Intuiciones probabilísticas y su alcance para la enseñanza de la probabilidad

Hugo **Alvarado**
Universidad Católica de la Santísima Concepción
Chile
alvaradomartinez@ucsc.cl
Lidia **Retamal**
Universidad Católica de la Santísima Concepción
Chile
lretamal@ucsc.cl

Resumen

Concordamos que, para el aprendizaje de Probabilidad, los estudiantes deben tener la oportunidad de variadas experiencias de situaciones probabilísticas asociadas a los diversos significados de la probabilidad. Se presentan las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad mediante un cuestionario de ítems cerrados y abiertos, y analizan las intuiciones de los asistentes y la construcción de argumentaciones mediadas por variadas representaciones. El propósito del taller es introducir la motivación y desarrollo del razonamiento probabilístico mediante la argumentación al incorporar elementos mediacionales en el proceso inicial de aprendizaje estocástico. Proponemos una enseñanza de la probabilidad que relacione la comprensión teórica y práctica de los significados de la probabilidad, que va del intuitivo al axiomático, a través de la estimación cuantitativa de las intuiciones probabilísticas como grado de creencia personal, y la confrontación explícita de las diversas heurísticas con el conocimiento formal de la probabilidad.

Palabras clave: Educación preuniversitaria; estocástica; implementación curricular; incertidumbre; intuición; significados de la probabilidad.

1. Introducción

Aunque utilizamos nociones probabilísticas informales a diario para tomar decisiones, la investigación sobre probabilidad se ha centrado principalmente en los significados clásico y frecuentista, siendo casi inexistente la investigación sobre el significado intuitivo de la probabilidad. Concordamos con Sharma (2014) que los entornos sociales y la cultura común pueden influir en las ideas informales de probabilidad, y en la necesidad de confrontar las creencias cotidianas intuitivas con los conceptos probabilísticos, para aclarar los objetivos, el propósito y las limitaciones de la enseñanza de la probabilidad.

Aun cuando se reconoce que la intuición se basa en las propias creencias epistemológicas, las cuales disponen a los estudiantes a aceptar o no la incertidumbre (Fulmer, 2014), escasa es la atención del papel de las intuiciones en la comprensión de la probabilidad en estudiantes de educación terciaria. Esta falta de atención contradice el papel potencialmente influyente del significado intuitivo de la probabilidad en la construcción del conocimiento probabilístico (Alvarado et al. 2018).

En general, la educación secundaria no se caracteriza por entregar conocimientos profundos de Probabilidad, ni por realizar experimentaciones concretas o simuladas para el aprendizaje en ambientes de incertidumbre (Alvarado et al. 2021). Es así que, muchos estudiantes llegan a la universidad sin haber tenido la oportunidad de desarrollar habilidades, análisis crítico y actitudes hacia el azar y las probabilidades que les permitan fortalecer su formación como ciudadanos con sentido probabilístico.

En Didáctica de la Probabilidad, un área de indagación es el análisis de las dificultades de comprensión en el razonamiento probabilístico y las argumentaciones que presentan los sujetos (Estrella et al. 2019). En la actualidad profesores y estudiantes de nivel terciario se enfrentan cotidianamente con información sobre situaciones en que hay incerteza en los medios de comunicación o en situaciones en que deben tomar una decisión de carácter objetivo. Sin embargo, los profesores no han llegado a adquirir un razonamiento probabilístico que les permita reconocer y modelar situaciones de azar (Ortiz et al. 2012), analizar las contradicciones entre sus creencias y concepciones con la probabilidad formal, para enfrentar las ideas informales y creencias que tienen sobre las probabilidades y progresar con comprensión en la axiomática de la probabilidad.

Batanero (2005) en su estudio analizó los elementos de campos de problemas, procedimientos, lenguaje, propiedades y conceptos relacionados a cinco significados de la probabilidad, a saber, significado de la probabilidad intuitivo, Laplaciano, frecuencial, subjetivo y axiomático. En este taller tendremos en cuenta el significado intuitivo y axiomático; analizando las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad con los asistentes por medio de la presentación de ítems relacionados con la intuición y heurísticas en situaciones de incertidumbre.

2. Significados de Probabilidad

En la enseñanza de probabilidades en educación media son de interés las siguientes aproximaciones:

a. *Significado intuitivo de probabilidad*. Aceptación del azar: Para comenzar a enseñar este concepto es necesario que los estudiantes sean capaces de diferenciar las situaciones aleatorias con las deterministas, es decir, que aprendan las características de un suceso aleatorio. Los conceptos que surgen son aleatoriedad y variabilidad, suceso seguro, posible e imposible, posibilidad y grado de creencia.

b. *Significado clásico de probabilidad*. Se define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorable al suceso y el número de todos los casos posibles, siempre que todos sean equiprobables. Los conceptos que emergen son juego de azar, casos favorables y casos posibles, probabilidad como cociente.

c. *Significado frecuencial de probabilidad*. Se obtiene una estimación experimental de la probabilidad. Su valor teórico sería el límite de la frecuencia relativa de aparición del suceso al realizar la experiencia un número infinito de veces en las mismas condiciones. Un aspecto importante en este enfoque es comprender la diferencia entre probabilidad (valor teórico constante que nunca alcanzamos) y frecuencia relativa (estimación experimental de la probabilidad, que puede cambiar de una estimación a otra). También, hay que entender que los resultados de una experiencia son impredecibles, pero se puede predecir el comportamiento general de un gran número de resultados. Los conceptos que emergen frecuencia, experimento aleatorio, infinito, ensayo y ensayos repetidos.

d. *Significado de probabilidad Condicional*. A menudo se sabe que ha ocurrido un suceso A y se desea conocer la probabilidad de otro suceso B. Veremos cómo influye la ocurrencia del suceso A en la probabilidad del suceso B. Si P(A) >0 la probabilidad condicional de B dado que ocurrió A, denotada por P(B/A), se define por:

$$P(B/A) = \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(A)} & si\ P(A) > 0 \\ 0 & si\ P(A) = 0 \end{cases}$$

e. *Función de probabilidad*. Sea X una variable aleatoria discreta con recorrido R_X. Sea p una función que asigna a cada x $\in R_X$ un número $p(x) = P(X = x)$ llamado probabilidad de x. La función de probabilidad p de la v.a. X debe satisfacer las siguientes propiedades:

a) $p(x) > 0$; $\forall\ x \in R_X$ b) $\sum p(x) = 1$; $x \in R_X$

La función p es expresada usualmente como los pares $(x, p(x))$ $\forall\ x \in R_X$, llamada *distribución de probabilidades*, que es una lista de todos los resultados posibles de un experimento y de la probabilidad relacionada con cada resultado.

f. *Experimento de probabilidad Binomial*. Un experimento se dice que es Bernoulli si tiene dos resultados posibles, que llamaremos "éxito" o "fracaso" dependiendo de que ocurra o no un cierto suceso, que llamaremos "A". Llamamos p a la probabilidad que ocurra el suceso A en una sola prueba Bernoulli, probabilidad de éxito y, q la probabilidad que no ocurra el suceso A. La función de probabilidad para la variable aleatoria X como una variable dicotómica es dada por

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & si\ x = 0, 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Suponga ahora que realizamos *n* repeticiones independientes de un experimento aleatorio en que en cada repetición podemos definir una variable aleatoria Bernoulli X_i que nos dé el resultado de cada prueba, así, tenemos *n* variables aleatorias independientes. Si nuestro interés es saber el número de éxitos obtenidos, cada vez que ocurre en suceso A la variable aleatoria X_i= 1 y de esta forma el número de éxitos obtenido será la suma de *n* variables aleatorias independientes X con $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. La probabilidad que ocurra el evento A *r* veces en las *n* repeticiones será:

$$p(r) = P(X = r) = \begin{cases} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} & si\ r = 0,1,\cdots,n \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para indicar que una variable aleatoria *X* sigue distribución Binomial con parámetros *n* y *p* usamos por notación $X \sim$ B(*n*,*p*)

Las actividades pretendidas del Taller conducen a la apropiación progresiva de nociones de probabilidad mediante tres tipos de representaciones (manipulativas, computacional y algebraica) para argumentar los resultados de experimentos aleatorios.

3. Estrategia para desarrollar el taller

El fundamento de este Taller considera los significados de la probabilidad en la enseñanza y el razonamiento probabilístico.

Objetivos:

• Reflexionar sobre la utilidad de la probabilidad en el análisis de las situaciones aleatorias.

• Valorar el uso sistemático y didáctico de las intuiciones y heurísticas en las prácticas de enseñanza de la probabilidad.

• Explorar la ley de los grandes números por medio de la repetición de experimentos aleatorios y su aplicación a la asignación de probabilidades.

• Resolver problemas de donde emergen los significados de probabilidad y el uso del modelo binomial.

Las actividades propuestas conducen a la apropiación progresiva mediante tres tipos de representaciones para argumentar los experimentos aleatorios. Se entiende por recursos didácticos a todos aquellos instrumentos que facilitan la comunicación hacia la exploración, aplicación y argumentación de conceptos importantes en el aula de estadística.

• *Representación manipulativa*: el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico. Aparecen la noción de experimento aleatorio y estadístico. Los procedimientos son empíricos y gráficos y el lenguaje se reduce a expresiones verbales y gráficas en papel y lápiz.

• *Representación algebraica*: se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso a elementos de álgebra, los procedimientos serían analíticos.

• *Representación computacional*: amplía la variedad de gráficas dinámicas. Además, del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y permite trabajar con las variables estadísticas y aleatorias simultáneamente. El argumento preferible es inductivo, estudio de ejemplos y la generalización. Aparecen conceptos como el experimento de probabilidad binomial.

3.1 Diseño del Taller:

Los siguientes ítems ponen en juego las intuiciones, heurísticas y conocimientos de probabilidad.

Actividad 1. Se propone evaluar nueve ítems de contexto diario, para estimar su grado de creencia sobre probabilidades dentro de un rango del 0 al 100.

Tabla 1
Cuestionario sobre Probabilidades y objetivo de cada ítem.

Ítem	Objetivo de evaluación
1. Llegar a los 80 años de edad en República Dominicana	Autopercepción del contexto
2. Que los estudiantes de último año de tu colegio obtengan sobre el promedio de puntos en la Prueba de Matemática de ingreso a la Universidad	Autopercepción del contexto
3. Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero	Relación de causalidad
4. Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formado de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes.	Razonamiento combinatorio, heurística de disponibilidad
5. En un gimnasio hay 1000 personas y cada una de ellas lanza 3 monedas. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las personas obtendrían tres caras?	Aplicar la ley de los grandes números
6. Una familia se proyecta tener tres hijos. ¿Qué tan probable es que los dos primeros sean hombres y el tercero sea mujer?	Distinguir entre probabilidad conjunta y probabilidad condicional
7. Si se lanza una moneda tres veces, ¿qué tan probable es obtener sello en el tercer lanzamiento si se sabe que los dos primeros lanzamientos fueron caras?	Distinguir entre probabilidad condicional y probabilidad clásica de Laplace
8. En una encuesta de opinión se consulta a los alumnos del colegio si están o no de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a tres alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor de tareas escolares para la casa?	Modelar experimentos binomiales
9. Domino los principales contenidos de la Probabilidad en el currículo de Educación Media.	Autopercepción del contexto

Los siguientes ítems de experimentación, visualización y cálculo de probabilidades, serán analizados con apoyo de la planilla Excel y/o el programa Geogebra.

Actividad 2. En un establecimiento educacional se seleccionan 2000 estudiantes y cada uno lanza dos dados de seis caras. Estime qué porcentaje de los estudiantes obtendrían un resultado mayor que 6.

Actividad 3. Utiliza Geogebra. En una encuesta de opinión se consulta a los alumnos del colegio si están o no de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a tres alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor de tareas escolares para la casa?

Ahora te toca a ti, responde los ítems a continuación. ¿Qué observas? Analiza y hace comentarios.

Actividad 4. En una encuesta de opinión en un colegio 1/3 de los alumnos está de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a tres alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor del envío de tareas escolares para la casa?

Actividad 5. En una encuesta de opinión en un colegio el 25% de los alumnos está de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a cuatro alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor del envío de tareas escolares para la casa?

Actividad 6. En una encuesta de opinión en un colegio el 10% de los alumnos está de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a 120 alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es encontrar menos de 20 alumnos a favor del envío de tareas escolares para la casa?

Actividad 7. En un primer curso de matemática para ingenieros la probabilidad de que repruebe la asignatura un estudiante es de un 50%. ¿Cuál de estos casos te parece más probable?

a) Que de 10 alumnos seleccionados 5 reprueben.
b) Que de 100 alumnos seleccionados 50 reprueben.
c) Los dos casos anteriores son igual de probables.

La Actividad 7 corresponde a una adaptación en un contexto educacional al problema de Tversky y Kahneman (1974), sobre la heurística de la representatividad, que prescinde del tamaño de la muestra y de la variabilidad del muestreo. La respuesta correcta, opción (a), asume que el grupo de 10 estudiantes tiene más probabilidad de tener un 50% de estudiantes reprobados, debido a la variabilidad en muestras pequeñas. La opción (b) da evidencia del sesgo de representatividad, en cuanto hay mayor proporción en muestras más grandes y la opción (c) no considera el efecto del tamaño de las muestras.

Además, la Actividad 7, si bien, puede argumentarse por la variabilidad en pequeñas muestras, también permite la modelización probabilística identificando la variable aleatoria discreta con distribución binomial de parámetros n=10 y p=1/2 para el caso (a) y de parámetros n=100, p=1/2 en el caso (b); y luego comparar los valores del cálculo de la probabilidad binomial.

La solución algebraica y que puede apoyarse con calculadora se presenta a continuación: Consideremos la variable aleatoria X como el número de alumnos que reprueban una asignatura de un grupo de n estudiantes. La variable X se distribuye binomial de parámetros n y probabilidad de éxito $p = 1/2$ y fracaso $1 - p = 1/2$. Así, bajo el modelo binomial $P(X = x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ para $x = 0, 1, 2,\ldots, n$, las opciones se presentan algebraicamente como:

(a) $P(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$=0,2461; (b) $P(X = 50) = \binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$=0,07958;
(c) $P(X = 5) = P(X = 50)$

Siendo la opción (a) la correcta, ya que $P(X = 5) > P(X = 50)$.

Reconocimientos

Taller elaborado en el marco del Centro de Investigación en Educación y Desarrollo CIEDE-UCSC.

Referencias

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L. y Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 21 (2), 131-156.

Alvarado, H., Retamal, L. y Peake, C. (2021). Evaluación y desarrollo del enfoque intuitivo a la comprensión de probabilidades: alcances producidos por estudiantes de secundaria. *Boletim de Educação Matemática, Bolema*. 35 (71).

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.

Estrella, S., Alvarado, H., Olfos, R. y Retamal, L. (2019). Desarrollo de la alfabetización probabilística: textos argumentativos de estudiantes. *Revista Paradigma*. 40(1), 280-304.

Fulmer, G. W. (2014). Undergraduates' attitudes toward science and their epistemological beliefs: Positive effects of certainty and authority beliefs. *Journal of Science Education and Technology*, 23(1), 198-206.

Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latino Americana de Matemática Educativa*, 15(1), 63-91.

Sharma, S. (2014). Teaching probability: A socio-constructivist perspective. *Teaching Statistics*, 78-84.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heurístics and biases. *Science*, 185, 1124-1131.