



## GeoGebra e a Teoria das Situações Didáticas no Ensino de Números Figurais: Uma Proposta para o Ensino Médio

Arnaldo Dias **Ferreira**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Brasil

[adias.matematica@gmail.com](mailto:adias.matematica@gmail.com)

Antônio Marcos Justino **Matias**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Brasil

[marcosjust@gmail.com](mailto:marcosjust@gmail.com)

Renata Sorah de Sousa e **Silva**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Brasil

[renata.renatafalcao@gmail.com](mailto:renata.renatafalcao@gmail.com)

Maria José Costa dos **Santos**

Universidade Federal do Ceará - UFC

Brasil

[mazeautomatic@gmail.com](mailto:mazeautomatic@gmail.com)

Francisco Regis Vieira **Alves**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Brasil

[fregis@ifce.edu.br](mailto:fregis@ifce.edu.br)

Solonildo Almeida da **Silva**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Brasil

[solonildo@ifce.edu.br](mailto:solonildo@ifce.edu.br)

### Resumo

Este estudo propõe uma abordagem para o ensino de Números Figurais (NF) 2D e 3D no Ensino Médio, combinando a Teoria das Situações Didáticas (TSD) com o uso do *software* GeoGebra. O objetivo é apresentar o ensino-aprendizagem de NF 2D e 3D no Ensino Médio por meio da TSD e do *software* GeoGebra com a finalidade de

superação do ensino baseado em memorização de fórmulas, promovendo o desenvolvimento do pensamento crítico e a autonomia de professores e alunos. A metodologia utilizada é a Engenharia Didática (ED), com foco nas fases de Análises Preliminares e Concepção e Análise *a Priori*. A pesquisa explora a construção histórica dos NF, suas aplicações no Ensino Médio, funções geradoras e relações de recorrência. O GeoGebra é utilizado para visualizar a recorrência dos NF em 2D e 3D, facilitando a compreensão. Espera-se que esta proposta contribua para superar os desafios no ensino de NF, promovendo uma melhor aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento crítico. Em pesquisas futuras, pretende-se aplicar esta proposta em sala de aula para verificar sua eficácia.

*Palavras-chave:* Números Figurais; Aprendizagem Matemática; Teoria das Situações Didáticas; *Software* GeoGebra; Pensamento crítico.

### Introdução

O ensino de Matemática no Ensino Médio frequentemente se depara com o desafio de aprofundar conteúdos historicamente complexos, como o estudo dos Números Figurais (NF), cujas representações podem se dar a partir dos vértices de uma figura geométrica. Embora reconhecidos por sua relevância histórica e potencial para enriquecer as práticas docentes, os NF ainda são pouco explorados nesse nível de ensino, conforme apontam Alves, Borges Neto e Maia (2012). Essa lacuna se estende à formação inicial dos professores, que muitas vezes reproduzem em sua prática docente as experiências vivenciadas enquanto estudantes, limitando o repertório de abordagens e metodologias para o ensino dos NF

Diante dessa problemática, esta pesquisa se propõe a analisar como os desafios enfrentados por professores no ensino de NF 2D e 3D podem ser superados por meio da Teoria das Situações Didáticas (TSD) com o suporte tecnológico do GeoGebra. A escolha por essa temática se justifica pela necessidade de se promover uma aprendizagem mais significativa da Matemática, que ultrapasse a memorização e reprodução de fórmulas e que permita aos alunos desenvolverem competências essenciais para o século XXI, como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade. Nessa perspectiva, surge o seguinte questionamento: como a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o uso do GeoGebra podem contribuir para superar os desafios do ensino dos Números Figurais no Ensino Médio, promovendo um ensino-aprendizagem significativo?

A pesquisa objetiva apresentar o ensino-aprendizagem de NF 2D e 3D no Ensino Médio por meio da TSD e do *software* GeoGebra com a finalidade da superação do ensino baseado em memorização de fórmulas, promovendo o desenvolvimento do pensamento crítico e a autonomia de professores e alunos. Baseia-se principalmente na Teoria das Situações Didáticas (TSD) para propor uma abordagem pedagógica que estimule o pensamento crítico e a autonomia dos alunos. Adotou-se a Engenharia Didática (ED) como metodologia desta pesquisa, que possui em seu escopo quatro fases, porém devido ao caráter puramente teórico deste trabalho, apresentaremos apenas duas dessas fases, a saber: Análises preliminares, a Concepção e Análise *a Priori*.

Aborda-se, nas análises preliminares os NF 2D e 3D, com foco em sua vivência no Ensino Médio, a construção histórica desses números, desde a Grécia Antiga até as contribuições contemporâneas, com ênfase nas funções geradoras e nas relações de recorrência. Utilizar-se-á o *software* GeoGebra para visualizar os NF e tornar o aprendizado mais significativo, como a seguir nas fases 1 e 2.

### Fase 1: Análises preliminares

Os NF são estudados desde os tempos mais remotos da Grécia e embasados principalmente nos estudos de Popper (1972), Alves (2012). Popper faz um resgate histórico-epistemológico e filosófico em que os denominados pitagóricos davam aos estudos dos números que podiam ser representados por formas geométricas, originando assim o conceito referente a esses números. Essa constatação é possível ao observar manuscritos medievais encontrados documentando registros de representação geométrica de números. Embora os gregos não dispusessem de recursos tecnológicos que permitissem registrar os NF numa perspectiva 3D, nos estudos de Alves (2012) baseado em autores como Koshy (2007), Estrada *et al.* (2000), Popper (1972), Alves, Borges Neto e Maia (2012) dentre outros conceituam os Números Sólidos (NS) ou cúbicos, partindo dos NF 2D para os NF 3D.

Atualmente, no contexto do ensino mediado por tecnologia, contam-se com recursos como o *software* GeoGebra que permite uma visualização detalhada dessas representações, embora muitos professores ainda não se utilizem desse recurso devido à falta de conhecimento, já que o seu estudo não faz parte de muitos currículos na formação inicial desses profissionais. Como é possível verificar a seguir na Figuras 1, sobre os Números Triangulares (NT) numa perspectiva geométrica 2D.

Na figura 1, percebe-se a possibilidade de visualização proporcionada pela utilização do *software* nas perspectivas 2D e 3D dos NF, permitindo ao estudante observar e manipular a figura em busca do próximo número da sequência. Observa-se também o 7º número da sequência, e o aluno poderá movimentar o controle deslizante e interagir com o *software* em busca de outros números. Nesse caso para  $n=7$ , temos que  $T_7 = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ , onde  $n$ : índice do número triangular e  $T_n$ : número triangular. Ao movimentar o controle deslizante, alterando o valor de  $n$ , o estudante poderá interagir com os próximos números da sequência e inferir o termo geral que se dá por:  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

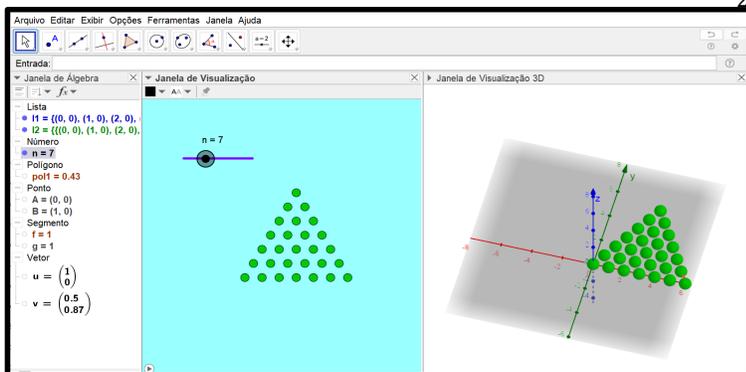


Figura 1: Representação do NF no GeoGebra

Essa mesma abordagem poderá ser estendida para outros NF, como os Números Quadrados (NQ), os Números Pentagonais (NP) e assim por diante, conforme definição apresentada por autores como Nobre e Rocha (2018) por exemplo. Os Números Figurais “podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes” Nobre e Rocha (2018, p. 35). Ao considerar essa definição, pode-se inferir que essa representação gera a ideia de um polígono regular e pode ser nomeado como Números Poligonais. Assim, destacam-se os estudos de números como os triangulares, os quadrados, os pentagonais e os hexagonais que focam apenas nos números 2D, abordando o estudo pelo viés das sequências de ordem superior.

Há outras abordagens sobre os NF que ocorrem em torno das funções geradoras de sequências e as recorrências. Os autores Barro e Alves (2020) vão além e apresentam as funções geradoras e as recorrências para outros números poligonais bem como os números tetraédricos e hipertetraédricos na perspectiva 3D. Tais abordagens evidenciam a importância desse tema, no entanto a grande maioria dos estudos desses componentes são direcionados para o nível de Ensino Superior, o que é motivo para se escolher a temática voltada para o Ensino Médio.

Os autores partiram do princípio de que uma função geradora de uma sequência infinita de inteiros deve ser definida da seguinte forma: seja  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$  e  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ , com  $m < n$ , daí se fizermos o quociente  $f(x)/g(x)$  resultaria numa função  $t(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + \dots + c_nx^n + \dots$ , estabelecendo assim a função  $t(x)$  como a geradora da sequência  $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_m, \dots, c_n, \dots)$ , Barros e Alves (2020, p. 50), ou seja,  $f(x) = g(x) \cdot t(x)$ , possibilitando assim determinarmos o valor para cada  $a_i \in f$  e  $i \geq n$ .

As funções geradoras, como evidenciado por Barros e Alves (2020), revelam-se como uma ferramenta poderosa para o estudo dos NF, permitindo a obtenção de fórmulas para os termos de diversas sequências e o estabelecimento de relação entre diferentes tipos de números. Ao explorar essa perspectiva, esse trabalho busca oferecer aos professores do Ensino Médio uma nova ferramenta para o ensino dos NF e com a utilização da ferramenta GeoGebra é possível representar graficamente as funções geradoras, a ser tratado *a posteriori* em outro trabalho, permitindo a visualização gráfica da relação entre os coeficientes da função e os termos da sequência.

## Fase 2: Análise à Priori

Nesta seção, abordar-se-á a TSD baseada em Brousseau (1986), que divide o processo de ensino e aprendizagem em quatro fases: 1) **Ação** - nessa etapa, o aluno é um ator ativo, experimentando e interagindo com o objeto de conhecimento, buscando soluções por tentativa e erro. 2) **Formulação** - a partir de suas ações, o aluno começa a formular hipóteses e conjecturas sobre o problema. Ele verbaliza suas ideias, utilizando a linguagem matemática para expressar seu pensamento. 3) **Validação** - nesta fase, o aluno e seus colegas discutem as diferentes soluções propostas, buscando justificar suas respostas e convencer os outros da validade de suas ideias e 4) **Institucionalização** - o professor intervém para sistematizar os conhecimentos construídos pelos alunos, explicitando os conceitos matemáticos envolvidos e relacionando-os com os saberes escolares. Ele também pode propor novas situações para consolidar a aprendizagem.

Ao referenciar Barros e Alves (2020), abordar-se-á a demonstração da fórmula para encontrar o próximo Número Triangular (NT) a partir do anterior. Eles concluem que:  $x \cdot h(x) = x \frac{f(x)}{g(x)} = x(1-x)^3 = 1x + 3x^2 + 6x^3 + \dots + S_n(n)x^n$  é a função geradora para os números triangulares 2D.

Essa etapa marca a fase de ação da TSD, que segundo Almouloud (2007) está centralizada na tomada de decisões, ou seja, diante do problema os sujeitos procuram a compreensão na tentativa de chegar a solução. Analogamente, os autores definem a função geradora dos Números Quadrados (1, 4, 9, 16, 25, 36...) que indicaremos como a função  $q(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{N}$ , fazendo a relação de recorrência homogênea teremos:

$$q(1) = 1$$

$$q(2) = 4 = 1 + 3 = q(1) + 2q(1) + 1$$

$$q(3) = 9 = 4 + 5 = q(2) + 2q(2) + 1$$

.....

$$q(n+1) = q(n) + 2n + 1 \Rightarrow [ I ] \text{ assim, podemos inferir que:}$$

$q(n+2) = q(n+1) + 2(n+1) + 1 \Rightarrow [ II ]$ , fazendo  $[ II ] - [ I ]$  temos:  $q(n+2) - q(n+1) = q(n+1) - q(n) + 2 \Rightarrow q(n+2) = 2q(n+1) - q(n) + 2$ , analogamente, para  $q(n+3)$ , podemos realizar a diferença  $q(n+3) - q(n+2)$  e concluímos que  $q(n+3) = 3q(n+2) - 3q(n+1) + q(n)$ , logo ao continuarmos notaremos que  $q(n+3) - 3q(n+2) + 3q(n+1) - q(n) = 0$ , Barros e Alves (2020). Para ilustrarmos a visualização do Número Quadrado (NQ) 2D de valor  $n = 4$  no GeoGebra, mostraremos a Figura 2.

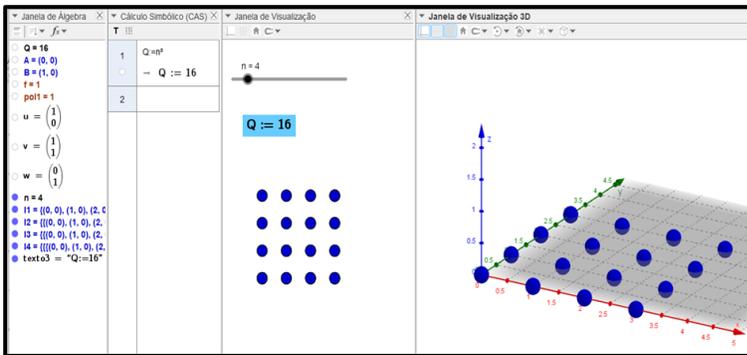


Figura 2. Visualização do NQ 16 em 2D.

A recorrência de ordem 3 que produz a função geradora dos NQ é originada da mesma fórmula canônica já discutida acima  $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x)$ , onde os valores  $g_i(x)$  não se alteram em relação aos NT, mudando apenas os valores iniciais  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 9$ ,  $c_3 = 16$  e assim por diante, levando ao entendimento de que a função será definida por  $x \frac{(1+x)}{(1-x)^3} = 1x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \dots + q(n)x^n$ , tal que  $x < 1$  Barros e Alves (2020). Nessa fase, os sujeitos buscam realizar a formulação, que marca uma intensa troca de saberes prévios entre si, diálogos que visam à formulação das propostas de soluções.

A terceira fase da TSD marca a validação, onde os sujeitos apresentam as soluções cuja verificação e organização do conhecimento produzido por eles se consolida. A utilização do GeoGebra nessa fase torna-se essencial, já que o uso do *software* permite a visualização dos NF no formato 3D. Na perspectiva dos NF 3D, pode-se observar a definição dada em Barros e Alves (2020) para os Números Tetraédricos também denominados de Números Piramidais que em síntese tratam da soma de Números Triangulares e, segundo os autores, “são formados a partir do empilhamento dos  $n$  primeiros números triangulares ou seja, o terceiro número tetraédrico é a soma dos três primeiros números triangulares” Barros e Alves (2020, p. 59). A fim de ilustrar essa definição, segue a Figura 3 com a visualização do quarto Número Piramidal no GeoGebra.

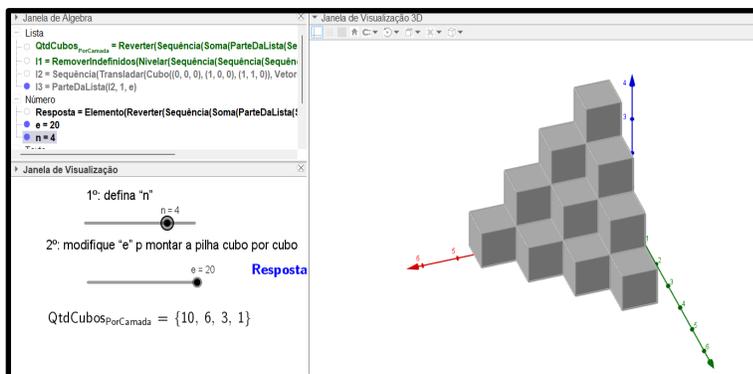


Figura 3. Visualização do Número Piramidal 20 em 3D

Na figura acima, pode-se destacar que o quarto número em questão é a soma da quantidade de cubos da Janela de Visualização 3D do GeoGebra em que a quarta camada tem 10 cubos, a terceira tem 6, a segunda tem 3 e a primeira tem 1, tal que o Número Piramidal é dado por  $10 + 6 + 3 + 1 = 20$ . Essa fase marca a institucionalização, onde o professor assumindo o controle da situação formalizando o saber construído com os alunos, ou seja, para  $n$  variando de 1 até 4 teremos que:  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 3$ ,  $T_3 = 6$  e  $T_4 = 10$ , dessa forma o número piramidal será a soma de  $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ .

Em relação ao objeto de estudo, essa proposta apresenta a definição e a demonstração da fórmula para encontrar o próximo Número Triangular (NT) a partir do anterior, utilizando a função geradora. Em seguida, o mesmo processo é aplicado aos Números Quadrados (NQ), demonstrando a recorrência da ordem 3 para a função geradora. Essa proposta também destaca a importância do GeoGebra na fase de validação da TSD, pois o *software* permite a visualização dos NF em 3D. É apresentado um exemplo de visualização do quarto Número Piramidal (20) no GeoGebra, mostrando como ele é formado pela soma dos cubos das camadas.

Nesse caso, foi apresentado o ensino-aprendizagem de Números Figurais com o GeoGebra, destacando o potencial do *software* para a visualização e interação com sequências numéricas em 2D e 3D. A ferramenta facilita a compreensão de conceitos complexos, como os Números Piramidais, e auxilia na validação da Teoria das Situações Didáticas (TSD), que divide o processo de ensino e aprendizagem em quatro fases: ação, formulação, validação e institucionalização. O professor atua como mediador, incentivando a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento, enquanto o GeoGebra proporciona um ambiente de

aprendizagem dinâmico e propício à investigação e formulação de hipóteses. No entanto, ressalta-se a necessidade de investir na formação de professores para que possam explorar o potencial do GeoGebra no ensino de matemática. A seguir temos as considerações finais.

### Conclusões

Esta comunicação científica apresenta uma proposta didática para o professor do Ensino Médio trabalhar os Números Figurais (NF) em sua sala, por meio da Teoria das Situações Didáticas (TSD) com o aporte tecnológico do GeoGebra.

A abordagem utilizada trouxe uma nova perspectiva de ensinar os NF a partir do *software* GeoGebra por meio da interação do aprendente com os controles deslizantes, visualizando o fenômeno da recorrência desses números na perspectiva 2D e 3D.

Diante do exposto, conclui-se que o objetivo foi alcançado pois a proposta pedagógica envolve o aluno no processo ensino-aprendizagem, incentivando a experimentação, a formulação de hipóteses e a validação de soluções. A utilização do GeoGebra como ferramenta de apoio permite a visualização dos NF em 3D, facilitando a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Portanto, essa abordagem pedagógica de ensino de NF combinado com a TSD e utilização do GeoGebra possibilita maior compreensão sobre o assunto e corrobora para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Espera-se que os resultados contribuam para a superação dos desafios no processo de ensino-aprendizagem de Números Figurais, promovendo uma aprendizagem mais significativa e o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos.

### Referências e bibliografia

- Almouloud, S. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- Alves, F. R. V. História da Matemática: os Números Figurais em 2D e 3D. *Conexões - Ciência e Tecnologia*, [S. l.], v. 6, n. 2, 2012. DOI: 10.21439/conexoes.v6i2.477. Disponível em: <https://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/477>. Acesso em: 9 ago. 2024.
- Alves, F. R. V. Situação Didática Olímpica (SDO): aplicações da teoria das situações didáticas para o ensino de olimpíadas. *Revista Contexto & Educação*, v. 36, n. 113, p. 116–142, 2021.
- Alves, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (SDOs): ensino de olimpíadas de matemática com arrimo no software GeoGebra como recurso na visualização. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 13, n. 1, p. 319-349, 2020.
- Alves, F. R. V. Transição interna do cálculo: uma discussão do uso do geogebra no contexto do cálculo a várias variáveis. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, v. 1, n. 2, p. 5-19, 2012.
- Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. Uma proposta de investigação histórico-epistemológica sobre sequências recorrentes de 2ª ordem. *Paradigma*, n. 2, p. 404-426, 2020.
- Alves, F. R. V.; Dias, M. A.; Lima, M.V. , M. de. Sobre o Ensino de Integrais Generalizadas (IG): um Contributo da Engenharia Didática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, [S. l.], v. 11, n. 2, p. 130–144, 2018. DOI: 10.17921/2176-5634.2018v11n2p130-144. Disponível em: <https://jiecem.pgsscogna.com.br/jiecem/article/view/4999>. Acesso em: 9 ago. 2024.

- Artigue, M. Ingeniería Didáctica. In: Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, Gomez, P. *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, cap. 4, p. 33-59.
- Barros, F. E; Alves, F. R. V. Funções geradoras dos números poligonais e dos números hipertetraédricos k-dimensionais. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2020.
- Brousseau, G. Théorie des situations didactiques (pp. 115-160). Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.
- Lima, M. L. O. Situações didáticas olímpicas para o ensino de sequências numéricas: um contributo da engenharia didática. 2019. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.
- Nobre, J. F. F.; Rocha, R. A. Progressões aritméticas de ordem superior. *Professor de Matemática Online*, v. 1, n. 5, 2018.
- Santos, M. J. C; Bezerra, A. L. Contributions of Figures Numbers in the Development of Geometric Thought. Disponível em: [ResearchGate](#). Acesso em: 12 de agosto de 2024.