Desafios e oportunidades em uma tarefa para a aprendizagem de integral definida

Tainá Taiza de **Araujo**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
taina.taiza.araujo@gmail.com
Emily Caroline Felix **Cordeiro**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
emilycfcordeiro@gmail.com

Resumo

A integral definida é um conceito central no Cálculo Diferencial e Integral (CDI), mas sua compreensão ainda apresenta desafios. Este estudo analisou uma tarefa em que os alunos calcularam a área sob uma curva em uma situação contextualizada, buscando construir o conceito de integral definida. Os estudantes utilizaram formas geométricas como retângulos, triângulos e setores circulares para estimar a área. Contudo, a tarefa apresentou limitações na construção das camadas fundamentais da integral de Riemann, pois não direcionava explicitamente à exploração das somas parciais e do limite. Essa ausência dificultou a compreensão da acumulação progressiva, essencial para a estrutura da integral. A análise indica a necessidade de ajustes na tarefa ou no planejamento da aula, enfatizando a estrutura multiplicativa da soma de Riemann. Isso permitiria uma compreensão mais aprofundada da integração e auxiliaria os estudantes em seu processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino de cálculo; Integral definida; Soma de Riemann; Acumulação progressiva.

Introdução

Sendo amplamente utilizada em diversas áreas do conhecimento para modelar e resolver problemas envolvendo quantidades acumuladas, a integral definida é um dos conceitos básicos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). No entanto, sua compreensão apresenta desafios significativos para os estudantes, especialmente no que se refere à construção de seu significado conceitual (Sealey, 2006, 2014; Jones, 2013, 2015; Jones et al., 2017). A dificuldade está associada, em grande parte, à necessidade de articular diferentes representações e interpretações, como o somatório de incrementos infinitesimais e a noção de acumulação progressiva (Thompson & Silverman, 2008).

A tarefa proposta neste estudo buscou introduzir a integral definida de maneira intuitiva, levando os alunos a resolverem o problema por meio do preenchimento da região sob a curva com figuras geométricas. Essa abordagem, embora tenha possibilitado um primeiro contato com a ideia de mensuração de áreas sob curvas, não forneceu estrutura suficiente para explorar as camadas fundamentais da integral de Riemann. A ausência de um foco explícito na construção das somas parciais e no papel do limite no processo de integração impediu que a atividade consolidasse elementos essenciais para uma compreensão robusta do conceito (Sealey, 2006, 2014; Jones et al., 2017).

Diante desse cenário, este estudo busca analisar as potencialidades e limitações da tarefa em questão, refletindo sobre a necessidade de um aprofundamento teórico e metodológico na formulação de atividades voltadas ao ensino da integral definida. O objetivo é compreender em que medida a tarefa adotada contribui nos processos de ensino e de aprendizagem e quais aspectos poderiam ser aprimorados para promover uma aprendizagem mais significativa da integral de Riemann.

Fundamentação Teórica

Na última década, o conceito de Integral Definida tem sido amplamente discutido devido às dificuldades enfrentadas pelos estudantes na sua compreensão (Sealey, 2006, 2014; Jones, 2013, 2015; Jones et al., 2017; Araujo, 2023). Estudos indicam que, embora os alunos desenvolvam habilidades avançadas no que se refere ao conhecimento procedimental, encontram obstáculos na construção e no entendimento do conhecimento conceitual. (Greefrath et al., 2021). "Ao estudar essas dificuldades dos alunos e suas razões, há um reconhecimento que as ideias contidas na estrutura de soma de Riemann são importantes para uma robusta compreensão da integração definida" (Jones et al., 2017, p. 1076, tradução nossa)

Sealey (2006) elenca três razões pelas quais a compreensão das somas de Riemann é essencial. Primeiramente, elas permitem o cálculo de integrais definidas de funções que não possuem primitivas expressadas em termos de funções elementares. Além disso, sua estrutura serve de base para métodos numéricos mais eficientes, como a regra do trapézio, a regra do ponto médio e o método de Simpson. Por fim, mesmo quando uma função possui primitiva conhecida, a compreensão das somas de Riemann auxilia na correta configuração da integral definida, garantindo uma interpretação precisa do que deve ser integrado.

Nesse sentido, um contexto promissor para explorar os conceitos que fundamentam a soma de Riemann é o cálculo da área sob uma curva. A interpretação da integral definida como a medida dessa área constitui uma ferramenta essencial na resolução de problemas envolvendo integrais (Sealey, 2006). No entanto, para que os estudantes possam compreender esse conceito, é necessário que desenvolvam uma visão mais estruturada da acumulação. Isso implica reconhecer que as quantidades acumuladas não são apenas áreas estáticas, mas sim o resultado do somatório de pequenos incrementos multiplicativos (Thompson & Silverman, 2008). Dessa forma, a compreensão da integral definida deve transcender a simples visualização geométrica, incorporando a ideia de acúmulo progressivo de quantidades, permitindo uma abordagem mais profunda e generalizável do conceito.

Jones et al. (2017) definem o conceito de somatório de pequenos incrementos multiplicativos como *Multiplicative Base Sum* (MBS), ou, em tradução livre, Soma de Base Multiplicativa. Essa soma é estabelecida com base em dois elementos:

> (1) a relação multiplicativa entre o integrando e o diferencial [de uma integral definida] para criar um produto resultante, e (2) a ideia de resumir pequenas quantidades (possivelmente infinitesimalmente pequenas) do produto resultante em pequenos pedaços do domínio (possivelmente infinitesimalmente pequenos) para capturar a quantidade total dessa quantidade (Jones et al., 2017, p. 1076, tradução nossa).

Os autores descrevem o conceito de Soma de base multiplicativa (Mutiplicative Base Sum - MBS), que está relacionado à maneira como as integrais definidas acumulam pequenas contribuições ao longo de um domínio. Esse conceito se baseia em dois elementos fundamentais. O primeiro é a relação multiplicativa entre o integrando e o diferencial de uma integral definida.

Em termos matemáticos, ao calcular uma integral $I = \int_a^b f(x)dx$, a função $f(x)$ representa a quantidade a ser acumulada, enquanto dx representa um pequeno intervalo no domínio. O produto $f(x)dx$ forma um incremento infinitesimal, cujo somatório fornece o valor total da integral. O segundo elemento refere-se à ideia de resumir pequenas quantidades ao longo do domínio. Em suma, a integral pode ser vista como a soma de infinitas parcelas infinitesimalmente pequenas do produto $f(x)dx$, permitindo calcular grandezas contínuas a partir da soma de partes discretas.

Atrelado às ideias de Thompson e Silverman (2008) e Jones et al. (2017), Sealey (2014) propõe uma estrutura para caracterizar a compreensão dos alunos sobre a integral definida, definindo-a em quatro camadas que a compõem. A primeira camada da estrutura da integral definida, a Camada do produto, é composta pelo produto de $f(x_i)$ e Δx, no qual $f(x_i)$ pode ser conceituada como o integrando e Δx o diferencial. Já a camada da soma se refere à adição das infinitas parcelas resultantes do produto de $f(x_i)$ por Δx, ou seja, a soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. A terceira camada, por sua vez, aborda o conceito de limite, no qual se toma o valor à medida que n se aproxima do infinito, isto é Δx infinitesimalmente pequeno, tendo a zero, da camada do produto e da soma, o que leva à integral de Riemann. Finalmente, a quarta camada permite interpretar a integral definida como uma função de acumulação, na qual a entrada corresponde ao limite superior (ou seja, o ponto final direito) do intervalo de integração, enquanto a saída é o valor numérico da integral, representando a soma acumulada da função sobre esse intervalo, isto é, $f(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{b} f(x_i)\Delta x$, a medida de área acumulada conforme b varia.

Procedimentos metodológicos e Apresentação dos dados

A pesquisa em questão caracteriza-se como qualitativa, com abordagem interpretativa, e busca promover uma intervenção em um contexto real (Bogdan & Biklen, 1994). Conforme Gerhardt & Silveira (2009), a pesquisa qualitativa não se preocupa com a representação numérica dos dados, mas sim com uma análise aprofundada de um grupo social ou organização. Segundo esses autores, pesquisadores que adotam esse método visam compreender as causas subjacentes dos fenômenos e propor ações adequadas, sem necessariamente quantificar valores ou submeter suas conclusões a testes empíricos.

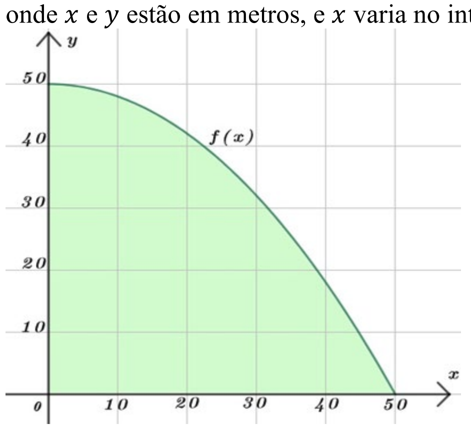
A aplicação da tarefa ocorreu no segundo semestre de 2024, durante algumas aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI 1) no curso de graduação em Agronomia. A intervenção estendeu-se por quatro aulas de 50 minutos cada, visando a coleta de dados e a análise dos resultados obtidos.

Quadro 1
Tarefa aplicada para os estudantes de Agronomia

Um agricultor deseja calcular a área de uma lavoura plantada em um terreno, onde a borda da plantação pode ser aproximada por uma função polinomial. Após medições, verificou-se que a borda pode ser representada pela seguinte função:

$$f(x) = 50 - 0{,}02x^2$$

onde x e y estão em metros, e x varia no intervalo $[0, 50]$.



a) Para estimar a área total cultivada, o agricultor deseja determinar a região limitada pela curva $f(x)$ e o eixo x, dentro do intervalo especificado. Com base nisso, qual seria a estimativa aproximada para a área cultivada?
b) O que poderia ser feito para refinar o resultado encontrado e obter uma estimativa mais precisa da área, garantindo que a maior região possível seja considerada no cálculo?
c) Explique detalhadamente o processo matemático para a determinação da área, utilizando palavras, desenhos, fórmulas ou qualquer outro tipo de registro que julgar necessário.
d) O método utilizado permite determinar o valor exato da área cultivada? Justifique sua resposta.

Fonte: as autoras.

Inicialmente, os estudantes tentaram associar a tarefa a algum procedimento envolvendo derivada, pois esse havia sido o último conteúdo estudado na disciplina. No entanto, sem sucesso nessa abordagem, expressaram surpresa e questionaram se poderiam resolver o problema sem utilizar derivadas ou se poderiam recorrer a figuras geométricas conhecidas para estimar a área. Com maior confiança, passaram a utilizar ferramentas matemáticas familiares, como as áreas de figuras planas (retângulos, quadrados, triângulos e setores circulares), para desenvolver suas soluções.

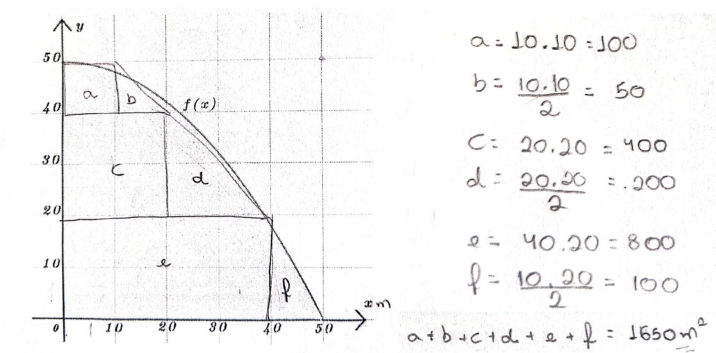


Figura 1. Resolução do Grupo 1, item (a) da tarefa (as autoras).

O Grupo 1 optou por resolver a tarefa utilizando retângulos, dividindo o gráfico em pequenas áreas e somando-as para obter uma estimativa. No item (a), a camada do produto não foi completamente explorada, pois os estudantes não utilizaram a função para determinar a altura dos retângulos. No entanto, a soma das áreas sugere, de forma intuitiva, a mobilização da camada da soma (Sealey, 2006). No item (b) (Figura 2), a tarefa solicitava um refinamento do resultado obtido no item (a). O grupo sugeriu aumentar o número de subdivisões, evidenciando a presença da camada do limite (Sealey, 2006), uma vez que se propõe realizar subdivisões adicionais. Embora a resolução não ofereça suporte completo para a estruturação da camada do produto, ela contribui intuitivamente para esse processo.

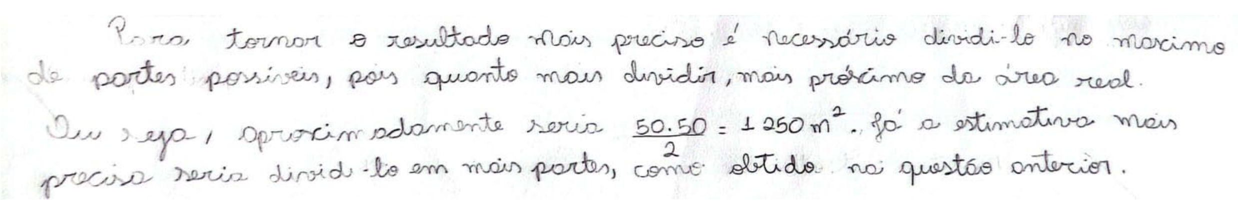


Figura 2. Resolução do Grupo 1, item (b) da tarefa (as autoras).

O Grupo 2 utilizou a função para encontrar a altura, mas calculou a área como se fosse um grande triângulo retângulo, considerando que a área de ¼ do círculo seria um refinamento (Figura 03), por estar mais próxima de uma curva. No item (b), optaram por esse caminho para obter uma estimativa mais próxima da realidade, sem mobilizar diretamente nenhuma das camadas da estrutura da integral de Riemann.

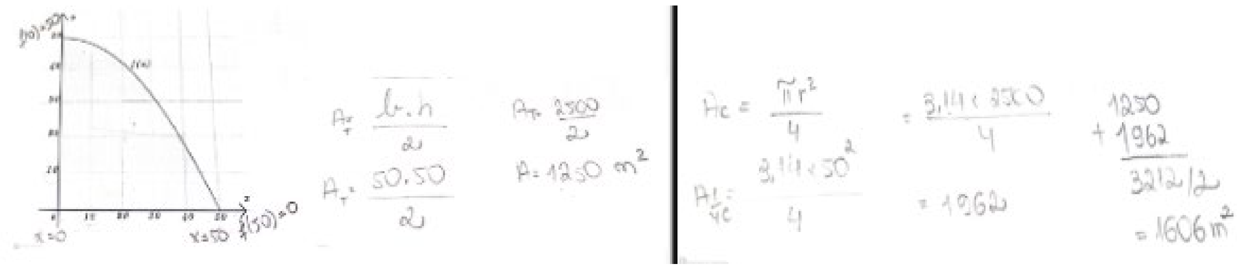


Figura 3. Resolução do Grupo 2, item (a) e item (b), respectivamente da tarefa (as autoras).

De modo geral, os estudantes recorreram a estratégias geométricas para resolver o problema. Alguns consideraram a soma de diversas formas para preencher a região sob a curva, enquanto outros, como o Grupo 2, utilizaram uma única forma geométrica maior. Para introduzir a ideia de soma de Riemann e aproximar-se do conceito de integral definida, foi proposta uma resolução utilizando slides e o software GeoGebra, permitindo aos estudantes visualizarem o conceito por meio de somas de base multiplicativa, valendo-se assim da utilização da função para a determinação da altura.

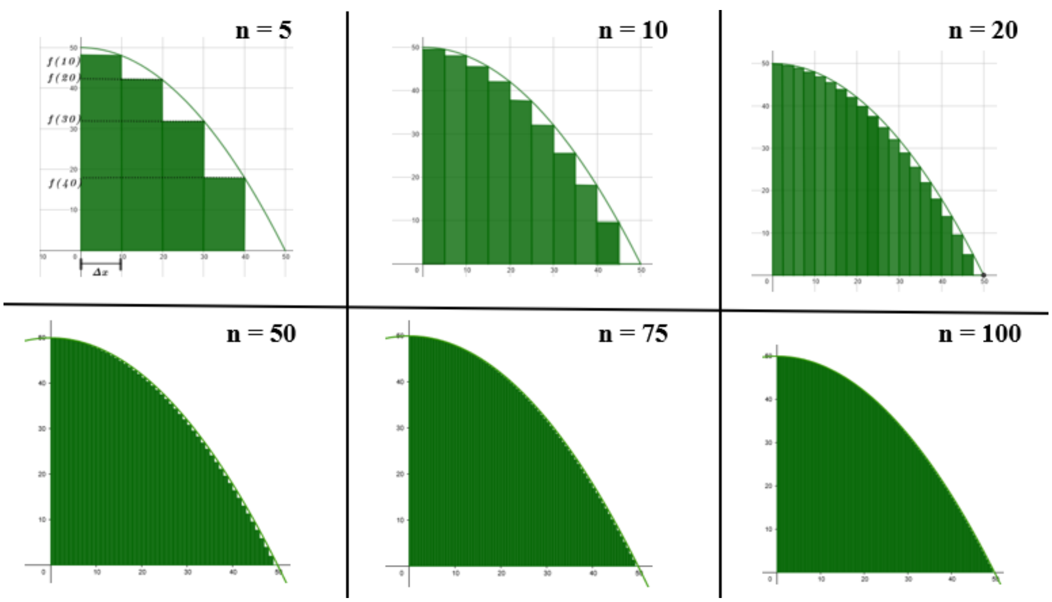


Figura 4. Apresentação das subdivisões feitas com auxílio do geogebra (as autoras)

A professora incentivou a reflexão por meio de questionamentos como: Qual conceito matemático explora essa ideia de aproximação? O que aconteceria se dividíssemos o intervalo em um número muito grande de partições? Seria possível obter um valor exato para a área? Essas discussões conduziram os estudantes à formalização do conceito de soma de Riemann e à definição de integrais definidas.

Com o recurso adicional, os alunos perceberam a relação com o conceito de limite e a soma de base multiplicativa, o que favoreceu a compreensão da camada do produto, da soma e do limite, que inicialmente não havia surgido espontaneamente nas soluções dos grupos.

Análise dos dados

No início da aula, ficou claro que os alunos estavam habituados a um modelo tradicional de ensino, centrado na definição, exemplos e exercícios. Quando desafiados a inverter essa abordagem, iniciando pela resolução de um problema antes da construção da definição, sua reação foi recorrer ao conteúdo previamente estudado, evidenciando uma forte dependência desse formato e a busca constante pela validação do professor, possivelmente devido à falta de oportunidades para assumir um papel mais ativo no aprendizado.

Essa postura reflete uma característica comum no ensino de Matemática, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, onde predomina o padrão "cartesiano" de definição-exemplo-exercício. Como apontam Couto et al. (2017), essa abordagem torna as disciplinas monótonas e excessivamente algorítmicas, prejudicando seu propósito e desmotivando os estudantes.

Durante a resolução da tarefa, diferentes estratégias foram adotadas. O Grupo 1 tentou dividir a região sob a curva em retângulos, mas não usou a função para determinar a altura dos retângulos, limitando a exploração da camada do produto. Já o Grupo 2 utilizou a função para determinar a altura, mas tratou a área como um único triângulo retângulo, o que não mobilizou as camadas estruturais da integral de Riemann. Além disso, muitos alunos apresentaram dificuldades em usar a função corretamente, apoiando-se na malha fornecida. Isso sugere que a tarefa não foi suficientemente estruturada para permitir uma exploração autónoma das camadas fundamentais da integral, indicando a necessidade de reformulação para promover uma aprendizagem mais aprofundada.

Considerações finais e conclusão

A tarefa formulada teve como objetivo inicial explorar, de maneira intuitiva, alguns dos conceitos que compõem a integral definida. Para isso, os alunos recorreram a conhecimentos prévios na resolução da atividade. Conforme destacado por Ponte (2005), é fundamental realizar uma análise prévia da tarefa para garantir que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados. Muitas vezes, as tarefas são elaboradas com determinadas intenções, mas, sem uma reflexão cuidadosa sobre sua formulação e aplicação, os resultados podem não corresponder às expectativas. Nesse sentido, ressalta-se que: "É formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade. Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula" (Ponte, 2005, p. 1).

Uma interpretação comum da integral definida é a sua relação com a área sob a curva. Embora essa abordagem seja útil e intuitiva, ela não se mostra suficiente para uma compreensão completa do conceito. A integral definida possui uma estrutura matemática mais profunda, que não pode ser reduzida apenas a essa interpretação geométrica. Seu significado vai além do cálculo de áreas, abrangendo também a noção de acumulação e a relação com somas de Riemann, aspectos fundamentais para um entendimento mais amplo.

Dessa forma, a tarefa analisada neste estudo, por apresentar um caráter altamente intuitivo e não enfatizar explicitamente o uso da função, pode não mobilizar conceitos essenciais para a compreensão da integral. Observa-se que, frequentemente, são propostas atividades que envolvem o cálculo de áreas dentro de um contexto relacionado ao curso do aluno e, posteriormente, formaliza-se a integral como uma extensão natural desse processo. No entanto, essa tarefa pode ser limitada quando não são trabalhados elementos essenciais, como o cálculo da altura dos retângulos a partir da função. Assim, para que a tarefa oportunize a aprendizagem do conceito de integral, torna-se essencial considerar esses aspectos em sua elaboração e condução.

Referências e bibliografia

Araujo, T. T. D. (2023). *Integrais definidas de uma e mais variáveis: uma proposta de intervenção com tarefas exploratórias* [Dissertação de mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná].

Couto, A. F., Fonseca, M. O. S., & Trevisan, A. L. (2017). Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: Um convite à insubordinação criativa. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 8*(4), 50-61.

Gerhardt, T. E., & Silveira, D. T. (2009). *Métodos de pesquisa* (1ª ed.). Editora da UFRGS.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V., & Weigand, H. G. (2021). Basic mental models of integrals: Theoretical conception, development of a test instrument, and first results. *ZDM–Mathematics Education, 53*(3), 649-661.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 122-141.

Jones, S. R. (2015). The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann-sum based conceptions in students' explanations of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(5), 721-736.

Jones, S. R., Lim, Y. R., & Chandler, K. R. (2017). Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1075–1095.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient? *Psychology of Mathematics Education, 2*, 46-53.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 230-245.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (Vol. 73, pp. 43–52).