



Actividades didácticas para la introducción de sucesiones y convergencia: Experiencia de aula en curso introductorio de análisis matemático

Kenneth **Esquivel** Murillo
Sede Regional del Sur, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
kenneth.esquivelmurillo@ucr.ac.cr

Resumen

La transición de la educación secundaria a la universidad en Costa Rica constituye un proceso desafiante para el estudiantado, especialmente en el ámbito del análisis matemático. En este contexto, la Universidad de Costa Rica ofrece la carrera de Educación Matemática en su sede central y en la Sede Regional del Sur, donde el curso MA0009 Números Reales se enfoca en los conceptos clave relacionados con sucesiones numéricas y convergencia. El presente escrito incluye una serie de actividades didácticas enfocadas en la comprensión de estos objetos matemáticos, con el objetivo de llevar a cabo una transición adecuada hacia este campo del conocimiento. Además, se incluyen resultados preliminares obtenidos al implementar estas dinámicas en el aula en la Sede del Sur.

Palabras clave: Análisis matemático; Convergencia; Costa Rica; Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza participativa; Enseñanza presencial; GeoGebra; Planeamiento educativo; Sucesiones numéricas.

Introducción

La carrera de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR) se imparte desde 2017 en la Sede Rodrigo Facio, con una malla curricular actualizada a las necesidades del contexto costarricense. En 2021, se comenzó a ofrecer en la Sede Regional del Sur, en Golfito, Puntarenas, tras un estudio de factibilidad. Esta región enfrenta desafíos como deficiencias en infraestructura y una población laboralmente activa con bajo nivel educativo, lo que dificulta la transición a la educación universitaria, especialmente en Matemáticas. Además, existe una

desigualdad significativa en la calidad educativa comparada con el promedio nacional (Díaz, 2023).

Ahora bien, en el primer año de la carrera de Educación Matemática se tienen los siguientes cursos del área matemática, los cuales se describen brevemente:

- *MA0002 Álgebra Elemental*: se centra en el estudio de operaciones básicas con números reales y sus propiedades, resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.
- *MA0003 Fundamentos de la Matemática*: introduce el razonamiento lógico, la teoría de conjuntos y la inducción matemática.
- *MA0018 Tecnología en el Aula de la Matemática I*: presenta el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las Matemáticas.
- *MA0005 Introducción a las Funciones*: aborda el estudio de funciones matemáticas, incluyendo su definición, representación gráfica y aplicaciones en diversos contextos.
- *MA0006 Conjuntos Numéricos*: se construyen y analizan los diferentes conjuntos numéricos (naturales, enteros y racionales) y sus propiedades.

En el primer ciclo del segundo año, se cursa MA0009 Números Reales (entre otros cursos), centrado en las propiedades algebraicas y analíticas de los números reales, así como en la convergencia de sucesiones y las series geométricas, que formalizan las expansiones de números reales. Este curso continúa el enfoque en la Matemática formal y el desarrollo de habilidades de argumentación e introduce el análisis matemático para cursos posteriores como MA0012 Funciones Derivables.

A partir de lo anterior, en el presente escrito se describe una serie de actividades didácticas que tiene como objetivo facilitar el aprendizaje de conceptos como sucesión, convergencia y subsucesión, así como algunos teoremas aplicados al cálculo de límites de sucesiones. Además, se exponen los resultados preliminares derivados de la aplicación inicial de las dinámicas durante el segundo ciclo de 2024, así como de su posterior implementación en el primer ciclo de 2025.

Marco teórico

El paso de la educación secundaria a la universidad implica un cambio significativo en la manera en que las personas estudiantes abordan las Matemáticas, especialmente con la introducción del análisis matemático. En la educación secundaria, el enfoque predominante es algorítmico y procedimental, centrado en la resolución de tareas matemáticas mediante técnicas específicas. Sin embargo, en la universidad, se adopta un enfoque más formal y abstracto, donde el rigor lógico y las demostraciones cobran un papel fundamental (Tall, 1992). Este cambio se ve reflejado en la realidad costarricense, donde se sostiene que:

(...) las cifras son elocuentes y muestran una realidad que los jóvenes arrastran desde la primaria y la secundaria. A criterio de los especialistas de la UCR, la deficiente formación en Matemática, que representa un gran abismo entre el colegio y la universidad, se ha venido profundizando en los últimos años, inclusive desde antes de la crisis sanitaria. (Picado, 2022)

El análisis matemático es una de las primeras áreas en las que el alumnado se enfrenta a conceptos fundamentales como límites, convergencia y continuidad, los cuales exigen un nivel

de abstracción que no se desarrolla en la educación secundaria (estos conceptos no forman parte de los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica). Esta transición no solo implica la adquisición de nuevos conocimientos, sino también un cambio en la forma en que el estudiante aborda las Matemáticas, quien debe dejar atrás una visión operacional de la disciplina para adoptar una perspectiva más estructural y deductiva. Es decir, pasando de un enfoque basado en procedimientos y cálculos a uno fundamentado en razonamientos lógicos y demostraciones abstractas (Ascencio, R. y Eccius-Wellmann, 2019). Aunado a ello, en el curso MA0009, estos conceptos se presentan por primera vez, con el objetivo de prepararlos para el curso MA0012 Funciones Derivables, en el cual se estudian de manera más profunda, aplicados a funciones en lugar de sucesiones.

En concordancia con lo anterior, la transición al análisis matemático no solo requiere habilidades cognitivas, sino también la capacidad de trabajar con diferentes representaciones matemáticas, como expresiones algebraicas, gráficas y numéricas. El desarrollo de estas habilidades es fundamental para el éxito en los cursos iniciales de Matemáticas, y su ausencia puede ser una barrera para la comprensión profunda del análisis matemático (Martínez, 2008). Para facilitar esta transición, diversas investigaciones sugieren el uso de estrategias didácticas que incluyan actividades colaborativas. Por ejemplo, Yarlequé (2012) afirma que:

(...) el aprendizaje cooperativo y progresivo de los conocimientos matemáticos contribuirá al desarrollo cognitivo de los estudiantes y a su formación, lo que potenciará capacidades y destrezas básicas como la observación, representación, interpretación de datos, análisis, síntesis, valoración, aplicación, actuación razonable. entre otras. (p. 1)

En ese sentido, el uso de analogías en este tipo de actividades puede ser de gran utilidad en cursos iniciales de carreras relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, pues permite que el concepto abstracto que se está estudiando se base en uno más familiar para el alumnado. Es decir, utilizar este recurso ofrece varias ventajas, especialmente cuando se trata del objeto sucesión numérica:

Dado que el concepto de función es un tema presente tanto en la Matemática escolar como en la formación inicial de profesores, los resultados de esta investigación y de estudios sobre el conocimiento matemático y didáctico del profesor sobre la función, así como del uso de la analogía en su enseñanza, son potencialmente útiles para los formadores de profesores en el diseño de tareas en los cursos de formación inicial de profesores. (Espinoza-Vásquez *et al.*, 2018)

Además, la introducción de software matemático puede ayudar a las personas estudiantes a visualizar conceptos abstractos y experimentar con ellos de manera interactiva. Herramientas como GeoGebra ofrecen la posibilidad de ver cómo varían los resultados a medida que se modifican parámetros en tiempo real, facilitando la comprensión de ideas complejas. Asimismo, al reducir la carga de cálculos extensos, el alumnado puede centrarse más en los aspectos conceptuales, como el comportamiento de una sucesión o la interpretación de resultados. Esto no solo hace que los conceptos sean más accesibles, sino que también favorece un aprendizaje más activo y enfocado en la comprensión. Sobre este software, Auccahuallpa, *et al.* (2022) destacan que:

Los beneficios que promueve el uso de GeoGebra son la comprensión creativa y dinámica de conceptos, el desarrollo del pensamiento crítico-analítico, del razonamiento lógico-matemático y del razonamiento numérico; la realización de demostraciones dinámicas; la verificación de conjeturas; el desarrollo de aprendizajes significativos; el despertar del interés y la motivación en Matemática; el desarrollo de habilidades en el trabajo colaborativo y el de actitudes positivas hacia la Matemática. (p. 272-273)

Actividades didácticas

A continuación, se presentan las propuestas diseñadas para introducir y profundizar en los conceptos de sucesión y convergencia a través de actividades colaborativas y el uso de software matemático. La utilización de GeoGebra permite representar gráficamente sucesiones y visualizar de manera interactiva su comportamiento. Además, se emplea esta herramienta para ilustrar el teorema de intercalación, facilitando la comprensión de su aplicación en el análisis de límites. A través de estas actividades, las personas estudiantes también pueden experimentar con la noción de subsucesiones, favoreciendo una comprensión más intuitiva y visual de estos conceptos fundamentales en el análisis matemático.

1. Introducción al concepto de sucesión y convergencia: empresa de transformación numérica

A continuación, se presentan dos definiciones que se toman como base para la dinámica. Es importante mencionar que estas definiciones no forman parte de la actividad, sin embargo se colocan para la persona lectora con el fin de proporcionar el contexto necesario y facilitar una comprensión de los conceptos clave que se utilizarán durante el desarrollo de la propuesta.

Definición 1. Sucesión numérica. Una sucesión numérica es una función $a: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{N}$. Para $n \in \mathbb{N}$ se denota $a_n = a(n)$ y se le llama el n -ésimo término de la sucesión. La sucesión se denota por (a_n) o también $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 2. Convergencia de una sucesión numérica. La sucesión (a_n) converge a $l \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ para cada $n \geq N_\varepsilon$. En lenguaje matemático: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / |a_n - l| < \varepsilon; \forall n \geq N_\varepsilon$. En tal caso, se dice que (a_n) es convergente y su límite es l o que (a_n) converge a l . Se escribe: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. También se usa la notación $a_n \rightarrow l$. Si no existe tal l , la sucesión (a_n) es divergente.

Para dar inicio a la actividad, se menciona que las personas estudiantes forman parte de una empresa muy importante en el ámbito de las Matemáticas que se denomina ETN: Empresa de Transformación Numérica, la cual se encarga de seguir un procedimiento bastante riguroso y estructurado para transformar números naturales en otros números reales. A partir de lo anterior, en la empresa se tienen diferentes departamentos (cada uno debe contar con calculadora), los cuales se presentan a continuación:

- *Departamento A:* se encarga de escoger la materia prima (números naturales en orden, comenzando con el 1).
- *Departamento B:* se encarga de determinar el inverso multiplicativo del número recibido.
- *Departamento C:* se encarga de sumarle uno al número recibido.
- *Departamento D:* se encarga de elevar el número recibido al número inicial.

- **Departamento E:** se encarga de verificar el funcionamiento de los demás departamentos y concluir si la transformación numérica es correcta. Además, debe dar al departamento *F* el número recibido con dos decimales sin redondear.
- **Departamento F:** se encarga de llevar el inventario de la empresa y describir el proceso seguido para cada número.

Una vez que se mencionan los departamentos y definen las personas que los integran, entonces se procede a acomodar el aula. El departamento *E* debe estar cerca de la pizarra, pues el inventario se coloca ahí. Posteriormente, se ingresa el número 1 a la empresa, de modo que al pasar por los diferentes departamentos se obtiene el número 2. Luego se repite este procedimiento para los números 2, 3, 4 y 5, obteniendo 2.25, 2.37, 2.44 y 2.48 respectivamente. Seguidamente, se informa a la empresa que se recibió un nuevo cargamento de números que deben ser transformados, los cuales son: 50, 100, 200 y 300. Se obtendrá entonces 2.69, 2.70, 2.71 y 2.71 respectivamente. Finalmente, se realizan las siguientes preguntas al alumnado, esperando las respuestas que se colocan:

Preguntas	Respuestas esperadas
¿Es posible describir el funcionamiento de la empresa por medio de una expresión matemática?	Sí: $(n^{-1} + 1)^n$
Si la empresa sigue operando con números mayores, ¿qué números se obtendrán?	2.71
Este número obtenido (2.71), ¿a cuál número real se aproxima?	Al número irracional e

2. Uso de GeoGebra

a. Representación gráfica de sucesiones

Para esta actividad es necesario que el alumnado cuente con computadora y el programa GeoGebra. El objetivo es construir un applet que permita representar gráficamente sucesiones numéricas. En el siguiente enlace, se presentan las instrucciones necesarias para que cada estudiante pueda generar su propio applet: https://6f33fa7f78ea46e2aaca-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/kenneth_esquivelmurillo_ucr_ac_cr/EWYBBxRxEzNLhr760wFnGpMBiqhIpZ6s2m3we7BZTNq-wA?e=x42L8K.

Finalmente, se invita a las personas estudiantes a explorar el applet con diferentes sucesiones y a presentar algunas de ellas a sus pares, destacando algunas características como acotamiento, monotonía y convergencia. En el siguiente enlace se encuentra un ejemplo del applet: <https://www.geogebra.org/m/zrqcvdct>.

b. Teorema de intercalación (del emparedado)

A continuación, se presenta el teorema de intercalación, popularmente conocido como el teorema del emparedado.

Teorema de intercalación. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes a l tales que $a_n \leq s_n \leq b_n$ a partir de n_0 , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = l$.

A partir del recurso generado en la actividad anterior, se solicita al estudiantado que genere un applet para visualizar el comportamiento de las sucesiones implicadas en la resolución del siguiente ejercicio, en el que se ve involucrado el teorema de intercalación:

Determine hacia qué valor converge la sucesión numérica $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$.

Finalmente, se discute con el estudiantado la resolución del ejercicio y se aprecia gráficamente el comportamiento de las sucesiones. En el siguiente enlace se encuentra un ejemplo del applet: <https://www.geogebra.org/m/qmvamkcb>.

c. Subsucesiones

A continuación, se presenta la definición de este concepto y un ejercicio matemático, con el fin de apreciar la utilidad del applet que se generará.

Definición 3. Subsucesión numérica. Dada una sucesión $a = (a_n)$ y una función $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente, se dice que $b = a \circ \varphi$ es subsucesión de a . En otras palabras, la sucesión (b_n) es subsucesión de (a_n) si existe tal φ de manera que $b_k = a_{\varphi(k)}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. En tal caso se denota $b = (a_{\varphi(k)})$ o $b = (a_{n_k})$, donde $n_k = \varphi(k)$.

A partir del recurso generado en la actividad anterior, se solicita al estudiantado que genere un applet para visualizar el comportamiento de la sucesión y subsucesión implicadas en la resolución del siguiente ejercicio:

Considere la sucesión $a_n = \frac{3 \cdot \text{sen}\left(\frac{n^4+n^3-n^2-n}{3n+3}\right) + 3n \cdot \text{sen}\left(\frac{n^3-n}{3}\right)}{n^4+n^3-n^2-n}$. Determine b_n y la función φ que comprueba que a_n es una subsucesión de b_n . Además, calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot \text{sen}\left(\frac{n^4+n^3-n^2-n}{3n+3}\right) + 3n \cdot \text{sen}\left(\frac{n^3-n}{3}\right)}{n^4+n^3-n^2-n} \right)$.

Finalmente, se discute con el estudiantado la resolución del ejercicio y se aprecia gráficamente el comportamiento de las sucesiones. En el siguiente enlace se encuentra un ejemplo del applet: <https://www.geogebra.org/m/h5cvvca5>.

Discusión

La actividad colaborativa permitió que las personas estudiantes se involucraran activamente en la dinámica, participando con interés y verificando el trabajo de sus compañeros. La analogía utilizada, en la que cada grupo representaba un departamento dentro de una empresa, promovió un sentido de responsabilidad en cada equipo, fortaleciendo la comprensión del rol que desempeñaban dentro del proceso. Al plantear las preguntas finales, las respuestas obtenidas fueron las esperadas, confirmando que la sucesión analizada se acercaba progresivamente al número e . Este concepto se estudia de manera formal en el curso MA0009, lo que permitió establecer una conexión con contenidos futuros y generar una base intuitiva en el alumnado.

El uso de GeoGebra resultó ser una herramienta clave en la actividad, ya que facilitó la representación gráfica de las sucesiones sin necesidad de realizar cálculos extensos. Esto optimizó el tiempo de trabajo y permitió centrar la atención en la comprensión conceptual del objeto matemático. El interés del estudiantado se evidenció en las preguntas formuladas durante la sesión, así como en los applets generados y en la aplicación de la herramienta en otras actividades del curso. En cuanto a los recursos empleados para abordar el teorema de intercalación y el concepto de subsucesiones, se observó que fueron útiles para comprender la teoría y su interpretación gráfica. No obstante, su aplicación en la resolución de ejercicios resultó limitada, ya que la representación visual solo complementa el análisis algebraico, pero no sustituye la necesidad de desarrollar el procedimiento matemático de forma rigurosa.

Conclusiones

La transición de la secundaria a la universidad en Matemáticas es un desafío, ya que implica pasar de un enfoque que suele ser algorítmico a uno más formal y abstracto, especialmente en análisis matemático, exigiendo nuevas habilidades y comprensión profunda de conceptos como sucesión y convergencia (Tall, 1992). Con base en lo anterior, diferentes investigaciones evidencian que el rezago en la formación matemática de la educación secundaria en Costa Rica dificulta esta transición (Picado, 2022). La falta de familiaridad con los procesos formales de demostración y con el razonamiento abstracto hace que el alumnado encuentre dificultades al enfrentarse a cursos universitarios como MA0009 en los que se tiene el primer acercamiento al análisis matemático. Por ello, se vuelve fundamental diseñar estrategias didácticas que faciliten la apropiación de estos conceptos de manera progresiva y significativa.

Para fortalecer el aprendizaje de conceptos matemáticos en el análisis, es fundamental emplear metodologías diversificadas que vayan más allá de la exposición teórica y la resolución de ejercicios descontextualizados. En lugar de depender exclusivamente de clases magistrales, se recomienda diseñar actividades que fomenten la participación activa del estudiantado, permitiéndole involucrarse en el quehacer matemático y construir su propio conocimiento. Las actividades colaborativas y contextualizadas resultan especialmente valiosas, ya que facilitan la apropiación de las Matemáticas mediante la exploración, el razonamiento y la resolución de problemas en contextos significativos (Yarlequé, 2012).

Asimismo, el uso de tecnología desempeña un papel esencial en la visualización y comprensión de conceptos fundamentales del análisis, como sucesión, convergencia y subsucesión, además de contribuir a la interpretación intuitiva de teoremas matemáticos. En este sentido, se recomienda desarrollar estrategias didácticas que integren herramientas digitales como GeoGebra, permitiendo que las personas estudiantes exploren de manera dinámica las propiedades de los objetos matemáticos y generen representaciones visuales que fortalezcan su comprensión. Para profundizar en la asimilación de teoremas complejos, es conveniente promover experiencias en las que el estudiantado no solo utilice recursos tecnológicos predefinidos, sino que también tenga la oportunidad de construir sus propias representaciones interactivas. A través de la creación de modelos y simulaciones en GeoGebra, el alumnado puede identificar patrones, formular conjeturas y validar propiedades matemáticas, desarrollando así un aprendizaje más autónomo (Auccahuallpa, *et al.*, 2022).

La combinación de estrategias colaborativas, el uso de software matemático y la implementación de analogías puede constituir un enfoque integral y efectivo para abordar la enseñanza de las sucesiones y su convergencia en cursos introductorios de Matemáticas. Estos recursos no solo facilitan la comprensión conceptual, sino que también podrían promover creencias positivas hacia las Matemáticas y el desarrollo del pensamiento matemático riguroso, preparando al estudiantado para afrontar con éxito cursos más avanzados en el área del análisis matemático.

Referencias y bibliografía

- Ascencio, R. & Eccius-Wellmann, C. (2019). Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la Teoría de la Variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales. *Educación matemática*, 31(2), 161-194. <https://doi.org/10.24844/em3102.07>
- Auccahualpa, R., Troya, R. & Rodríguez, D. (2022). Beneficios del uso de GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Universidad, aprendizajes y retos de los objetivos del desarrollo sostenible*, 267-273. <http://repositorio.unae.edu.ec/bitstream/56000/2587/1/267%20Beneficios%20del%20uso%20de%20Geogebra.pdf>
- Díaz, E. (2023). La experiencia en la formación de educadores matemáticos en la Región Branca de Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 17(1), 91-108. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/55707/59168>
- Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D. & Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(3), 301-324. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2133>
- Martínez, M. (2008). *Diferentes representaciones en matemática: una entrevista*. VI Festival Internacional de Matemática 29 al 31 de mayo, 2008, Colegio Bilingüe San Agustín, Palmares, Costa Rica. <https://d9.cientec.or.cr/archivo/matematica/2010/ponenciasVI-VII/Margot-2.pdf>
- Picado, P. (2022, 19 de abril). *La formación y enseñanza de la matemática requieren una urgente transformación*. Universidad de Costa Rica. <https://www.ucr.ac.cr/noticias/2022/4/19/la-formacion-y-ensenanza-de-la-matematica-requieren-una-urgente-transformacion.html>
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). Macmillan.
- Yarlequé, C. (2012). Trabajo colaborativo en el área de Matemáticas. En blanco y negro, *Revista sobre Docencia Universitaria*, 3(1), 26-35. <https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/download/2889/2815/0>