



Modelagem Matemática e GeoGebra no Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias

Celina Aparecida Almeida Pereira **Abar**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil

abarcaap@pucsp.br

Amábile Jeovana Neiris **Mesquita**
Universidade Estadual de Goiás
Brasil

amabile.mesquita@ueg.br

Marcio Vieira de **Almeida**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil

marcioalmeidasp@gmail.com

Resumo

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) permitem a realização de diversas relações entre a Matemática e outras Ciências e a criação de um ambiente propício para a aprendizagem. Estudos indicam um enfoque estritamente algébrico dado ao ensino de EDO e assim, essa pesquisa, de cunho qualitativo, foi desenvolvida em um ambiente promovido pela Modelagem Matemática (MM), e pelo GeoGebra por meio de abordagens analítica e gráfica, importantes para a construção de um conceito matemático. Neste artigo, excerto dessa pesquisa, apresentam-se atividades exploratórias, desenvolvidas em um curso de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de analisar suas potencialidades e fragilidades. Alicerçada na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, as atividades desenvolvidas permitiram articulações entre os diferentes registros de representação do objeto matemático e os alunos foram capazes de compreender EDO além dos métodos algébricos tradicionais, relacionando as soluções com os fenômenos descritos.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Formação de professores; GeoGebra; Modelagem Matemática; Registros de Representação Semiótica.

Definição e Relevância do Problema

O tema abordado nesta pesquisa, o ensino e a aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), para licenciandos em Matemática, utilizou a Modelagem Matemática (MM) como apoio metodológico e o software GeoGebra como recurso tecnológico.

Por meio das EDO é possível descrever matematicamente vários tipos de fenômenos, analisar seu comportamento e fazer previsões com boas aproximações. Sendo assim, com o intuito de contribuir para o ensino e para a aprendizagem desse conteúdo, foi proposta a utilização da Modelagem Matemática como estratégia metodológica por realizar interação entre o “mundo real” e a matemática.

Aliado a essa metodologia de ensino, fez-se uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) pois, de acordo com Marin (2008, p. 138), é no desenvolvimento das aulas que “[...] identifica-se que as TIC permitem realizar atividades que seriam impossíveis de serem feitas somente com o uso de lápis e de papel, proporcionando a organização de situações pedagógicas com maior potencial para aprendizagem”.

Gravina e Santarosa (1998, p.1), relatam que a aprendizagem “depende de ações que caracterizam o ‘fazer matemático’: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar [...]”, sendo assim, as TIC podem contribuir para que os estudantes modelem, analisem simulações, façam experimentos, conjecturem, confrontem e refinem suas ideias. Para esta pesquisa, foi utilizado o GeoGebra, que é um software de geometria dinâmica e direcionado para o ensino e aprendizagem de matemática.

O aporte teórico que orientou o desenvolvimento deste trabalho foi a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval (Duval, 1993). Esta teoria elucida a importância da utilização dos registros semióticos para a aprendizagem matemática considerando as características dos objetos matemáticos que são abstratos e devem ser representados para sua compreensão. Essa teoria proporciona suporte tanto em termos cognitivos, pois permite compreender como ocorre a construção do conhecimento, quanto em termos didáticos/metodológicos ao abordar a forma como se processa a aprendizagem.

Por acreditar em um cenário complexo e subjetivo que envolve a formação inicial de professores, esta pesquisa se desenvolveu pelo paradigma qualitativo, evidenciando o processo interpretativo/subjetivo presente, acreditando que pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores, com comportamentos imbuídos de significado e sentidos que não são imediatamente assimilados, mas sim desvendados (Alves-Mazzotti; Gewandsznajder, 1998). Santos Filho e Gamboa (2009) mencionam que o foco de pesquisas qualitativas seria a experiência individual de situações, o processo de construções de significados, o senso comum, o “como”. O pesquisador qualitativo origina-se por meio de fenômenos de seu interesse.

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu na Universidade Estadual de Goiás, em um curso de Licenciatura em Matemática com a participação de 10 alunos. Os dados foram produzidos no laboratório de informática, localizado na própria instituição e, uma parte, ocorreu utilizando-se

gravações e transcrições dos encontros, registros escritos pelos participantes durante as atividades desenvolvidas, questionário inicial, registro gráfico das atividades realizadas com o GeoGebra no computador dos grupos e, outra parte, foi obtida a partir de observações. Devido a variedade de dados existentes e a complexidade de cenários nos quais foram produzidos, a triangulação de dados amparou esse processo.

A pesquisa foi orientada pela seguinte pergunta: *como a utilização da Modelagem Matemática, como estratégia metodológica de ensino, aliada ao recurso tecnológico GeoGebra, contribuem para a aprendizagem de EDO por meio de atividades exploratórias?*

Subsidiados por esta questão, o objetivo desta pesquisa foi analisar as potencialidades e fragilidades que o desenvolvimento de atividades exploratórias em um ambiente de aprendizagem promovido pela Modelagem Matemática com a utilização do GeoGebra proporciona para a aprendizagem de EDO a partir de uma abordagem qualitativa.

Referencial Teórico e Metodológico

A motivação para a realização da pesquisa, sobre a utilização da modelagem matemática como estratégia de ensino e de aprendizagem de EDO, em um curso de licenciatura em matemática surgiu a partir de pesquisas como a de Dullius, Veith e Araujo (2013), Alvarenga, Dorr e Vieira (2016) e Rosa, Alvarenga e Santos (2019) as quais indicam que a abordagem dada em seu ensino possui um enfoque estritamente algébrico centrando-se na aplicação de métodos de resolução sem focar no comportamento da solução obtida, ou seja, sem realizar uma análise qualitativa do problema que gerou essas equações dificultando, assim, a percepção da conexão existente entre a EDO e o sistema real modelado.

A pesquisa de Dullius, Veit e Araujo (2013) traz indícios de que a MM pode ser uma facilitadora do aprendizado pois as atividades de ensino em ambiente de modelagem fazem emergir vários conceitos matemáticos e extra matemáticos favorecendo a aprendizagem.

A modelagem matemática, segundo Bassanezi (2022) deve seguir uma sequência de etapas como: Experimentação (etapa na qual ocorre a obtenção de dados); Abstração (procedimento que leva à formulação dos modelos matemáticos e na qual se estabelece a seleção das variáveis, a problematização, formulação de hipóteses e a simplificação); Resolução (está vinculada ao grau de complexidade empregado em sua formulação portanto pode ser uma resolução analítica ou numérica podendo ser viabilizada somente através de métodos computacionais); Validação (é o processo de aceitação ou não do modelo); Modificação (se o modelo não for aceito, os dados do problema devem ser revistos para os ajustes necessários e refazer as etapas até obter uma melhor aproximação da realidade).

O desenvolvimento da pesquisa teve como aporte teórico a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval (Duval, 1993, 2011). Esta teoria elucida a importância da utilização dos registros semióticos para a aprendizagem matemática exigidas pelas características dos objetos matemáticos que são abstratos e precisam ser representados.

As representações semióticas “são produções constituídas pelo uso de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas próprias restrições de significado e de funcionamento” (Duval, 1993, p. 39). A escrita em língua natural, escrita algébrica, gráficos, tabelas são exemplos de representação semiótica que exteriorizam a representação mental e são importantes para a atividade cognitiva do pensamento. Segundo Duval (2011), só há aprendizagem quando o aluno consegue articular, de maneira natural, entre os vários registros de representações referentes ao objeto matemático.

Método e Desenvolvimento Conceitual

As atividades exploratórias elaboradas e desenvolvidas para esta pesquisa, seguiram a sequência de etapas sugeridas por Bassanezi (2022) e foram compostas por diferentes estratégias como construção de gráficos, análise de modelos matemáticos previamente modelados para o estudo de vários conceitos matemáticos desde os pertencentes à matemática básica quanto aos referentes ao cálculo e EDO, com o auxílio do GeoGebra.

Considerando as atividades referentes ao estudo de EDO, foram utilizados primeiramente a construção do campo de direções de algumas EDO, seguidas pela análise do comportamento das soluções. Também foram realizadas previsões e examinadas as influências dos parâmetros das equações no comportamento das soluções, possibilitando a articulação entre os registros gráfico e algébrico.

Algumas atividades selecionadas incluíram problemas modelados previamente e abrangeram uma série de tópicos matemáticos, incluindo funções e suas características (como domínio, imagem, contradomínio, crescimento e decréscimo), além de tipos específicos de funções (afim, linear, polinomiais de primeiro e segundo grau, logarítmicas, exponenciais), e conceitos fundamentais do cálculo diferencial, tais como o problema de determinar a reta tangente em um ponto da representação gráfica de uma função, limites e a derivada interpretada como a inclinação dessa reta tangente, além de outras atividades investigativas para ressignificar o conhecimento em derivadas.

Foram introduzidos conceitos utilizados no estudo de EDO, com exemplos que modelam situações reais, como a segunda lei de Newton e modelo de crescimento populacional proposto por Malthus, explorando os elementos que compõem uma EDO, tais como coeficientes (ou parâmetros) e variáveis, além de discutir a formulação dos modelos matemáticos. O objetivo destas atividades foi analisar o comportamento das soluções da EDO.

Para explorar o entendimento dos alunos sobre uma EDO simples e a construção do campo de direções, foi dada a expressão $y'=1$. Os participantes compreenderam que deveriam encontrar uma função cuja derivada fosse constante e igual a um. Foram questionados se algum fenômeno real poderia ser modelado por essa EDO com a questão: *qual situação, ou problema possui uma variação constante?* não obtendo respostas.

Na elaboração dos campos de direções, foram propostas EDO com diferentes níveis de complexidade. Inseriam vários pontos em papéis quadriculados e após a construção do campo de

direções, questionaram qual função seria a solução para aquela EDO, sugerindo que poderia ser uma função afim. Perceberam que a solução geral do problema é representada algebricamente pela função $f(x)=x+c$, que a determinação do valor da constante c depende da escolha de valores para x e y , denominada condição inicial, caracterizando um Problema de Valor Inicial (PVI) e a solução obtida é denominada solução específica da EDO, pois atende às condições iniciais estabelecidas. A Figura 1 ilustra o campo de direções construído por um aluno em um papel quadriculado.

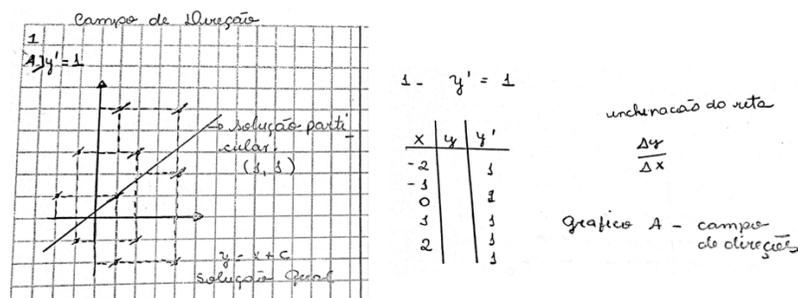


Figura 1. Campo de direções.

Observa-se que o aluno construiu corretamente o campo de direções e apresentou a solução geral. A solução particular que passa pelo ponto $(1,1)$ foi representada por meio do registro gráfico, porém a representação no registro algébrico não foi realizada. Nota-se que a representação gráfica da solução particular não está correta pois a origem deveria pertencer a esta solução.

Em outra atividade deveriam simular a construção de um tanque cilíndrico que captasse 1000 litros de água da chuva com dimensões que minimizassem o custo. Durante a socialização da solução, todos utilizaram o GeoGebra para melhor compreensão do resultado e um dos alunos, que trabalha na construção civil, disse que era impossível aquela solução e, a partir desta observação, discutiram para encontrar o problema da formulação e aperfeiçoaram o modelo.

Nesta atividade, os alunos foram envolvidos em aspectos cognitivos que caracterizam os registros de representação semiótica: a formação de uma representação identificável sobre a qual formularam o problema, o tratamento quando resolveram algebricamente no papel e a conversão, ao utilizaram o software para construir a representação gráfica do problema e confirmar se a solução obtida geometricamente era apropriada.

Após realizarem as atividades sobre derivação e integração, foi iniciado o tema específico sobre EDO, construindo o campo de direções no papel quadriculado e, depois, utilizando as ferramentas do GeoGebra foram comparadas as resoluções e perceberam as facilidades proporcionadas pelo software como ilustrado na Figura 2 e na Figura 3.

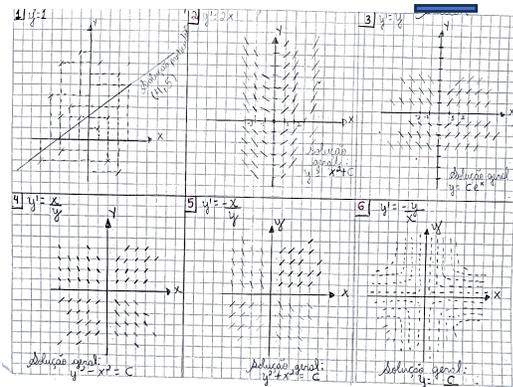


Figura 2. Construindo campo de direções.

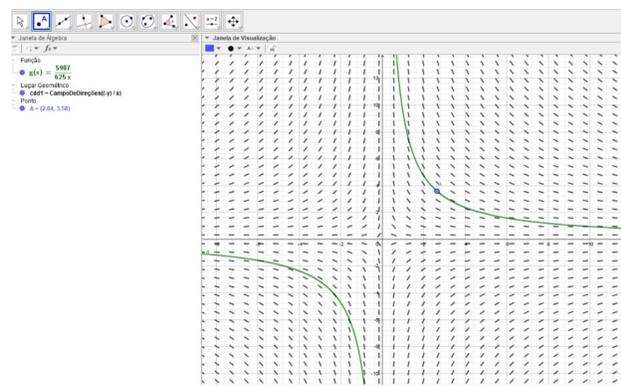


Figura 3. Construindo campo de direções no GeoGebra.

As primeiras atividades contextualizadas sobre EDO foram problemas clássicos, presentes em livros didáticos e que já possuíam todos os dados fornecidos no enunciado. As etapas da modelagem foram cumpridas pois os alunos reconheceram os dados, formularam o problema, o resolveram utilizando o campo de direções no GeoGebra e validaram o modelo.

Uma atividade envolvendo EDO abordou o problema de resfriamento de um corpo, também com os dados previamente fornecidos no enunciado. Nesse caso, os alunos formularam o problema e solucionaram-no por meio das representações analítica e gráfica, analisando o comportamento das soluções obtidas.

A atividade final consistiu em escolher um tema para que fosse proposto um problema e resolvê-lo. No contexto da realidade dos alunos, escolheram trabalhar com o tema do decaimento radioativo do Césio-37 recordando do acidente radioativo em Goiânia em 1987. Os dados do problema foram obtidos da internet, pesquisando sobre a meia-vida do Césio-37, como modelar um problema sobre decaimento radioativo e elaboraram os dados (Figura 4) com as informações obtidas construindo a representação gráfica no GeoGebra (Figura 5)

$$\begin{aligned}
 &t = 0 \quad Q(0) = 19,26 \\
 &Q(0) = k \\
 &t = 35 \\
 &Q(35) = 19,26e \\
 &Q(t) = 19,26e^{-0,0226t}
 \end{aligned}
 \left\{
 \begin{aligned}
 &-\frac{1}{0,0226} \int \frac{dQ}{Q} = \int dt \\
 &-\frac{1}{0,0226} \ln Q = t + C \\
 &\ln Q = (0,0226t - C) \\
 &Q = e^{(0,0226t - C)}
 \end{aligned}
 \right.$$

Figura 4. Modelo da Atividade Final em papel.

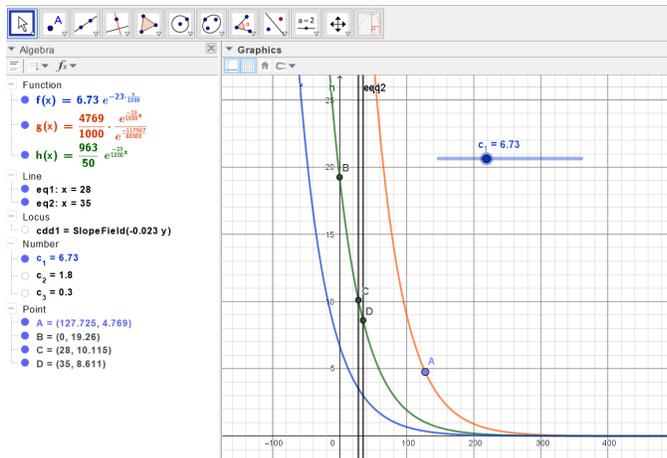


Figura 5. Modelo da Atividade Final.

Em grupo, formularam o problema e socializaram suas propostas. Resolveram analiticamente e graficamente e depois fizeram a validação, comparando seus resultados e decidiram o modelo que melhor representava o problema.

Resultados e Conclusões

O tema abordado neste texto é o ensino e a aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) para licenciandos em Matemática da Universidade Estadual de Goiás, utilizando o GeoGebra como recurso tecnológico. As EDO possibilitam a descrição matemática de diversos fenômenos, análise do comportamento de suas soluções e realização de previsões com boas aproximações, sendo fundamentais em várias áreas do conhecimento.

A abordagem qualitativa das EDO consiste no estudo do comportamento das soluções sem a necessidade de encontrar suas expressões analíticas. O objetivo principal é investigar as características gerais das soluções através de representações gráficas. Uma das técnicas utilizadas nessa abordagem é o campo de direções, que pode ser obtido manualmente ou com a praticidade de um software como o GeoGebra, o que facilita a visualização e a interpretação das soluções.

O aporte teórico que orientou o desenvolvimento da prática docente deste trabalho foi a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval. Esta teoria destaca a importância da utilização de registros semióticos para a aprendizagem matemática, considerando que os objetos matemáticos são, em sua maioria, abstratos e requerem diferentes formas de representação para serem compreendidos adequadamente.

Foram elaboradas atividades exploratórias que incorporaram oportunidades de experimentação e exploração que poderiam surgir ao longo da realização das atividades, por exemplo, uma delas, abordou o modelo de juros compostos continuamente, o qual considera que a taxa de variação do capital em relação ao tempo é proporcional ao capital inicial. Os alunos foram incentivados a identificar os elementos constitutivos da EDO e a interpretar a relação entre a função e sua derivada.

Durante as atividades, foi realizada uma análise qualitativa das soluções por meio do campo de direções, destacando a unicidade da solução do PVI. Os alunos utilizaram o comando “CampoDeDireções” no GeoGebra para construir campo de direções da EDO. Inicialmente, a visualização não mostrava claramente as curvas, o que exigiu ajustes na escala do gráfico. Com a alteração da escala, os alunos perceberam que o gráfico se assemelhava a funções exponenciais, levando à identificação de comportamentos de crescimento, decrescimento e constância.

As atividades exploratórias propostas proporcionaram um ambiente favorável para a utilização da modelagem matemática onde os alunos seguiram as suas etapas. Nos momentos de revisão de conteúdos ou nos momentos de ensino de EDO, ocorreram três atividades cognitivas: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão.

Sendo assim, por meio dos constructos teóricos mencionados, foi oferecido um ambiente propício ao ensino e à aprendizagem de EDO. Vale mencionar as dificuldades apresentadas pelos alunos que, em vários momentos, precisaram rever os conteúdos básicos de matemática, além do fato de alguns não dominarem o uso do computador.

Referências e bibliografia

- Alvarenga, K. B., Dorr, R. C., & Vieira, V. (2016). O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no Centro-Oeste brasileiro. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, v. 4, n. 2, pp. 46-57. <https://www.researchgate.net/publication/314648760>
- Alves-Mazzotti, A. J., & Gewandsznajder, F. (1998). *O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. São Paulo: Pioneira.
- Bassanezi, R. C. (2022). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 4. ed. São Paulo: Contexto.
- Dullius, M. M., Veit, E. A. & Araújo, I. S. (2013). Dificuldades dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v.26, n.2, 207-228.
- Duval, R. (2011), Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. 8. ed. Campinas: Papyrus, pp.11-33.
- Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, IREM-ULP*, 5, 37-65.
- Gravina, M. A., & Santarosa, L. A (1998). Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. *IV Congresso Ribie. Brasília*. <http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/a1.pdf>
- Marin, D. (2008). *Professores de Matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior*. [Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”]. Repositório Institucional UNESP. <http://hdl.handle.net/11449/91117>
- Rosa, C. de M., Alvarenga, K. B., & Santos, F. F. T. dos (2019). Desempenho Acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral: um Estudo de Caso. *Revista Internacional de Educação Superior*, 5, e019023. <https://doi.org/10.20396/riesup.v5i0.8653091>
- Santos Filho, J. C., & Gamboa, S. S. (2009). *Pesquisa Educacional: quantidade-qualidade*. 7º edição, São Paulo: Cortez.