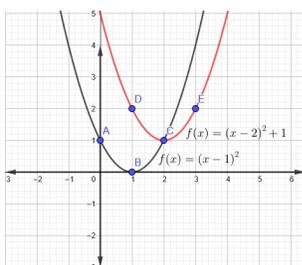


Figura 3. Gráfica de la función original y la desplazada.

## Resultados

La pregunta de investigación ha sido, ¿Qué evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas, sobre el objeto matemático función cuadrática podemos encontrar en los EPS? Para dar respuesta a esta interrogante, se muestran los resultados de forma general, a través de las subconfiguraciones de cada Aprehensión Cognitiva. Luego, se identifican grupos de EPS con características similares sobre las configuraciones realizadas en el objeto matemático, ejemplificando con los registros semióticos de los participantes, cada tipo de Aprehensión.

La figura 4, presenta de forma general los resultados de cada EPS sobre la actividad realizada. Con relación a la Aprehensión Perceptiva, se puede apreciar que todos los EPS son capaces de identificar que el objeto matemático es una función cuadrática y que su gráfica es una parábola, de igual manera, se observa que lo expresan de forma escrita (Aprehensión Discursiva), sin embargo, muchos EPS no hacen uso de conceptos matemáticos relacionados al objeto matemático, tales como vértice, binomio al cuadrado, factorización, etc. En relación, a la Aprehensión Secuencial, se evidencia que pocos EPS logran transformar la función cuadrática como el cuadrado de un binomio, sin embargo, la mayoría de ellos muestran evidencias de comprender que, para graficar la función, es necesario tabular para obtener pares ordenados, entre ellos el vértice y un punto o dos puntos a cada lado de este, con lo que podemos considerar que tienen noción del concepto de simetría. La mayoría han trazado la función original y, con ayuda de la cuadrícula proporcionada en la actividad, realizaron el desplazamiento de la función

dada. En el caso de la Aprensión Operativa, a pesar de que no logran obtener algebraicamente la nueva función, consideramos que visualmente, es decir, con ayuda de la cuadrícula, logran hacer el desplazamiento de la gráfica de la función original.

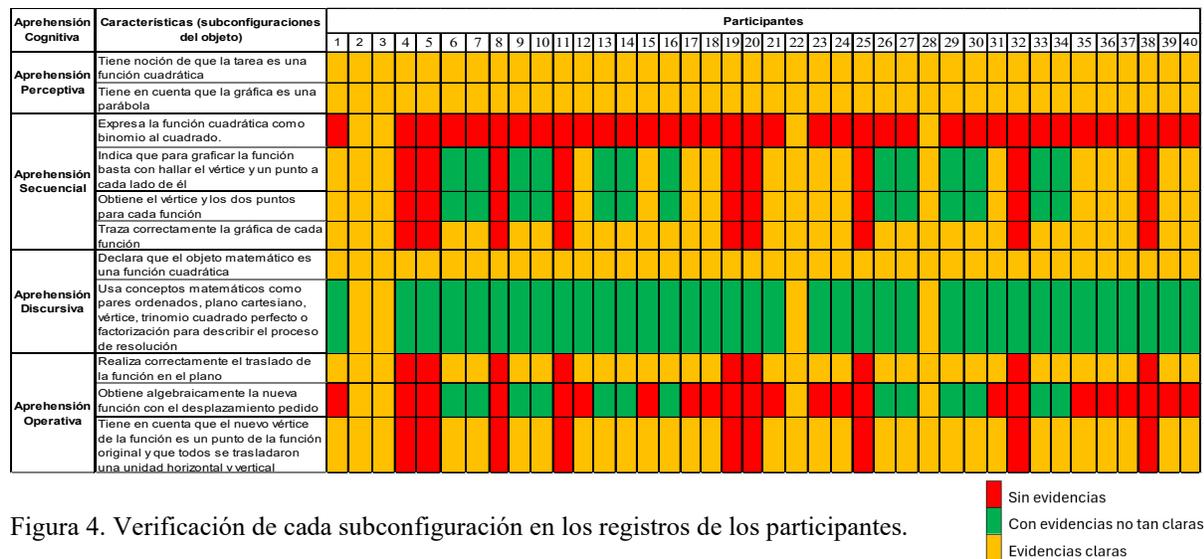


Figura 4. Verificación de cada subconfiguración en los registros de los participantes.

Del análisis anterior, se identificaron cuatro grupos de EPS, en relación con las configuraciones que han realizado sobre el objeto matemático:

- Un primer grupo en el que se evidencian únicamente la Aprensión Perceptiva y Discursiva. Este grupo, muestra en el registro escrito y gráfico la clasificación de la función, sin embargo, la ubicación en el plano cartesiano tanto de la función original como de la desplazada no es correcta (por ejemplo: P4, P5, P8, P11, P19, P20, P25, P32, P38), a como se puede observar en el siguiente registro del P8 (Figura 5). Esto evidencia de que en este grupo de EPS no está presente la Aprehensión Secuencial, dado que no indican las propiedades empleadas para graficar la función cuadrática, por ejemplo, la tabulación, tampoco la Aprehensión Operativa, al no encontrar algebraicamente la función desplazada.

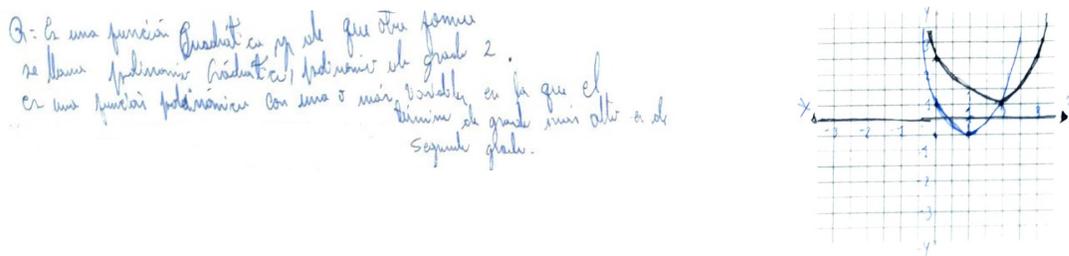


Figura 5. Resolución del P8 en la actividad propuesta.

- Un segundo grupo de EPS en el que hay evidencias claras de la Aprehensión Perceptiva, porque identifican que la función es una parábola y la dibujan. Asimismo, se evidencia la Aprehensión Secuencial porque aplican algunas propiedades como la tabulación para encontrar pares ordenados, para la función original y con ayuda de esta, construye los pares ordenados de la función desplazada, sumándole a ambas coordenadas cartesianas (x, y) una unidad. Sin embargo, no presentan evidencias tan claras de la Aprehensión Discursiva y

Operativa, ya que no describen los procesos realizados y no efectúan las transformaciones sobre el objeto matemático, es decir, no obtienen algebraicamente la función trasladada. (por ejemplo, P1, P12, P15, P17, P18, P21, P23, P24, P31, P35, P36, P37, P39, P40), a como se puede observar en el siguiente registro del P18 (Figura 6).

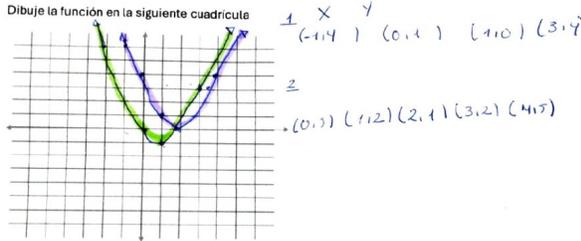


Figura 6. Resolución del P18 en la actividad propuesta.

- En el tercer grupo de EPS se evidencia claramente la Aprehensión Perceptiva, ya que tienen noción de la que función es una parábola. Sin embargo, hay evidencias no tan claras de las demás Aprehensiones, ya que no se evidencia discurso matemático sobre el objeto, únicamente la tabulación y si bien, obtiene pares ordenados de la función desplazada, la grafican y la expresan de forma algebraica  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ , no hay evidencias de cómo la obtuvo, ya que con los pares ordenados no es suficiente condición para decir cuál es la nueva función, en este caso se requiere pasarla la función original a la forma canónica  $y = a(x - h)^2 + k$ , y sustituir los valores determinados (por ejemplo, P6, P7, P9, P10, P13, P14, P16, P26, P27, P29, P30, P33, P34), a como se puede observar en el siguiente registro del P10 (Figura 7).

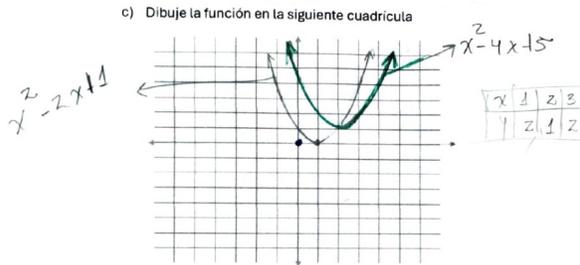


Figura 7. Resolución del P10 en la actividad propuesta.

- Un cuarto grupo, en el que se evidencian de forma clara todas las Aprehensiones Cognitivas. Este grupo identifica que la función es cuadrática y la gráfica, también hace uso del discurso matemático para describir las transformaciones de la función original, expresándola mediante el cuadrado del binomio  $y = (x - 1)^2$ , que al sumar una unidad tanto a “h” como a “k” obtiene la función desplazada  $y = [x - (1 + 1)]^2 + (0 + 1)$  (por ejemplo, P2, P3, P22, P28), a como se observa en el registro del P22 (Figura 8).

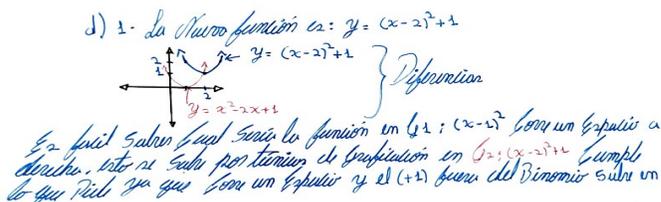


Figura 8. Resolución del P22 en la actividad propuesta.

## **Discusión y Conclusiones**

El objetivo de investigación ha sido analizar las Aprehensiones Cognitivas presentes en estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria al graficar una función cuadrática. De forma general, podemos decir que, las Aprehensiones Perceptiva y Secuencial están presentes en la mayoría de los EPS, porque sus registros evidencian el reconocimiento del objeto matemático, tanto de forma algebraica como gráfica, en contraposición a los resultados de González (2011) en donde los participantes se apoyaban más en la representación algebraica, que en la gráfica y verbal. Por otro parte, los EPS han mostrado evidencias de que cuando se les orienta realizar transformaciones sobre el objeto matemático, la mayoría optan por hacer uso de la tabulación, para obtener la nueva función, sin embargo, algebraicamente, la mayoría no han sido capaces de obtener la función desplazada. Estos resultados dejan en evidencia de que hay un aprendizaje sobre el objeto matemático demostrado por la representación gráfica que han hecho de este, sin embargo, a diferencia de Campos y Rodríguez (2020), los EPS han mostrado realizar el traslado de forma visual y tabular, pero no comprenden como hacer uso de esos elementos visuales y tabulares, para hallar algebraicamente la función desplazada. Esto puede atribuirse a la naturaleza de la tarea, en el caso de Campos y Rodríguez (2020) el objeto matemático era una inequación, que para identificar si en el sujeto se evidencia la comprensión conceptual gráfica de la inequación, estos debían primeramente resolverla algebraicamente, dado que es imprescindible para dar una respuesta gráfica de esta. En cambio, en la tarea que se ha propuesto, los EPS han mostrado evidencias del concepto desplazamiento de una función, a través de la resolución gráfica, dado que, con ayuda de pares ordenados, podían realizar los desplazamientos solicitados. Estos resultados presentan un panorama preliminar sobre el aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes para profesor y pone de manifiesto que el marco teórico de las Aprehensiones Cognitivas puede considerarse como un buen modelo para analizar el aprendizaje de dicho objeto matemático. A los programas de formación de futuros profesores ofrece una luz sobre aspectos para tener en cuenta, como es el caso del desplazamiento de una función cuadrática, contenido que forma parte importante del currículo de educación secundaria y deben aprenderlo de diferentes formas para que en el futuro sean capaces de enseñarlo, tomando en cuenta criterios de desplazamiento del objeto matemático. Los grupos identificados en el estudio muestran diferentes niveles de aprendizaje del objeto matemático, lo que podría ayudar a replantearse estrategias de enseñanza que favorezcan las Aprehensiones Cognitivas sobre dicho objeto, teniendo en cuenta estos niveles de comprensión. En este momento estamos aplicando estrategias de intervención que ayuden a los sujetos a lograr la comprensión de este objeto matemático y probando este marco teórico sobre otros, tales como funciones exponenciales, secciones cónicas y límites de una función.

## **Reconocimientos**

Esta investigación fue realizada dentro del grupo de investigación DIME (Docentes Investigadores en Matemática Educativa) de la UNAN-León.

## **Referencias y Bibliografía**

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2),49-70.  
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208>

- Campos, M., y Rodríguez, M. A. (2020). Un estudio sobre la aprehensión conceptual de las inecuaciones. *Paradigma*, 540-570. <https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.2020.p540-570.id811>
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer Berlin Heidelberg
- García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.
- González Chica, G. (2011). Tratamiento de las representaciones semióticas de las funciones cuadráticas (Tesis de maestría), Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/handle/11182/860>