STEAM integrado desde una perspectiva de la didáctica de las matemáticas[1]

Fernando **Hitt**,
Université du Québec à Montréal (UQAM), y Universidad de La Laguna
Canadá, 10-3080 Rue Linton, Montréal, Qc, H3S 1S3,
Email: ferhitt@yahoo.com

Resumen

En este documento, analizamos el marco conceptual para el STEM integrado propuesto por Kelley & Knowles (2016), así como la relevancia de la modelización matemática según Maaß et al. (2016). Nuestra propuesta se basa en un enfoque conceptual del STEAM integrado, que incorpora las artes en consonancia con la UNESCO (2017). Este acercamiento está fundamentado en la didáctica de las matemáticas y la sostenibilidad. Además, presentamos los resultados de un estudio sobre la formación de profesores de matemáticas, con un énfasis en los procesos de modelización dentro de nuestra propuesta de enseñanza del STEAM integrado y la sostenibilidad.

Palabras clave: STEAM integrado; Matematización horizontal y vertical; Habilidades matemáticas; Competencias; Sostenibilidad; Artes; Situaciones de Investigación; Método de enseñanza ACODESA.

I. Introducción

A finales del siglo pasado, emergió un paradigma ligado a la integración de las ciencias, el proyecto STEM (Science, Technology, Engineering & Mathematics). En este siglo, ha quedado confirmada la complejidad de esa tarea, poniendo en evidencia factores ligados a los docentes como a las instituciones, que impiden un desarrollo correcto del programa STEM, tales como: carencia de parte de los docentes de conceptos fundamentales que unifican las disciplinas, falta de

[1] El autor agradece la financiación suministrada por el proyecto de investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

estrategias pedagógicas adaptadas a la enseñanza STEM, resistencia al cambio de prácticas habituales, falta de actividades ad hoc para ser utilizadas en el aula, falta de materiales dado el poco apoyo institucional (p. ex., Kelley & Knowles, 2016; Chalmers et al., 2017). Esta problemática ha dado lugar a otra sobre cómo implementar la integración del programa STEM. Para centrar nuestro acercamiento a la problemática, mencionemos tres proposiciones:

1. Proposición centrada en una enseñanza que combina conceptos de las diferentes ramas científicas en la resolución de problemas del mundo real. Promoción del aprendizaje en el aula (vista como comunidad de práctica) basado en proyectos que involucren conocimientos interdisciplinarios en contexto (Kelley & Knowles, 2016).
2. Promover grandes ideas transversales que involucren conceptos de diferentes disciplinas STEM, poniendo énfasis en conceptos fundamentales en una disciplina que sea relevante en las otras (Chalmers et al., 2017).
3. Desarrollo de competencias ligadas a un pensamiento crítico, resolución de problemas y situaciones del mundo real, y desarrollo de habilidades en la modelización matemática. Utilizar las matemáticas para comprender problemas sociales y científicos para una formación ciudadana informada y responsable (Maaß & Reitz-Koncebovski, 2013).

Dado que la 3a proposición emana de la didáctica de las matemáticas, nuestra propuesta se centra fundamentalmente en la 1a y la 3a. Iniciamos nuestra discusión abordando el proyecto europeo PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education), que promovía la integración de las didácticas de distintas ramas científicas bajo el enfoque de un aprendizaje basado en la indagación (Inquiry-Based Learning, IBL) (Maaß & Reitz-Koncebovski, 2013). El objetivo de este proyecto era fomentar un aprendizaje centrado en la exploración activa, en el que los estudiantes participaran en la formulación de preguntas, la investigación y la construcción del conocimiento, en lugar de limitarse a la memorización o a la resolución mecánica de problemas. En este contexto, la modelización matemática adquiere un papel fundamental como herramienta para alcanzar estos objetivos. Con el tiempo, este enfoque fue evolucionando hacia una propuesta al STEM integrado (Maaß et al., 2016).

Maaß et al. (2016), proponen su ejecución bajo la perspectiva de las matemáticas, bajo tres acercamientos interdisciplinarios: *(1) habilidades del siglo XXI; (2) modelización matemática y (3) educación para una ciudadanía responsable*. Estos autores señalan la importancia del reporte sobre Evaluación y Enseñanza de Habilidades del Siglo XXI (ATC21S 2009), el cual se basa en cuatro grandes categorías: *1. Formas de pensar: Creatividad, pensamiento crítico, resolución de problemas, toma de decisiones y aprendizaje; 2. Formas de trabajar: comunicación y colaboración; 3. Herramientas para trabajar: tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y alfabetización informacional; 4. Habilidades para vivir en el mundo: ciudadanía, vida y carrera y responsabilidad personal y social.*

La nueva propuesta resulta más interesante y compleja, ya que la literatura sugiere que las matemáticas suelen quedar opacadas por otras disciplinas científicas dentro del marco general del STEM (English, 2015, 2016; Hitt et al., 2022). A partir de esta perspectiva, surge una pregunta fundamental: ¿Cómo llevar esta propuesta a la práctica en el aula?

II. Marco conceptual y preguntas de investigación

Para implementar en el aula un STEAM integrado como señalado por Kelley & Knowles (2016) y Maaß et al. (2016), y considerando una comunidad de práctica y procesos de modelización, nos interesa apoyarnos en las nociones de la matematización horizontal y vertical de Freudenthal (1991); que consiste en el desarrollo de habilidades y conceptos tales como: Identificación de patrones y relaciones en contextos reales; procesos de conversión del contexto a un acercamiento matemático; uso de representaciones; formulación de preguntas dentro del contexto matemático y estimaciones y aproximaciones. Con respecto a la matematización vertical, él propone: la generalización y abstracción; la reformulación de problemas en términos avanzados; uso de propiedades avanzadas, conexión entre diferentes conceptos matemáticos, justificación y demostración.

Concerniente a los procesos de la matematización horizontal de los alumnos, estamos interesados en incluir procesos de visualización e intuición (Zimmermann & Cunningham, 1991; Fischbein, 1987). Ello, dada la emergencia natural de representaciones no necesariamente institucionalizadas, relacionadas con la creatividad, la anticipación, la predicción, y validación empírica (ver Figura 1). Con respecto a la matematización vertical, nos interesa vincularla al pensamiento crítico, sensibilidad a la contradicción, la validación y la prueba, y la posibilidad de ir más lejos en la investigación. Puesto que, la noción de modelo matemático en el aprendizaje STEAM, tiene que ver con ciencias sociales y artes, por lo tanto, el modelo debe construirse ligado al fenómeno en estudio, proporcionando una respuesta ética, artística y social. Dicha propuesta, nos interesa ponerla en práctica bajo una perspectiva sociocultural del aprendizaje.

De acuerdo a la UNESCO (2017) sobre la sostenibilidad, sería importante considerar el desarrollo de competencias como las señaladas por Brundiers, et al., (2021) y Wiek, et al., (2011) que son: Pensamiento sistémico y relacional, Anticipación (capacidad de prever escenarios futuros y consecuencias); Pensamiento normativo y ético; Estrategia; Trabajo en equipo e interdisciplinariedad; Autoconciencia. Estas competencias, nos llevó a plantearnos cómo a partir de habilidades ligadas a la matematización horizontal y vertical podríamos dichas competencias.

La complejidad de desarrollar habilidades que soporten las competencias arriba citadas, como comunidad de práctica, es otro problema que se debe enfrentar con herramientas *ad hoc*. En nuestro caso, precisamente considerando las ideas de Freudenthal (1991) sobre el descubrimiento guiado e impulsando en los estudiantes procesos de matematización en contexto, proponemos un método de enseñanza: **A**prendizaje en Colaboración, Debate científico, Autorreflexión e institucionalización (Hitt, 2007; Hitt & Quiroz, 2019).

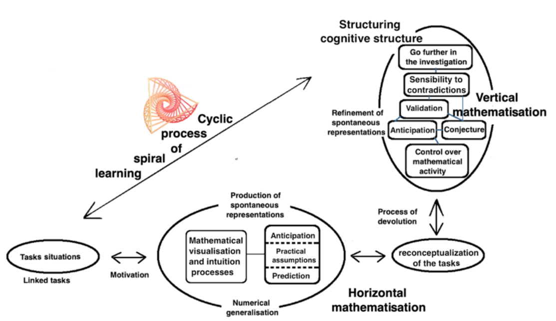

Figura 1. Matematización horizontal y vertical y proceso cíclico de un aprendizaje en espiral

Este método, fundamentado en el descubrimiento guiado (Freudenthal, 1991) y el aprendizaje en espiral (Mason, 1996), ha demostrado en experimentaciones previas su eficacia en el desarrollo de habilidades que sirven como base sólida para el fortalecimiento de competencias (ver Figura 1). En la siguiente sección, presentaremos en detalle el método ACODESA, enmarcado dentro de un enfoque sociocultural del aprendizaje.

Nuestra hipótesis de investigación plantea que, a través de una instrucción basada en el descubrimiento guiado, dentro de un enfoque sociocultural del aprendizaje, la modelización matemática funciona como un catalizador en el desarrollo de habilidades, tanto desde la perspectiva de la matematización horizontal como de la vertical, fortaleciendo así las competencias vinculadas a la sostenibilidad.

III. Método y desarrollo conceptual

Nuestra propuesta sigue características del STEAM integrado promoviendo el desarrollo de habilidades en el aula proporcionando un soporte a las competencias bajo una perspectiva de la sostenibilidad. Proponemos un método de enseñanza específico, ACODESA en cual se proponen cinco etapas bien definidas (Hitt, 2007; Hitt & Quiroz, 2019) para desarrollar en el aula: 1. Trabajo individual; 2. Trabajo en equipo; 3. Debate en gran grupo; 4. Autorreflexión (retorno al trabajo individual); 5. Institucionalización. El método ha funcionado en diferentes medios educativos en diferentes países (Cortés et al., 2016; Demir & Zengin, 2024; Hitt, 2007; Hitt & Dufour, 2021; Hitt & González-Martín, 2015; Hitt & Quiroz, 2019; Hitt et al., 2017; Hitt et al., 2023; Zengin, 2018) y recientemente bajo un acercamiento de STEAM integrado, bajo una perspectiva de la sostenibilidad (Camacho-Machín et al., 2024).

En el presente estudio, la muestra es de 19 estudiantes de un máster interesados en enseñar matemáticas a nivel secundaria y bachillerato en España. Los estudiantes han finalizado una licenciatura en matemáticas que incluye un solo curso de didáctica de las matemáticas. La experimentación se realizó en 28 horas durante un curso de didáctica de las matemáticas en el máster. Se dividió el grupo en 4 equipos de 4 personas y uno de 3.

Antes de cada actividad, el profesor introducía un contenido. Tomemos por ejemplo la 4ª actividad ligada a las artes. Se discutió el rectángulo y espiral áurea, reconstrucción de templos griegos y uso de *GeoGebra*. Bajo esta perspectiva, se analizó la obra de Botticelli “El nacimiento de venus” y el “Triángulo negro” de Kandinsky. También se presentó un proyecto comunitario sobre la preparación y ejecución de un mural en la ciudad de Montreal. Inmediatamente después se solicita a los alumnos el análisis de una obra desde un punto de vista matemático y uso de *GeoGebra*.

Cada actividad fue elaborada con preguntas eslabonadas para encausar un descubrimiento guiado (Freudenthal, 1991), promoviendo primeramente un proceso de matematización horizontal (visualización e intuición para inducir una anticipación, una predicción, una conjetura, y una validación empírica) y posteriormente bajo una matematización vertical (sensibilidad a la contradicción, prueba, planteamiento de problemas o ir más lejos en la investigación). En resumen, las cinco actividades son:

1. Tres euros que se tocan dos a dos. Calcular el área entre las tres monedas y proponer una actividad más compleja. Se solicita el uso de *GeoGebra*.
2. Encontrar los valores de x tal que $(\boldsymbol{x^2 - 5x + 5})^{\boldsymbol{x^2-9x+20}} = \boldsymbol{1}$ (NCTM, 1988) y proponer una actividad más compleja para generar soluciones enteras de una ecuación similar.
3. El Oro azul. Problema de la humanidad sobre el agua potable. Una vez respondida una pregunta, se solicitó la posibilidad de proponer otra pregunta importante dentro del contexto de la sostenibilidad (adaptación del enunciado de Boucher et al., 2007, p. 77).
4. Analizar la pintura de *Theo van Doesburg intitulada "Composición aritmética"* desde una perspectiva matemática. Se solicitó una reproducción *robusta* (elementos integrados en una sola figura) utilizando *GeoGebra*.
5. Elaboración de un video y su análisis utilizando las herramientas tecnológicas de *Tracker* y *GeoGebra*. La elección del fenómeno de la vida real era libre.

IV. Resultados / conclusiones

Como ha sido señalado al final de la sección II y en la III, nos interesa analizar, primeramente, los procesos de matematización horizontal desarrollada por los estudiantes de la muestra, sobre los procesos de visualización e intuición que son el motor para la anticipación, predicción, conjetura y validación empírica; en seguida, los procesos de matematización vertical. Dado que seguimos el método de enseñanza ACODESA, la cantidad de datos es muy grande, producción individual, producción en equipo, producción en gran grupo, autorreflexión (regreso al trabajo individual), e institucionalización. En este documento, nos restringiremos a presentar un análisis descriptivo.

Con respecto a la 1ª actividad, todos los equipos visualizaron un triángulo equilátero utilizando los centros de las monedas como vértices. Calcularon correctamente el área y realizaron un archivo *GeoGebra*. La producción difirió en la pregunta de generalización en donde se solicitaba un problema más complejo (planteamiento de problemas y/o ir más lejos en la investigación). Los equipos 1 y 2 propusieron 4 euros tangentes dos a dos de manera a obtener un cuadrado (siendo *un ejercicio* una vez resuelto el problema con 3 monedas). El equipo 3 propuso 10 monedas en forma piramidal y cálculo del volumen entre las 10 monedas (*ejercicio más elaborado*). El equipo 4 propuso 4 monedas diferentes; el enunciado propone un *problema más complejo*. El equipo 5, propuso el ir añadiendo euros tangentes e ir calculando el área para n-euros, *enunciado de un problema complejo* (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, etc.) Todos los equipos solamente propusieron el nuevo enunciado sin resolverlo ya sea *ejercicio* y/o *problema*.

Respecto a la resolución de la ecuación $(\boldsymbol{x^2 - 5x + 5})^{\boldsymbol{x^2-9x+20}} = \boldsymbol{1}$, utilizando *GeoGebra*, visualmente solo se pueden observar tres soluciones {1, 4, 5} y no las soluciones aisladas {2, 3}. Nos interesaba conocer el acercamiento visual y su resolución algebraica ligadas a la sensibilidad a la contradicción. Los equipos 1, 2 y 4, encontraron las raíces {1, 4, 5}, resolviendo algebraicamente $(\boldsymbol{x^2 - 5x + 5}) = \boldsymbol{1}$ y $\boldsymbol{x^2 - 9x + 20 = 0}$, cuando $(\boldsymbol{x^2 - 5x + 5}) \neq \boldsymbol{1}$ y su representación gráfica. El equipo 3, resolvió gráficamente considerando los polinomios cuadráticos; visualmente mostraron las intersecciones de los polinomios, cometiendo un error al proponer las soluciones {4, 4.5, 5}, no se percataron su contradicción con su proceso algebraico. El equipo 5, obtuvo {1, 2, 3, 4, 5}, mencionando que *GeoGebra* no muestra las soluciones {2, 3}.

La respuesta a la pregunta sobre la generalización de la 2ª actividad, el equipo 1 y 2 propusieron considerar $f(x)^{g(x)} = 1$ y visualizar las soluciones a $f(x) - 1 = 0$ y $g(x) = 0$ (no propusieron $f(x) = -1$ y $g(x) = número\ par$). El equipo 3, menciona que partiendo de $p(x)^{q(x)} = 1$, donde p y q son polinomios de cualquier grado, se deben presentar los polinomios siguiendo la estrategia de factorizar con respecto a las raíces; este equipo tiene ideas para ir más lejos en su investigación, sin embargo, recordemos que ellos propusieron las soluciones $\{4, 4.5, 5\}$, sin percatarse de la contradicción; además, no consideraron $f(x) = -1$ y $g(x) = número\ par$. El equipo 4 presentó la generalización siguiente: "$p(x)^{q(x)} = 1 \Leftrightarrow p(x) = 1 \vee q(x) = 0$; mencionan que para garantizar las soluciones enteras bastaría que $q(x)$ se anule sólo en valores enteros, es decir, que sea de la forma $q(x) = a(x-b)(x-c),\ b, c\ \in \mathbb{Z}$, y que $p(x)$ pase por unos puntos de la forma $(a, 1), (b, 1), a, b \in \mathbb{Z}$". Hay errores en su formulación; además no consideran el caso $f(x) = -1$ y $g(x) = número\ par$. Sólo el equipo 5 propuso los polinomios factorizados y dividir la búsqueda en tres condiciones.

La situación del "Oro azul" (agua potable) era más compleja en el sentido de que no es explícito el modelo algebraico a utilizar. Por ejemplo, una situación de emergencia para la humanidad con un modelo lineal se obtiene con una población de 11.4 miles de millones de habitantes, o de 15.57 (exponencial) o de 27.27 (de variación inversa). Nos interesaba medir si los estudiantes, serían capaces de plantearse la pregunta: ¿Cuándo la población mundial llegará a esa cantidad de habitantes? En Internet se pueden encontrar datos sobre el crecimiento poblacional y utilizar la función logística para predecir una fecha crítica. Para cada modelo, se obtiene: 2039 como año crítico (lineal); 2055 (exponencial); 2077 (de variación inversa). El equipo 1 presentó dos soluciones contradictorias sin justificar el año crítico (2043 y 2263). El equipo 2, propuso un único resultado: 27.27 miles de millones. Una persona del equipo 3, mencionó que en Internet encontró que la crisis de agua potable sería en el 2376 sin justificación. En esta pregunta abierta sobre el agua potable, la dispersión fue muy grande entre los equipos y no funcionaron como comunidad de práctica (Kelley & Knowles, 2016; Wegner, 1998); solamente uno de los cinco equipos proporcionó una respuesta única como consenso (27.27 miles de millones), pero no fue más lejos. El resto de los miembros de los otros equipos no pareció afectarles la contradicción al proporcionar diferentes respuestas. La competencia sobre prever escenarios futuros (Brundiers et al., 2021; Weik et al., 2011) es muy débil en la muestra.

La reproducción de la obra "Composición aritmética", visualmente sugiere la proporcionalidad y la homotecia con el uso de *GeoGebra*. Hubo 15 construcciones correctas, tres incorrectas y una persona que no entregó trabajo. Entre las 15 construcciones correctas, 14 utilizaron proporcionalidad simple y solamente una propuso homotecia. De entre las 15 construcciones correctas, 9 realizaron una figura robusta (que se pudiera mover como una sola pieza). De entre las respuestas correctas, solo 2 respetaron los colores originales de la obra. La construcción de las 18 personas participantes en esta actividad (una no entregó la tarea), oscila entre 15 pasos mínimo en la construcción con *GeoGebra* hasta 118. Solamente 7 producciones se realizaron en menos de 40 pasos. La mayoría no realizó una optimización del número de pasos en la construcción. En esta actividad, la visualización e intuición jugaron un buen papel desde el punto de vista matemático, pero no estético. La población en general no fue sensible (salvo dos estudiantes) a los colores utilizados por el artista.

La 5ª actividad era la producción libre de un video ligado a un fenómeno de la vida real, y analizarlo con *Tracker* (toma de datos) y con *GeoGebra* (para su tratamiento). El equipo 1 propuso un video de caída libre y tomaron datos incluyendo el rebote de un objeto; ello los llevó a proponer en *GeoGebra* un polinomio de 3^er^ grado y no el modelo de caída libre en física. El equipo 2, tomó un video de Internet sobre la cicloide, analizando con profundidad las propiedades de la Braquistócrona y Tautócrona. El equipo 3 realizó un video muy simple sobre un péndulo, pero realizó un análisis profundo sobre el péndulo de Foucault y el movimiento de la Tierra, analizando con detalle la simulación de este fenómeno en diferentes museos en España. El equipo 4 realizó su propio video en un gimnasio sobre el levantamiento de pesas. El equipo 5 buscó en Internet un video sobre dos bolas colgando y chocando; analizan una de las bolas considerando la variable tiempo contra altura. Podemos decir que el equipo que analizó la Braquistócrona consideró un proyecto a la manera que la señalan Kelley & Knowles (2016) y trabajaron como una comunidad de práctica. El equipo que realizó su propio video levantando pesas muestra una actividad ligada a un deporte y promoción de salud física. Este equipo desarrolló un pensamiento normativo en el sentido de Wiek et al., (2011).

Analizando las características de una comunidad de práctica bajo el STEM integrado (Kelley & Knowles, 2016; Wegner, 1998) en cada equipo, podemos decir que no fueron muy sólidas. Los procesos de modelización matemática (según Maaß et al., 2016) fueron en general más o menos eficientes; sin embargo, bajo una perspectiva de la sostenibilidad, hubo menos progreso en lo general. Con más detalle, podemos decir que el líder del grupo 1, tenía demasiada influencia en sus otros dos miembros. En el equipo 2, dos lideres se perfilaron complementándose uno al otro e influyendo armónicamente en las decisiones de grupo. En el equipo 3, hubo dos líderes, sin mucha comunicación entre ellos, provocando ruptura más que adhesión. En el equipo 4 no había líder, y había más dispersión que adhesión. En el equipo 5 la intervención de sus miembros era regular, sobre todo dos de entre ellos, la comunicación era fluida en este equipo.

Los resultados de la 3ª actividad sobre el agua potable (Oro azul), trajo consigo mucha diversidad de respuestas (salvo en un equipo), representando un problema desde el punto de vista de la contradicción. En este caso, no se trata de una contradicción lógica ligada a las matemáticas, sino que la búsqueda de un modelo más adecuado a la situación no fue concebida por los cuatro equipos señalados. Estos resultados nos muestran la importancia de entender esta noción que la hemos nombrado "contradicción cognitiva", bajo una perspectiva de la sostenibilidad.

Referencias y bibliografía

Boucher, C., Marotte, L., & Coupal, M. (2007). Intersection mathématique. 2e cycle (1re année). Montréal : Chenelière éducation.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. 1970-1990, In Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. And Warfield, V. (Eds. and Trans.) Dordrecht: Kluwer.

Brundiers, K., Barth, M., Cebrián, G., Cohen, M., Díaz, L., Doucette-Remington, S., Dripps, W., Habron, G., Harré, N., Jarchow, M., Losch, K., Michel, J., Mochizuki, Y., Rieckmann, M., Parnell, R., Walker, P., & Zint, M. (2021). Key competencies in sustainability in higher education—toward an agreed-upon reference framework. *Sustain Sci*, 16, 13–29. https://doi.org/10.1007/s11625-020-00838-2

Camacho-Machín, M., Hitt, F., & Hernández, A. (2024). El rol de la modelización matemática y el uso de la tecnología en la formulación de problemas en una perspectiva de integración STEM en la formación de profesores de educación secundaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, XVI, 11-40.

Cortés, C., Hitt, F., & Saboya, M. (2016). Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria. *Bolema Río Claro (SP)*, 30(54), 240-264.

Chalmers, Ch., Carter, M-L., Cooper, T., & Nason, R. (2017). Implementing big ideas to advance the teaching and learning of science, technology, engineering and mathematics (STEM). *International Journal of STEM Education*.

Demir, M., & Zengin, Y. (2024). How do structural and process aspects of mathematical reasoning support each other through the integration of *GeoGebra* and the ACODESA Method? *Digital Experiences in Mathematics Education*, 10, 514-542.

English, L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July 2015, Hobart, Australia.

English, L. (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*. DOI 10.1186/s40594-016-0036-1.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* D. Reidel Publishing Company. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

Hitt, F., & Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: Representations and actions by students in action. *ZDM – Mathematics Education*. 53, 635-647. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x

Hitt, F., & González-Martín, A.S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

Hitt, F., Saboya, M., & Cortés, C. (2017). Rupture or continuity: the arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116.

Hitt, F., Soto, J-L, Romero-Felix, C-F., & Dávila-Araiza, M-T. (2022). Reflection on the STEM integration between concepts of kinematics and calculus. *Far East Journal of Mathematical Mathematics Education*, 23, 57-96.

Hitt, F., Quiroz, S., Saboya, M., & Lupiáñez, J-L. (2023). Une approche socioculturelle pour la construction d'habiletés de généralisation arithmético-algébriques dans les écoles québécoises et mexicaines. *Educación Matemática*, 35(3), 112-150.

Kelley, T.R., & Knowles, J.G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, 3, 1-11. Open access.

Maaß, K., & Reitz-Koncebovski K. (Eds). (2013). PRIMAS. Promoting inquiry in mathematics and science education across Europe. Freiburg: European Union and Seventh Framework Programme.

Maaß, K., Geiger, V., Romero-Ariza M., & Goos M. (2016). *ZDM-Mathematics Education*, 51, 869-884.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics. (1988). Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, NCTM, Reston, VA, USA.

Poincaré, H. (1902). La science et l'hypothèse. Paris : Flammarion.

Poincaré, H. (1905). La valeur de la science. Paris : Flammarion.

Prusak, N., Hershkowits R., & Schwarz, B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, 15(3), pp. 266-285.

UNESCO. (2017). Education for Sustainable Development Goals: Learning Objectives, 1st ed.; UNESCO: Paris, France.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wiek, A., Withycombe, L., & Redman, CL. (2011) Key competencies in sustainability: a reference framework for academic program development. *Sustainability Science*, 6, 203–218. https://link.springer.com/article/10.1007/s11625-011-0132-6

Zengin, Y. (2018). Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. *Educational Studies in Mathematics*, 99(3), 311–333. https:// doi. org/ 10. 1007/ s10649- 018- 9832-5

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Eds). (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. *19*, USA : MAA Series.