



## Conocimiento profesional para enseñar Matemáticas: El caso del concepto matemático de función

Angy Coronel-Suárez

Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Puerto Rico Mayagüez

Puerto Rico

[angy.coronel@upr.edu](mailto:angy.coronel@upr.edu)

Omar Hernández Rodríguez

Departamento Estudios Graduados, Facultad Educación, Universidad de Puerto Rico Río Piedras

Puerto Rico

[omar.hernandez4@upr.edu](mailto:omar.hernandez4@upr.edu)

Ana Helvia Quintero

Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico Río Piedras

Puerto Rico

[ana.quintero1@upr.edu](mailto:ana.quintero1@upr.edu)

Liliana Torres Rodríguez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico Bayamón

Puerto Rico

[liliana.torres1@upr.edu](mailto:liliana.torres1@upr.edu)

Aileen Velázquez Estrella

Departamento de Educación de Puerto Rico

Puerto Rico

[aileen.velazquez@gmail.com](mailto:aileen.velazquez@gmail.com)

### Resumen

Se llevó a cabo un estudio cualitativo donde por medio de entrevistas grupales se determinó el conocimiento profesional de un grupo de docentes asistentes a un seminario con el propósito de elaborar materiales educativos para desarrollar el concepto matemático de función. Definimos el conocimiento profesional como el conocimiento en cuatro dimensiones: (1) conocimiento del contenido y de la forma de enseñarlo; (2) sus creencias sobre la profesión y ellos mismos; (3) participación en una comunidad profesional; y, (4) elaboración de materiales para los procesos de enseñanza y aprendizaje. Encontramos que, aunque los docentes se apropiaron tardíamente del concepto de función en sus estudios universitarios, ellos entienden

que es importante introducir a sus estudiantes el tema por medio del uso de contextos y programas computarizados. Sin embargo, reconocen obstáculos de su aplicación en el salón de clase por limitaciones de tiempo, extensión del currículo y poca creatividad para diseñar actividades innovadoras.

*Palabras clave:* Educación matemática; Educación Matemática Realista; educación preuniversitaria; estudio de la lección; funciones; investigación cualitativa; Puerto Rico.

### **Definición y relevancia del problema**

En la actualidad, el estudio de las funciones es fundamental en el currículo matemático escolar. Sin embargo, existe diversidad de concepciones entre las personas que inician estudios universitarios (Bardini et al., 2014; Sheikh Abdullah, 2007; Tall & Bakar, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989). En varias universidades públicas de Estados Unidos y en Puerto Rico, el primer curso de matemáticas que deben afrontar los estudiantes de ciencias, matemáticas y disciplinas afines es Pre-cálculo. No obstante, existe una gran preocupación por la divergencia en la preparación matemática a nivel escolar y los conocimientos de los estudiantes al inicio de sus estudios universitarios. Bressoud (2020) señala que, debido a la estructura del sistema escolar público en Estados Unidos, las decisiones curriculares son realizadas a nivel estatal, lo que lleva a una gran disparidad en la formación matemática de los estudiantes. La gran diferencia va desde aquellos estudiantes que tomaron cursos avanzados en su etapa escolar, hasta aquellos que apenas completaron la secuencia requerida que termina con el curso de Álgebra. En Puerto Rico, al terminar sus estudios escolares los estudiantes reciben una gran diversidad de contenidos matemáticos, sin embargo, los conocimientos adquiridos no son suficientes para enfrentar los cursos universitarios. Los profesores universitarios consideran que los estudiantes no están bien preparados para afrontar sus estudios (Caro, 2008; Sanoff, 2006). Igualmente, investigaciones vinculan el conocimiento de los estudiantes al conocimiento de los maestros (Casinillo, 2023).

En esta investigación, nos enfocamos en el conocimiento que tienen docentes de matemáticas. Nos preguntamos ¿cuál es el conocimiento profesional que tienen los docentes sobre el concepto matemático de función? Definimos el conocimiento profesional como el conocimiento que tienen los docentes en cuatro dimensiones: (1) el conocimiento del contenido y de la forma de enseñarlo; (2) las creencias sobre la profesión y sobre ellos mismos; (3) la participación en una comunidad profesional; y, (4) la elaboración de materiales para los procesos de enseñanza y aprendizaje (Lewis et al, 2019). Nos proponemos caracterizar el conocimiento profesional de los docentes de matemáticas sobre el tema de las funciones describiendo instancias que reflejen su conocimiento vinculado a su habilidad para elaborar materiales.

### **Referencial teórico**

Utilizamos los cambios intermedios propuestos por Lewis et al. (2019) para definir el conocimiento profesional del maestro en cuatro dimensiones: (1) conocimiento del contenido y de la forma de enseñarlo; (2) sus creencias; (3) participación en una comunidad profesional; y, (4) elaboración de materiales para los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Para la primera dimensión, Tall y Vinner (1981) distinguieron entre la forma en que se define un concepto matemático y los procesos cognitivos relacionados que ayudan a construir ese concepto. Utilizaron la expresión concepto imagen como el conjunto de representaciones, propiedades y procesos asociados a un concepto que posee una persona. En un momento dado, la porción de imagen expresada la denominan el concepto imagen evocado, el cual indican, es dinámico y se transforma con el tiempo. Por otro lado, denominan concepto definición al conjunto de palabras que una persona utiliza para referirse a un determinado concepto, es decir, la forma verbal del concepto imagen evocado. Los autores diferencian entre el concepto definición personal y concepto definición formal, siendo este último el aceptado por la comunidad de profesionales que se dedican a la matemática. En este contexto, consideramos de gran importancia especificar el concepto imagen relacionado al concepto de función de maestros de matemáticas de Puerto Rico pues este repertorio de secuencias de imágenes, representaciones, procesos y procedimientos será el que ellos utilicen para ayudar a sus estudiantes a construir una definición de función. Esta secuencia se complementa con el conocimiento que los maestros tienen sobre cómo enseñar los conceptos relacionados al concepto matemático de función. Este conocimiento incluye aspectos como: hacer evidente el pensamiento de los estudiantes, establecer metas a largo plazo y tomar decisiones para alcanzar y evaluar metas intermedias (Gravemeijer, 2020; Van Es & Sherin, 2002). Además, puede abarcar aspectos tales como la especificación de los elementos necesarios para la elaboración del plan de lecciones, el uso de un lenguaje común relacionado al marco metodológico en que se desarrolla la instrucción y la incorporación de la tecnología, entre otros (González et al., 2023).

Sobre la segunda dimensión, las creencias de los maestros son un factor determinante en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Torres Rodríguez, 2019). Aunque las creencias se pueden considerar como conocimiento, las diferenciamos del conocimiento profesional en que no están apoyadas en evidencia “científica”, sino en la percepción del maestro. Las creencias de los maestros pueden abarcar diversos aspectos: el contexto en el que enseñan, la forma en que aprenden los estudiantes que atienden, la dificultad de la disciplina, la forma de enseñar un tema en específico e incluso sobre ellos mismos, incluyendo su propia eficacia (Lewis et al., 2019; Torres Rodríguez, 2019). Estas creencias pueden influir en aspectos importantes como la manera en que desarrollan los contenidos y en que utilizan la tecnología para enseñar un tema específico.

La tercera dimensión contempla las formas en que los maestros están motivados a mejorar la instrucción de manera colaborativa o colegiada. Aunque la preparación y el desarrollo de la clase en gran medida son individuales, la enseñanza ocurre principalmente en contextos sociales donde es importante considerar las necesidades de los colegas y demostrar responsabilidad colectiva de proporcionar una instrucción de alta calidad. La participación en las discusiones de planificación o en procesos de reflexión después de la enseñanza requieren del uso de un lenguaje compartido para referirse a determinados procesos tanto matemáticos como didácticos (González et al., 2023). Aunque estos aspectos son fundamentales en el conocimiento profesional de los docentes, su desarrollo suele tener poca relevancia durante su formación.

Finalmente, en la cuarta dimensión, las trayectorias de aprendizaje requieren que los docentes elaboren tareas y actividades que revelen y promuevan el pensamiento matemático de los estudiantes (Lewis & Perry, 2015). Aunque las tareas y actividades propuestas a menudo provienen de libros de texto, la tecnología ha ampliado el acceso a recursos en la Internet, lo que

requiere que los docentes posean criterios sólidos para seleccionar materiales que respondan a los objetivos establecidos. Además, es necesario crear espacios en los centros educativos que permitan la planificación y elaboración colaborativa de materiales educativos, adaptados a las necesidades particulares de los contextos en los que se desarrolla los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esto implica la colaboración entre docentes de diferentes grados, la observación de colegas ofreciendo clases y el análisis del papel que desempeñan los materiales y recursos en el pensamiento matemático de los estudiantes (Lewis & Perry, 2015).

### Método y desarrollo conceptual

Esta investigación se llevó a cabo en el contexto de un seminario dirigido a estudiantes de posgrado en Educación Matemática de una universidad de Puerto Rico. El propósito era reflexionar sobre los aspectos teóricos y prácticos para la creación de lecciones para la enseñanza de las funciones con base en los principios de la Educación Matemática Realista. En este seminario convergen personas interesadas en mejorar la educación matemática, incluyendo profesores universitarios, maestras retiradas y estudiantes de programas de matemáticas puras y de educación matemática a nivel de maestría o doctorado. Las sesiones del seminario se desarrollan durante 15 semanas, con una duración de tres horas semanales. El seminario contó con la participación de 13 personas: 6 investigadores y/o colaboradores y 7 estudiantes, de los cuales 6 ejercían como docentes de matemáticas de los tres niveles escolares y 1 de universidad. Los estudiantes se dividieron en dos grupos para garantizar la diversidad en cuanto al nivel en el que enseñaban. Los investigadores se dividieron e integraron en cada uno de los grupos. Al inicio del seminario se llevaron a cabo entrevistas grupales para explorar el conocimiento profesional de los estudiantes del seminario. Las entrevistas se realizaron en forma grupal y tuvieron una duración de entre 60 y 90 minutos. La Imagen 1 muestra las preguntas que se utilizaron como guía para dirigir la entrevista en esta parte del estudio.

#### El concepto de función

1. ¿Recuerdas en qué momento de tus estudios viste por primera vez el concepto de función? ¿Cuál era?
2. ¿Puedes indicar de qué manera se enseñan las funciones a nivel escolar actualmente? Descríbela, por favor.
3. ¿En los cursos que tienes asignados este año académico, esperas enseñar el concepto de función? ¿Ya tienes un plan para hacerlo?
4. ¿Cuál es el concepto de función que más te gusta? ¿Cuál consideras que es el más apropiado para enseñar a nivel escolar?
5. ¿Qué tan familiarizado estás con los resultados de investigaciones sobre la enseñanza del tema de funciones a nivel escolar? ¿Puedes mencionar algunos resultados de investigaciones que guíen tu práctica educativa?
6. ¿Qué influye más cuando enseñas el tema de las funciones, la forma en que las aprendiste o la experiencia enseñando el tema?

#### Uso de tecnología para la enseñanza de las funciones

7. ¿Cuál ha sido su experiencia usando tecnología para la enseñanza de las funciones?
8. ¿Qué aplicaciones has usado (por ejemplo, Desmos, GeoGebra, calculadora gráfica, etc.)?
9. ¿Podrías dar un ejemplo de la forma en la que integrarías tecnología para la enseñanza de funciones?
10. ¿Qué beneficios tiene para tus estudiantes cuando usas la tecnología en las lecciones matemáticas?
11. ¿Qué dificultades anticipas que pueden tener tus estudiantes al usar tecnología en tus lecciones?

#### Aprendizaje de las funciones de las matemáticas

12. ¿Cuáles son las ideas más importantes que debe aprender un estudiante relacionadas al tema de funciones?
13. ¿Qué procedimientos sabe realizar un estudiante que domina las ideas fundamentales de las funciones?
14. ¿Qué esperas ver en un salón de matemáticas donde los estudiantes están aprendiendo el tema de funciones?
15. ¿Qué diferencia a un estudiante que entiende el tema de funciones de otro que no?
16. ¿Qué problemas puede resolver un estudiante que domina la idea matemática de función?
17. ¿Consideras que el estudiante puede aprender el tema de funciones a partir del análisis de situaciones problemáticas?

*Imagen 1.* Preguntas relacionadas con esta parte del estudio que guiaron la entrevista.

El análisis de las entrevistas se inició con la transcripción de las grabaciones. Se desarrolló un libro de códigos que incluyó definiciones y ejemplos de cada aspecto del conocimiento profesional. Cada investigador clasificó las aseveraciones de los participantes en una tabla con cuatro columnas: (1) su conocimiento sobre los conceptos relacionados con las funciones y la forma de enseñarlas; (2) sus creencias sobre la profesión y ellos mismos, relacionadas con las

funciones, con la forma de enseñarlas y con sus estudiantes; (3) su participación en una comunidad profesional; y (4) la elaboración o uso de materiales para la enseñanza y aprendizaje de las funciones. Luego de realizar esta clasificación, se llevaron a cabo reuniones entre los investigadores para comparar y contrastar la distribución de las aseveraciones. La discusión se centró en determinar el concepto imagen, no de manera individual, sino analizando las percepciones de todos los estudiantes entrevistados. La Tabla 1 muestra algunas expresiones dadas por los participantes en cada una de las cuatro dimensiones del conocimiento.

Tabla 1  
Aseveraciones de algunos participantes respondiendo a la entrevista

	Conocimiento	Creencias	Comunidad	Materiales
Concepto de función	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “La <math>f</math> con paréntesis de la forma tradicional”</li> <li>- “Después de mucho tiempo entendí que <math>f(x)</math> es igual a <math>y</math>”</li> <li>- “Asociación única, una persona solo puede hacer una cosa a la vez”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Hacen cosas sin saber que es matemáticas”</li> <li>- “Si no sabe qué es una función no puede resolver problemas”</li> <li>- “La función no se entiende cuando es dominio y rango, sí con la máquina”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Concordar en las respuestas, luego es valedero”</li> <li>- “Generalmente los maestros empiezan definiendo la función”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Que entre un número a la máquina y salga otro no es suficiente para que el estudiante deduzca la función, necesita por lo menos otro, patrones”</li> </ul>
Enseñanza de las funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Máquina, tabla de valores, gráficas, dominio y rango”</li> <li>- “En primaria, las flechas son buen acercamiento para las funciones”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Enseñar de forma concreta se recuerda con el tiempo”</li> <li>- “La forma como uno aprendió no es como sus estudiantes lo entenderán”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Acoger las experiencias de otros para su práctica”</li> <li>- “Sugerencias de estrategias de colegas”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Utilizo material del DEPR y luego con internet”</li> <li>- “Empezar con una historia, plantear problema, ver concepto y resolver”</li> </ul>
Uso de la tecnología	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Dominio, rango, máximo y mínimo con Desmos”</li> <li>- “Asíntotas, en Desmos, dan zoom out y la gráfica sigue igual. Ver numéricamente por qué no pasa”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Los estudiantes no dominan la tecnología como pensamos, solo en ciertos aspectos”</li> <li>- “Nos deslumbra algo que no utilizamos en nuestra época y a ellos no les motiva”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Utilizar lecciones ya elaboradas por colegas en Desmos”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- “Desmos permite compartir ideas de forma innovadora y tecnológica”</li> <li>- “Considerar el tiempo para enseñar a manejar la herramienta en la planificación”</li> </ul>

### Resultados y conclusiones

Se presentan los resultados de las entrevistas según las cuatro dimensiones con las que definimos el conocimiento profesional.

#### Primera dimensión: conocimiento sobre las funciones y la forma de enseñarlas

Para varios participantes la primera vez que vieron el concepto de función fue mediante el modelo de la máquina. Recuerdan que representaban elementos de entrada y salida, hacían tablas de valores y una gráfica en el plano cartesiano. Aunque no todos están de acuerdo con que la máquina sea la mejor representación, destacan la importancia del aspecto visual para representar la correspondencia entre los valores. Mencionaron representaciones, como diagramas de Venn con flechas que salen de un conjunto  $A$  a otro conjunto  $B$  y coordenadas en el plano cartesiano.

Sólo un participante recordó que le presentaron el concepto de función con una situación contextual, pero utilizada como contraejemplo, no representaba una función. Todos coincidieron en que fueron expuestos de alguna manera al concepto de función durante su escuela superior (grados 10 a 12) y luego estudiaron las funciones formalmente en la universidad en el curso universitario de pre-cálculo. A este nivel, vieron la función como una correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un solo elemento del segundo conjunto. En ese momento también vieron la representación  $f(x)$ , definieron el dominio, rango, analizaron funciones básicas, como polinomiales, trigonométricas y exponenciales, y las representaron en el plano cartesiano. Sólo un participante mencionó el concepto de función como una dependencia entre dos variables de diferente naturaleza.

En cuanto al conocimiento de la didáctica de las funciones, resaltaron la importancia de utilizar medios visuales para representar el concepto de correspondencia, el valor de entrada y el valor de salida y el dominio del álgebra para calcular estos valores. La calculadora graficadora interactiva de Desmos, plataforma disponible gratuitamente en Internet, se mencionó como una herramienta efectiva para visualizar aspectos, como el dominio y recorrido, y para distinguir las características de las familias de funciones. Algunos participantes mencionaron el uso de videos de YouTube, simulaciones y otras aplicaciones como alternativas para introducir el concepto de función. También señalaron la importancia de introducir el tema a través del uso de contextos más cercanos a los estudiantes y permitirles manipular los objetos matemáticos bajo estudio para una mejor comprensión, en contraposición a que el maestro explique y haga ejercicios.

Los participantes también reconocieron algunos obstáculos cognitivos que presentan sus estudiantes los cuales dificultan el aprendizaje del concepto de función. Destacaron el poco dominio de la aritmética durante la evaluación de expresiones algebraicas como una dificultad para calcular los valores de salida de una función expresada por una fórmula. Igualmente, consideran que la notación  $f(x)$  representa un problema porque muchos de sus estudiantes no relacionan a  $f(x)$  con el segundo componente de la pareja ordenada  $(x, y)$ . Además, mencionaron la confusión que puede generar el uso de homónimos durante la instrucción, como el término rango que tiene diferentes significados en el contexto de la estadística y las funciones.

### **Segunda dimensión: creencias sobre la profesión y ellos mismos, relacionadas con las funciones, con la forma de enseñarlas y con sus estudiantes**

Las creencias las clasificamos en cuatro categorías: sobre las estrategias de enseñanza, sobre el aprendizaje de los estudiantes, sobre el uso de la tecnología y sobre el currículo.

- Sobre la enseñanza. La mayoría de los que enseñan el tema prefieren comenzar con la definición, aunque reconocen la importancia de otras representaciones. Todos consideran relevante el uso de contextos, pero no es su forma preferida para introducir el tema. Reconocen que los alumnos aprenden de diferentes maneras según sus experiencias y estilos de aprendizaje, algunos aprenden mejor a través de la observación, la manipulación o la acción, mientras que otros lo hacen de manera más abstracta, luego enfatizaron la necesidad de adaptar las estrategias de enseñanza a las necesidades individuales de los estudiantes. Esto implica que los docentes deben realizar investigaciones para determinar la mejor forma de llegar a cada estudiante. Sin embargo, consideran que la forma como

aprendieron el concepto influye al momento de enseñar, aunque también influyen los aprendizajes que han obtenido en su experiencia enseñando el tema.

- Sobre el aprendizaje de los estudiantes. Los participantes señalaron que los estudiantes enfrentan dificultades al aprender matemáticas en general. Consideran que algunos tienen obstáculos cognitivos de índole emocional y colocan una barrera que les impide aprender. Problemas con operaciones aritméticas y propiedades algebraicas se mencionaron como obstáculos frecuentes. Se destacaron algunas creencias de los estudiantes, como que si el resultado al evaluar una función es una fracción o un decimal, la respuesta es incorrecta, o que estos valores no se pueden graficar en el plano cartesiano. Algunos expresaron que si los estudiantes no dominan los conceptos de funciones, tendrán dificultades para resolver aplicaciones. A nivel universitario, coinciden en que los profesores asumen que los estudiantes dominan las funciones, luego no es necesario explicarlas con detalle.
- Sobre el uso de la tecnología. Representa desafíos ya que los docentes a menudo sobreestiman la capacidad tecnológica de los estudiantes. Si bien es cierto que los estudiantes dominan ciertas aplicaciones, son pocas las herramientas educativas que manejan, así que conlleva inversión de tiempo del proceso de enseñanza en aprender a utilizar una determinada aplicación, que no volverán a utilizar. Según mencionaron, en muchos casos los docentes valoran la capacidad computacional de la tecnología, porque en su momento tuvieron que hacer todos los cálculos y gráficas de forma manual. También resaltaron ciertos problemas con las herramientas tecnológicas, como la representación de las asíntotas y las funciones definidas por partes, pues en las gráficas se ven conectadas.
- Sobre el currículo. Los docentes dependen principalmente de las directrices y documentos normativos del Departamento de Educación, como los estándares y los mapas curriculares. Consideran que en esos documentos se hace más énfasis a la enseñanza de valores que a los contenidos matemáticos, lo que implica que los cursos no sean lo suficientemente rigurosos. Además, señalan que hay mucha diversidad en la aplicación del currículo porque los salones de clase son laboratorios en donde los docentes aprenden alguna técnica didáctica, la adapta y la aplica, la evalúa y sigue optimizándola según la va utilizando.

### **Tercera y cuarta dimensión: comunidades profesionales y elaboración o uso de materiales**

Estas dimensiones estuvieron bastante relacionadas. Ninguno de los participantes de esta investigación reportó haber trabajado con colegas en sus instituciones, ni fuera de ellas, en la elaboración de materiales para la enseñanza de funciones y resaltaron su falta de conocimiento sobre investigaciones relacionadas con la enseñanza de funciones. Ellos coincidieron en que en los cursos donde se trabaja el tema de función, han dependido principalmente de algún libro de texto y otros materiales que les provee la institución. Algunos mencionaron recursos que han utilizado de la Internet como Desmos, Khan Academy, YouTube y PhET, entre otros. Uno de los participantes mencionó que utiliza la representación de la máquina para introducir el concepto de función, elaborar la tabla de valores y la gráfica de la función. Otro mencionó que ofrece a sus estudiantes unos materiales de repaso antes de comenzar el tema de funciones, que incluye conjuntos numéricos, los números reales y las propiedades de la adición y la multiplicación.

En conclusión, los docentes introducen el concepto de función como una relación de entrada y salida, luego presentan la definición formal, seguida de ideas y procesos relacionados para finalizar con sus aplicaciones. Consideramos que hay una desconexión entre la forma como se introduce el tema y la definición formal, pues no expresan con claridad cómo se conecta la representación de la maquina con las concepciones de dominio, rango, gráfica, etc. Los participantes van desde el que estudió el tema en la universidad, pero no lo ha enseñado y no está muy familiarizado, hasta los que han enseñado el tema en escuela o universidad, luego podemos concluir que el concepto imagen de función está determinado por la manera en que lo enseñan. La diversidad en las formas de aprender de los estudiantes, las ventajas y desventajas de las aplicaciones tecnológicas y la forma cómo aprendieron ellos mismos, entre otras, son creencias que influyen en la planificación de las lecciones que utilizan los docentes para enseñar las funciones, del mismo modo que las limitaciones para trabajar en equipo con otros colegas y la falta de creatividad y tiempo para ser creativos en el diseño de actividades innovadoras.

### Referencias

- Bardini, C., Pierce, R., Vincent, J., & King, D. (2014). Undergraduate mathematics students' understanding of the concept of function. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, 5(2), 85-107.
- Bressoud, D. (2020). *The strange role of calculus in the United States*.  
<https://www.mathvalues.org/masterblog/launchings20201001>
- Caro, E. (2008). 180 variables predictoras en el aprovechamiento académico en los cursos de pre cálculo de la Universidad de Puerto Rico en Bayamón. *Milenio: Revista de Artes y Ciencias*, 12, 180-196.
- Casinillo, L. F. (2023). Calculus teacher's competencies as correlates of students' learning experiences. *International Journal of Indonesian Education and Teaching*, 7(1), 22-32.
- González, G., Villafaña-Cepeda, W., & Hernández-Rodríguez, O. (2023). Leveraging prospective teachers' knowledge through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26, 79-102.
- Gravemeijer, K. (2020) Emergent modeling: An RME Design heuristic elaborated in a series of examples. *Educational Designer*, 4(13).
- Lewis, C. C., and Perry, R. R. (2015). A randomized trial of lesson study with mathematical resource kits: Analysis of impact on teachers' beliefs and learning community. In J. A. Middleton, J. Cai, & S. Hwang (Eds.), *Large-scale studies in mathematics education* (pp. 133–155). Cham, Switzerland: Springer. doi:10.1007/978-3-319-07716-17
- Lewis, C., Friedkin, S., Emerson, K., Henn, L., and Goldsmith, L. (2019). How does lesson study work? Toward a theory of lesson study process and impact. In *Theory and practice of lesson study in mathematics* (pp. 13-37). Springer, Cham.
- Sanoff, A. P. (2006). A perception gap over students' preparation. *Chronicle of Higher Education*, 52(27), B9-B14.
- Sheikh Abdullah, S. A. (2007). Conceptions of functions among first degree and diploma students. *Social and Management Research Journal (SMRJ)*, 4(1), 67-76.
- Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 23(1), 39-50.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.
- Torres Rodríguez, L. M. (2019). *Creencias filosóficas acerca de las matemáticas y vínculos con la enseñanza: Estudio de casos con maestras de matemáticas de escuela elemental del DEPR*. Recuperada de Dissertations and Theses (ProQuest No. 13884894).
- Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of technology and teacher education*, 10(4), 571-596.
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, 20(4), 356-366.