



Sequências numéricas: Um estudo alicerçado na criação de problemas sobre números figurados

José Antonio **Salvador**
Universidade Federal de São Carlos - SP
Brasil
jasalvador@ufscar.br

Eleni **Bisognin**
Universidade Franciscana - RS
Brasil
eleni.bisognin@gmail.com

Vanilde **Bisognin**
Universidade Franciscana - RS
Brasil
vanilde.bisognin@gmail.com

Resumo

Nesse trabalho são apresentados resultados parciais de um projeto de pesquisa que tem como foco a criação de problemas. Participaram dessa pesquisa alunos de um curso básico de Engenharia Química, matriculados numa disciplina que possui um tópico sobre Sequências e Séries Numéricas. A temática proposta foi sequências numéricas e os alunos foram desafiados a criar problemas referentes a essa temática a partir da exploração dos números figurados. A coleta de dados teve por base as produções dos alunos e os resultados foram analisados a partir de categorias previamente estabelecidas e relacionadas com a estrutura matemática dos problemas propostos: informação, requerimento, contexto e ambiente matemático. Os resultados obtidos mostram que os alunos desenvolveram a capacidade de indagar, de criar e de resolver problemas complexos.

Palavras-chave: Criação de problemas; Resolução de problemas; Números figurados; Sequências numéricas; Ensino de Matemática.

Introdução

A resolução de problemas, enquanto metodologia de ensino e aprendizagem, tem sido objeto de estudos e pesquisas, nos últimos anos, em diferentes níveis de escolaridade. Nos estudos mais recentes, observa-se uma ênfase não apenas na resolução de problemas propostos pelo professor, mas uma crescente ênfase na criação de problemas envolvendo os alunos. De acordo com Allevato e Duarte (2020) e Malaspina (2013), a criação de problemas é tão fundamental quanto a resolução porque é possível desenvolver outras habilidades nos alunos, à medida que eles se envolvem no processo de proposição de novos problemas. Contudo, apesar dos resultados promissores em pesquisas sobre criação de problemas, ainda existe uma escassez de estudos nesse campo.

Sobre a atividade de criação de problemas Malaspina (2013), destaca que,

[...] a atividade de criar problemas matemáticos complementa a resolução de problemas, uma vez que estimula ainda mais a criatividade e contribui para a aprendizagem de conceitos, proposições e procedimentos. Ela promove a argumentação, a reflexão e melhora a linguagem matemática (Malaspina 2013, p. 237).

Analizando-se os documentos oficiais referentes as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de graduação da área de Ciências Exatas e da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), que guia os conteúdos da Matemática a serem abordados na Educação Básica, eles recomendam que as atividades com os alunos estejam fundamentadas na criação e resolução de problemas. Os documentos destacam as competências e habilidades necessárias para raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, favorecendo a formulação e solução de problemas em diversos contextos.

No presente trabalho são apresentados resultados de um estudo que teve como problema de pesquisa verificar como a construção dos números figurados contribuem para a compreensão de sequências numéricas. Para responder à questão, foi proposto a construção de atividades que foram trabalhadas com alunos matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II de um curso de graduação em Engenharia Química, centrado no estudo de sequências numéricas que enfatizou a criação de problemas por meio da exploração de Números Figurados. O objetivo do trabalho é analisar as habilidades e competências relacionadas com a criação de problemas desenvolvidas pelos estudantes. O foco da proposta é a análise de números figurados e números figurados centrados, com uma abordagem que incorpora não apenas a determinação de termos gerais, mas também o estudo de propriedades, incluindo os problemas propostos pelos estudantes sobre a possibilidade de explorar as sequências de perímetros e áreas, ao conectar os pontos extremos dos números figurados e as relações desses padrões com equações discretas e sistemas lineares de equações.

Criação de problemas

Uma atividade de criação de problemas tem como ponto central a situação-problema que oferece o contexto e os dados que devem ser usados para obter uma solução. Esses dados podem ser provenientes de contextos extramatemáticos relacionados à vida cotidiana dos alunos ou intramatemáticos, próprios do universo da Matemática. Ambas as categorias de situações-

problema apresentam diversas subcategorias, que se diferenciam pela forma como os dados são apresentados podendo ser textos, figuras, gráficos, tabelas, expressões matemáticas ou padrões. A Figura 1, a seguir, ilustra os diferentes tipos de situações-problema.

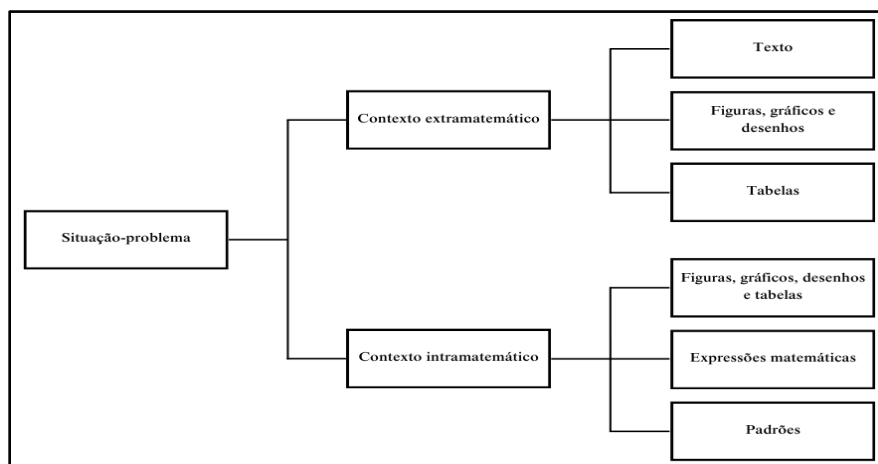


Figura 1. Contexto de criação de problemas (Adaptado de Cai, Hwang, Melville, 2023).

De acordo com Malaspina (2018) o Quadro 1 apresenta quatro elementos fundamentais que devem ser considerados em uma atividade de Criação de Problemas.

Tabela 1

Elementos fundamentais de um problema.

Elementos	Descrição
<i>Informação</i>	Dados quantitativos ou dados fornecidos explícita ou implicitamente no problema
<i>Requerimento</i>	O que se pede para encontrar, examinar ou concluir, incluindo gráficos e demonstrações.
<i>Contexto</i>	Podendo ser intramatemático (puramente matemático) ou extramatemático (contexto de situação cotidiana)
<i>Ambiente Matemático</i>	Estrutura matemática global na qual estão localizados os conceitos matemáticos que intervêm ou podem intervir para resolver o problema, por exemplo, funções lineares, teoria dos números, geometria analítica, etc.

Nota: Adaptado de Malaspina (2018).

Sobre a criação de problemas, os autores Blanco e Perez (2014) destacam diversos aspectos positivos para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Entre os benefícios mencionados, estão: o aumento do conhecimento matemático, uma vez que essa prática permite aos estudantes estabelecer conexões entre diferentes conteúdos ao coletarem dados, discutirem ideias e estratégias de solução, além de escreverem e se comunicarem de forma clara; a motivação, pois a criação de problemas desperta a curiosidade e fomenta uma atitude positiva em relação à Matemática; a superação de erros, pois o processo exige que o aluno selecione as informações relevantes para a resolução do problema; a avaliação da aprendizagem, já que, ao

criar problemas, o professor pode identificar as habilidades do estudante em utilizar o conhecimento matemático, seu modo de raciocinar e o desenvolvimento de conceitos; e, finalmente, a criatividade, que está diretamente relacionada à capacidade do estudante de gerar novos problemas. Leikin (2018) enfatiza a formulação de problemas como caminho para desenvolver talento matemático e criatividade, reforçando a importância desse enfoque. Em relação a formulação e resolução de problemas, Singer, Ellerton, Cai, Leung (2011) colocam que essa abordagem pode promover o envolvimento dos estudantes em atividades matemáticas autênticas; pode oportunizar encontrar muitos problemas, métodos e soluções; promover a criatividade e uma disposição para procurar novos problemas, métodos alternativos e soluções inovadoras. Ao utilizar essa abordagem Liljedahl (2020), destaca a importância de transferir a sala de aula em um 'ambiente de pensamento matemático', ao propor problemas não rotineiros que estimulem a criatividade, a experimentação e a colaboração.

Metodologia da investigação

O desenho desta pesquisa corresponde a um estudo descritivo que busca estudar as produções dos alunos quando confrontados com tarefas de criação de problemas. Os sujeitos do estudo correspondem a um grupo de 49 alunos matriculados numa disciplina do curso básico de Engenharia Química de uma universidade pública, localizada no estado de São Paulo, Brasil. Nesse estudo foi desenvolvido um instrumento com duas tarefas semiestruturadas de criação de problemas, envolvendo números figurados triangulares.

Para a análise dos resultados seguimos as categorias definidas por Malaspina (2018) descritas no Quadro 1, que trata das etapas de criação de problemas o que nos permitiu estudar a capacidade dos alunos em criar problemas.

Análise dos resultados

A seguir são apresentadas as características gerais dos problemas criados pelos alunos e os resultados são apresentados de acordo com as categorias propostas nos estudos de Malaspina (2018).

O trabalho foi realizado com os alunos reunidos em grupos de 3 e 4 componentes com um total de 49 alunos, designados por G_1 , G_2 , etc ..., e que foram convidados a construir sequências envolvendo números figurados triangulares. Para isso foi proposto um problema inicial descrito a seguir:

Tabela 2
Problema inicial.

-
- a) O que são números figurados triangulares?
 - b) Represente geometricamente os primeiros termos da sequência de números triangulares.
 - c) Construa a sequência dos n primeiros termos dos números triangulares.
 - d) Observe o padrão e elabore uma lei de formação dos números figurados triangulares. Explícite o termo geral dos números triangulares $T(n)$, $n \in \mathbb{N}$ em função de n .
 - e) Faça um gráfico da função discreta que representa os números triangulares figurados $(n, T(n))$.
-

Nota: Elaboração dos autores.

Neste problema, a informação está constituída pelos números figurados triangulares, o requerimento está explicitado em cada pergunta, o contexto é intra-matemático e o ambiente matemático está relacionado com a construção de sequência numérica, representação gráfica, determinação do termo geral de uma sequência e variável discreta. Dos seis grupos todos conseguiram resolver o problema, embora alguns necessitaram de ajuda contínua do professor.

Com base no problema proposto e discutido em plenária o professor desafiou os alunos a proporem outros problemas. Apresentamos, a seguir, o problema proposto pelo grupo G₁.

Tabela 3

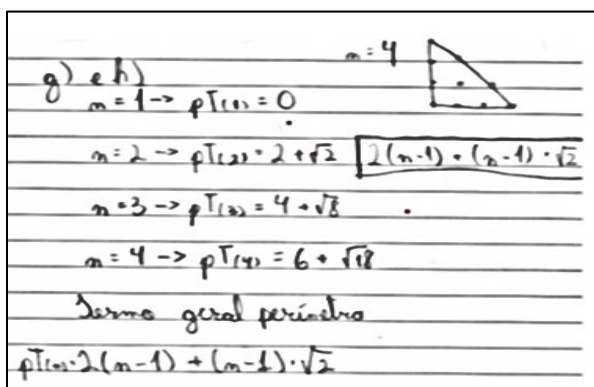
Problema proposto pelo Grupo G₁.

Problema:

- g) Desenhe a sequência de números triangulares figurados ligando os pontos extremos dos triângulos retângulos;
- h) Construa a sequência dos perímetros $pT(n)$ dos triângulos retângulos figurados;
- i) Obtenha a área de cada um dos triângulos figurados;
- j) Descreva o termo geral da sequência dos perímetros $pT(n)$ da região que limita os números triangulares figurados;
- k) Achar o termo geral da sequência da área $aT(n)$.

Nota: Elaboração dos autores.

Analisando-se o problema construído pelos alunos observa-se que o grupo propôs o problema por variação, mudando a informação, o requerimento, o entorno matemático e mantendo o contexto intramatemático. O problema contém todas as informações necessárias para a obtenção de uma solução coerente. Portanto, os alunos mostraram capacidade de variar um problema e criarem outro com novas informações e requerimentos. A seguir, apresenta-se a solução apresentada pelo grupo G₄.



g) e h)

$n=1 \rightarrow pT(1) = 0$

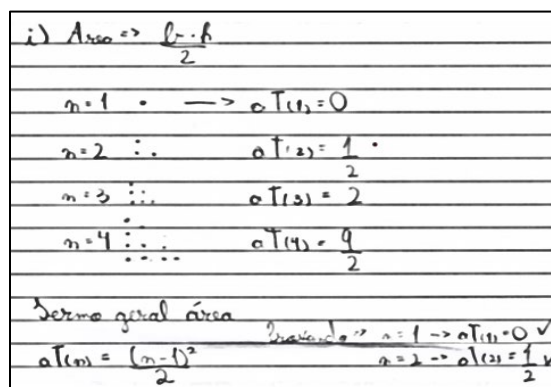
$n=2 \rightarrow pT(2) = 2 + \sqrt{2}$

$n=3 \rightarrow pT(3) = 4 + \sqrt{2}$

$n=4 \rightarrow pT(4) = 6 + \sqrt{2}$

Termo geral perímetro

$pT(n) = 2(n-1) + (n-1) \cdot \sqrt{2}$



i) Área $\Rightarrow \frac{b \cdot h}{2}$

$n=1 \rightarrow aT(1) = 0$

$n=2 \therefore aT(2) = \frac{1}{2}$

$n=3 \therefore aT(3) = 2$

$n=4 \therefore aT(4) = \frac{9}{2}$

Termo geral área

$aT(n) = \frac{(n-1)^2}{2}$

Verificação: $n=1 \rightarrow aT(1) = 0 \checkmark$
 $n=2 \rightarrow aT(2) = \frac{1}{2} \checkmark$

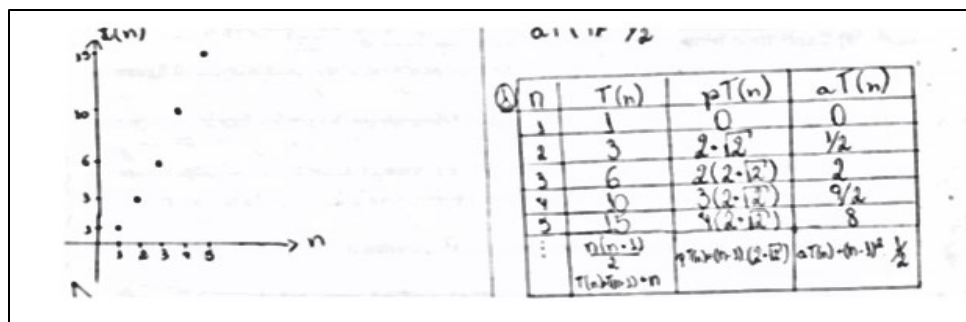


Figura 2. Solução apresentada pelo Grupo G₄ (Dados da pesquisa).

Após discussões na plenária os alunos questionaram as sequências construídas pois são todas sequências crescentes e indagaram ao professor se seria possível construir uma sequência decrescente. A partir do questionamento dos alunos o professor propôs que criassem uma situação problema com essa característica. A indagação dos alunos possibilitou ao professor explorar sequências decrescentes. A construção geométrica foi proposta pelo grupo G₁ e foi realizada em conjunto com o professor da disciplina, usando o software GeoGebra, conforme a Figura 3, a seguir.

Para a construção o grupo considerou a sequência de triângulos equiláteros encaixantes com os primeiros termos mostrados na Figura 3.

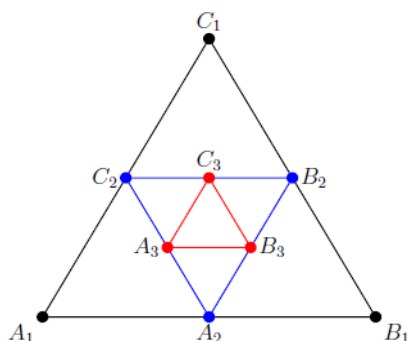


Figura 3. Sequências de Triângulos Encaixantes (Dados da pesquisa).

Para calcular a área A e o perímetro P de cada um dos triângulos encaixantes seguiram os seguintes passos:

1. Triângulo inicial: Consideraram que o lado do triângulo inicial é $l_1 = L$ (número real positivo) e, assim o perímetro P_1 (em unidades de comprimento) e a área A_1 (em unidades de área). Consideraram que o lado do triângulo inicial é

$l_1 = L$ e, assim o perímetro P_1 e a área A_1 são dados por:

$$P_1 = 3L$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$$

2. Triângulo 2 é formado pelos pontos médios do triângulo inicial. Os lados do segundo triângulo são metade do lado do triângulo inicial $l_2 = L / 2$, portanto o perímetro P_2 e a área A_2 são dados por:

$$P_2 = 3 \frac{L}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{4} A_1 = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 = \frac{\sqrt{3}}{16} L^2$$

3. Triângulo 3 é formado pelos pontos médios do segundo triângulo inscrito. Os lados do terceiro triângulo são metade do lado do segundo triângulo $l_3 = L / 4$. O perímetro P_3 e a área A_3 são:

$$P_3 = 3l_3 = 3 \frac{L}{4}$$

$$A_3 = \frac{1}{4} A_2 = \frac{1}{4^2} A_1 = \frac{\sqrt{3}}{64} L^2$$

Continuando com esse processo obtém-se as seguintes sequências apresentadas na Figura 4.

Triângulo n	Perímetro P_n	Área A_n
1	$3L$	$\frac{\sqrt{3}}{4} L^2$
2	$3 \frac{L}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{16} L^2$
3	$3 \frac{L}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{64} L^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$3 \frac{L}{2^{n-1}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^{2n}} L^2$

Figura 4. Perímetros e áreas dos triângulos construídos (Elaborado pelos autores).

Observando-se as sequências construídas, observa-se que as mesmas são decrescentes e convergentes porque calculando o limite quando n tende ao infinito do termo geral P_n e de A_n , obtém-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \frac{L}{2^{n-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} L^2}{2^{2n}} = 0$$

Consideramos que as características particulares de cada problema, como a forma de apresentar as informações e as relações matemáticas que poderiam surgir deles, permitiram que os alunos colocassem em prática seus conhecimentos prévios, habilidades matemáticas e criatividade.

Considerações finais

Vários pesquisadores da área de Educação Matemática caracterizam a habilidade matemática de alunos que possuem talento para a matemática, considerando apenas as capacidades dos mesmos em trabalhar com tarefas de resolução de problemas. No entanto, na literatura existem poucos trabalhos que centram atenção no estudo do desempenho destes alunos talentosos quando confrontados com tarefas de criação de problemas. Nesse sentido, os estudos realizados por Silver e Cai (2005), entre outros, mostram que alunos com talento matemático apresentam melhor capacidade de criar problemas do que os seus pares que possuem menos habilidades em Matemática. Justificam a afirmação devido ao fato de que suas produções são mais ricas em termos de dificuldade de cálculo, tipo de conteúdo envolvido, diferentes modos de solução, complexidade linguística, tipo de perguntas, entre outras.

As ideias acima também foram observadas no grupo de alunos que participou do trabalho. Observeu-se que, quando confrontados com o desafio de criar um problema, alguns alunos não conseguiram inicialmente estabelecer um diálogo, mesmo com seus pares de grupo. Após os questionamentos do professor e a interação com os colegas da turma os mesmos conseguiram propor alguns questionamentos. Isso mostra que é necessário colocar os alunos frente ao desafio de criar problemas e não apenas o de resolvê-los.

Referências e bibliografia

- Blanco, M. F.; Pérez, I. A. G. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela Abierta*, (17), p.1-12.
- Cai, J. and Hwang, S. and Melville, M. (2023). Mathematical Problem-Posing Research: Thirty Years of Advances Building on the Publication of “On Mathematical Problem Posing”. Chapter 7, p.1 - 25.
- Duarte, E. M.; Allevato, N. S. Gomes. (2020). Formulação de Problemas no desenvolvimento de um Jogo Educacional Digital de Matemática. *Revista de Educação Matemática*, (17), p.1-25.
- Espinoza, J. (2011). Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio. Trabajo de Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- Leikin, R. (2018) Giftedness and high ability in mathematics. In: Lerman, S. (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Cham: Springer International Publishing.
- Liljedahl, P. (2020). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Practices for Enhancing Math Learning*. Corwin press.
- Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Sociedad de Educación Matemática Uruguay, 117–128.
- Malaspina, U. J. (2018). ¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (52), 307-313.
- [Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J., Leung, E. \(2011\). Problem Posing in Mathematics Learning and Teaching: a Research Agenda. In Ubuz, B. \(Ed.\), Developing mathematical thinking. Proceedings of the 35th PME, vol 1, pp.137-166 \(Research forum\). Ankara, Turkey: PME. ISBN: 978-975-429-294-7.](#)
- Silver, E. A.; Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by Middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (5), p.521-539.