Estructuras y Mecanismos mentales del concepto de permutación a través de la doble aplicación del ciclo de la Teoría APOE

Astrid Carolina **Archila**
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
astrid2238036@correo.uis.edu.co
Solange **Roa**
Universidad Industrial de Santander
Colombia
doraroaf@uis.edu.co

Resumen

El concepto de permutación es clave en diversas áreas de las Matemáticas, pero investigaciones en Educación Matemática revelan su complejidad para los estudiantes. Las dificultades surgen, por un lado, en las técnicas de conteo, donde se confunde con otros conceptos; por otro, en el álgebra moderna, debido a su alto nivel de abstracción y a la escasa comprensión de su equivalencia con las ordenaciones y funciones, en particular con las funciones biyectivas. Por ello, abordamos la permutación desde dos perspectivas: como ordenación y como función. Se realiza una descomposición genética basada en el diseño y la doble aplicación del ciclo de investigación APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Este enfoque permitió concluir que el modelo cognitivo favorece la construcción del concepto de permutación mediante la coordinación de procesos asociados a la ordenación y a la función, lo que facilita una comprensión más profunda de su equivalencia estructural en el marco de la teoría APOE.

Palabras clave: Permutación; Teoría APOE; Ordenación; Función Biyectiva; Descomposición genética.

Definición y relevancia del problema

El interés de esta investigación se centra en diseñar una descomposición genética validada del concepto de permutación, que permita describir las estructuras y mecanismos mentales construidos por estudiantes de la carrera de Matemáticas en un curso de Matemática computacional de una universidad pública en Colombia. El objetivo de esta investigación es que los estudiantes logren comprender el concepto de permutación tanto desde la ordenación como desde la función, de modo que puedan aplicarlo de manera significativa en otras áreas de su formación, como la combinatoria, la teoría de juegos, entre otras. Con base en la primera etapa del ciclo de investigación —el análisis teórico— y en particular a partir de la revisión histórico-epistemológica, se identifica que el concepto de permutación surge inicialmente como ordenación, en el contexto de las técnicas de conteo. A partir de su uso y evolución, se consolidan distintos tipos de permutaciones y definiciones equivalentes formuladas en términos de funciones y sus propiedades (Wilson y Watkins, 2013).

Bajo esta perspectiva, se presentan como resultados la descomposición genética validada del concepto de permutación, alcanzando una estructura de tipo proceso. Asimismo, se evidencia que para la construcción del modelo cognitivo fue fundamental la doble aplicación del ciclo de investigación de la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), mediante la interacción continua entre sus tres etapas. También se destaca la incorporación de un nuevo instrumento metodológico, la observación directa, que permitió refinar y validar el modelo. Este instrumento representa un aporte significativo al desarrollo metodológico de la teoría APOE, al brindar mayor precisión en la caracterización de las construcciones cognitivas de los estudiantes.

Referencial teórico

Esta investigación se fundamenta en la Teoría APOE, la cual permite describir los preconceptos y las estructuras mentales necesarias en la construcción y comprensión del concepto de permutación. Este enfoque permite identificar niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes, así como proponer estrategias y rutas de aprendizaje que favorezcan una apropiación significativa de nociones matemáticas (Arnon et al., 2014). La teoría postula que la comprensión de un concepto matemático se logra mediante la construcción de estructuras mentales: *Acciones*, *Procesos*, *Objetos* y *Esquemas*. Estas estructuras se desarrollan y articulan a través de mecanismos mentales como: *interiorización*, *encapsulación*, *coordinación*, *tematización*, entre otras.

Estructuras y Mecanismos mentales

Las estructuras y mecanismos se organizan y se reorganizan a partir de la experiencia de los estudiantes frente a nuevas situaciones matemáticas. La Figura 1, resume la interrelación entre las estructuras y mecanismos mentales, ilustrando el proceso no lineal mediante el cual se construye un concepto o noción matemática.

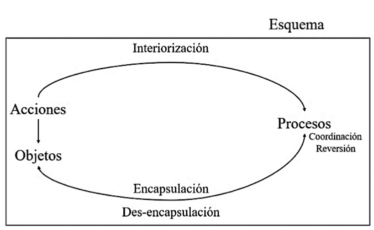

Figura 1. Estructuras y Mecanismos mentales de la Teoría APOE (Arnon et al., 2014)

Este proceso permite comprender las posibles rutas de construcción *Esquemas* mentales vinculados a conceptos matemáticos específicos. A continuación, se describen brevemente las estructuras mentales según la Teoría APOE, basadas en Arnon et al, 2014.

Acción: Se refiere a las transformaciones que un individuo puede realizar sobre objetos previamente construidos; es decir, operaciones mentales repetibles que modifican dichos objetos de alguna manera. Estas estructuras se desarrollan bajo la influencia de factores externos, requieren un proceso secuencial y no suponen necesariamente una reflexión consciente por parte del individuo.

Proceso: Es una estructura que permite al individuo reflexionar acerca de las Acciones que realiza. Comprende y describe el procedimiento; además, omite y revierte algunos pasos dentro de su ejecución. Esto permite que se interiorice las Acciones en Procesos.

Objeto: Es una estructura que se da cuando el individuo logra transformar una estructura dinámica en una estructura estática. Esto permite que el individuo reflexione sobre las operaciones aplicadas a un *Proceso*, toma el *Proceso* como una totalidad y se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar sobre el objeto. Esto quiere decir, que el individuo encapsula el *Proceso* en un *Objeto*.

Esquema: Es una estructura compuesta por *Acciones*, *Procesos*, *Objetos* y otros *Esquemas* que están relacionados en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problema que involucre esa área de las Matemáticas.

La construcción de estas estructuras y mecanismos mentales se describen mediante el diseño de un modelo cognitivo denominado descomposición genética. Este modelo cognitivo tiene como propósito describir una posible organización de las estructuras y mecanismos mentales para la construcción del concepto, por medio de una estructuración que orienta el aprendizaje de los estudiantes hacia los procesos de comprensión del concepto matemático.

Metodología de investigación

El desarrollo de esta investigación se centra en el diseño de una descomposición genética por parte de la investigadora que describe las estructuras y mecanismos mentales que evidencian estudiantes de cuarto semestre en adelante de la carrera de Matemáticas, al construir el concepto de permutación en un curso de Matemática computacional de una universidad pública de Colombia. El curso está a cargo de un docente externo a la investigación, quien, aunque no es conocedor de la Teoría APOE, permitió la observación de clases y la implementación de talleres diseñado por la investigadora con base en las estructuras y mecanismos mentales de la DGH_0. Este docente, magister en Matemáticas, posee un conocimiento amplio del concepto de permutación, tanto desde la combinatoria como desde el álgebra moderna; es decir, comprende el concepto de manera equivalente como función y como permutación. Su colaboración facilitó el intercambio didáctico y teórico que contribuyó al diseño de talleres y tareas alineadas con el modelo cognitivo; con el objetivo de que los estudiantes construyeran esas estructuras y mecanismos para la comprensión del concepto de permutación.

La metodología se desarrolló siguiendo el ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE (ver Figura 2). El cual se aplicó dos veces, permitiendo una interacción continua entre sus etapas: Análisis Teórico, Diseño e implementación de instrumentos y Recolección y Análisis de Datos; con el fin de refinar el modelo cognitivo hipotético hasta alcanzar su mayor grado de validez.

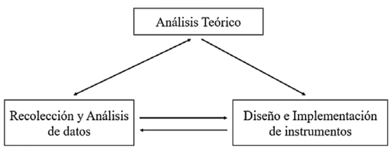

Figura 2. Ciclo de investigación de APOE (Arnon et al., 2014).

Este proceso fue representado por la investigadora mediante un espiral (ver Figura 3). El primero ciclo inicia con el Análisis Teórico 1 (AT_1) basado en la revisión histórico-epistemológica y la revisión de investigaciones previas se diseña el primer modelo cognitivo hipotético (DGH_0). A partir de este modelo se aborda el Diseño e implementación de instrumentos (DI_1), en esta segunda etapa se diseña una prueba diagnóstica (PD) y las primeras observaciones de clase (Ob_1). Estos instrumentos son analizados a la luz de la DGH_0 en la etapa de Recolección y Análisis de Datos (RD_1), en esta tercera etapa debido al análisis a posteriori de los instrumentos, se genera un refinamiento de la DGH_0. La segunda aplicación del ciclo comenzó con el Análisis Teórico (DGH_1), que consolidó el modelo refinado (DGH_1), luego se diseña el primer taller (T_1) y se continua con la observación de clases (Ob_2) en la segunda etapa del segundo ciclo (DI_2). El análisis de estos instrumentos se desarrolla en la tercera etapa de la segunda aplicación del ciclo (RD_2) lo que lleva como resultado la validación de la DGH_1. Así este espiral termina con el resultado de una Descomposición Genética Validada del concepto de permutación.

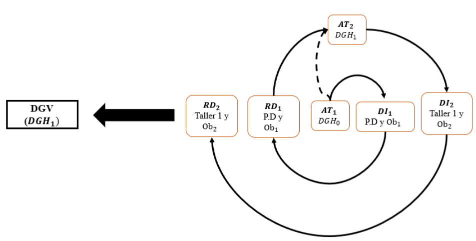

Figura 3. Aplicaciones del ciclo de investigación (Archila, 2025).

Resultados

La revisión histórico-epistemológica del concepto de permutación muestra que el concepto de permutación surge inicialmente como ordenación en las técnicas de conteo vinculada a contextos como la música, astrología; y luego se genera interés en el estudio de este concepto de manera que empiezan a buscar características y definiciones a partir de estas características (Wilson y Watkins, 2013). Con el tiempo, el concepto evoluciona hacia su definición como función biyectiva de un conjunto finito, donde el total permutaciones de n elementos distintos es igual al total de funciones biyectivas de un conjunto en sí mismo. Este tránsito permite concebir la permutación desde una equivalencia entre ordenación y función, lo cual fundamenta la propuesta teórica de esta investigación. Las revisiones de investigaciones previas como los de Salgado (2007) y Asiala et al. (1998) confirman que el concepto de permutación puede comprenderse desde ambas perspectivas: como ordenación o como función biyectiva. Sin embargo, en estas investigaciones tiendes a abordarlo desde una sola de esas visiones, lo que refuerza la necesidad de proponer una construcción que articule ambas comprensiones como equivalente. A partir del Análisis Teórico 1 se diseña el primer modelo cognitivo (DGH_0), el cual se apoya de las estructuras previas como el Esquema de conjunto según Cabrera (2022) y el *Proceso* de función según Dubinsky et al. (2005[a], como se citó en Arnon et al., 2014). Las estructuras propuestas en el modelo cognitivo son las siguientes:

- La estructura *Acción* permite que el individuo determine el total de permutaciones de un conjunto finito mediante la construcción de cada permutación, esta construcción está condicionada por el tipo de representación (lista, diagrama de árbol, entre otras). En esta estructura los individuos pueden hacer uso de fórmulas que recuerden sobre las técnicas de conteo, sin distinguir o diferenciar sus características; de manera que las utilizan mecánicamente sin ningún cuestionamiento.

- En la estructura *Proceso*, el individuo logra encontrar el número total de permutaciones como un producto; es decir, determina el total de permutaciones mediante la forma $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$. Así el individuo estructura el *Proceso* como resultado de la interiorización de las *Acciones* lo que le permite construir el concepto como una función biyectiva de un conjunto finito en sí mismo, entendiendo las características del orden, tamaño y la no repetición por medio de las propiedades de las funciones.

- En la estructura *Objeto*, el individuo adapta las propiedades de funciones hacia las permutaciones, lo que le permite realizar y entender la composición de permutaciones, determinar la inversa de una permutación como otra permutación, realizar el soporte de una permutación y a partir de esto caracterizarlas como permutaciones pares o impares.

Con base en la DGH_0, se diseña una prueba diagnóstica conformada por seis tareas que se diseñan con respecto a las estructuras previas y las estructuras (descritas en Archila, 2025). Esta prueba diagnóstica tiene como objetivo determinar a la luz de las estructuras y mecanismos mentales planteados en la DGH_0 si lo estudiantes evidencian una estructura *Proceso* a partir de la interiorización de la estructura *Acción,* que consta del uso de los diferentes tipos de representaciones que tiene el concepto. Además, se realiza la observación de clase directa semiestructurada con base en las estructuras y mecanismos mentales descritos en la DGH_0. Estos instrumentos se recolectan y se revisan todas las respuestas de los estudiantes y son analizadas a la luz de la DGH_0 en la tercera etapa del primer ciclo, en la prueba diagnóstica se analiza cada tarea teniendo en cuenta que estructura se utiliza para el desarrollo de cada tarea, y en la observación de clase se seleccionan fragmentos de clases que la investigadora consideró útil, ya que el profesor hace énfasis en el concepto como una equivalencia entre las ordenaciones y las funciones. A continuación, se muestra el análisis de algunas tareas y de algunos fragmentos de clase, los cuales nos permitieron refinar la DGH_0.

El análisis de la prueba diagnóstica nos permite observar que los estudiantes hacen uso de algunas representaciones como las tablas de contingencia para abordar las tareas sobre el concepto (ver Figura 4). El uso de estas representaciones según la DGH_0 hace referencia a las *Acciones*; de esta manera, se observa que a partir de estas *Acciones* algunos estudiantes lograron la interiorización de ellas, lo que les permitió encontrar características importantes en cada tarea, y así abordaran la tarea por medio de algún algoritmo o formula (ver Figura 4).

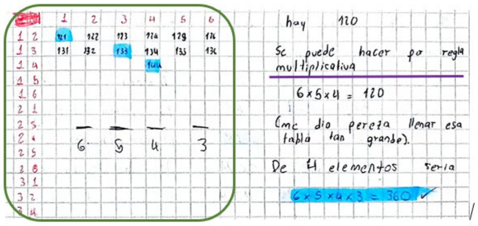

Figura 4. Solución de un estudiante de la Tarea 4 a partir de la interiorización de Acciones (Archila, 2025).

Esta prueba diagnóstica también se enfoca en cómo los estudiantes entienden el concepto de permutación por medio de una función biyectiva, el análisis de estas tareas nos permitió observar que la mayoría de los estudiantes identifican la permutación como una función sin importar la notación, ya que identifican correctamente el codominio y las imágenes, comprendiendo el concepto a partir de movimientos mentales. Esto le permite a los estudiantes poder representar el concepto en diferentes notaciones como la de ciclo y la notación en forma de dos pisos (ver cuadro verde de la Figura 5) y representarla como funciones de un conjunto en sí mismo mediante la definición conjuntista (ver subrayado azul de la Figura 5).

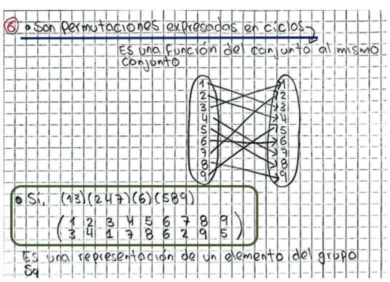

Figura 5. Solución de un estudiante abordando la Tarea 6 (Archila, 2025).

El análisis de estos instrumentos a la luz de la DGH_0 muestra que los estudiantes llegan a concebir la permutación como función (ver Figura 5) y hacen uso de los diferentes tipos de representaciones para encontrar características y así llegar al número total de permutaciones (ver Figura 4); sin embargo, en la DGH_0 solo se estaba teniendo en cuenta la permutación sin repetición y en la prueba diagnóstica se estaba haciendo uso de otros tipos de permutaciones, como en la Tarea 4 (ver Figura 4) se hace uso de las permutaciones de un subconjunto, las cuales no se estaban describiendo en el modelo cognitivo. Además, el análisis de la observación de clase nos reafirma que en el concepto de permutación se definen los diferentes tipos de permutación y en el primer modelo cognitivo diseñado no se tenían en cuenta ciertos tipos de permutaciones. Tampoco se había tenido en cuenta que los tipos de permutaciones se pueden derivar a partir de la permutación como función biyectiva de un conjunto finito en sí mismo, teniendo en cuenta las características y entendiendo estas características de forma equivalente con algunas propiedades de las funciones; por ejemplo, la no repetición entenderla como la inyectividad de una función, ya que envía un elemento del dominio a un solo elemento del rango.

El profesor empieza definiendo las permutaciones sin repetición como una productoria y muestra la equivalencia de esta definición por medio de funciones biyectivas y dando dos ejemplos de este concepto tanto como ordenación o distribución y como función (ver Figura 6).

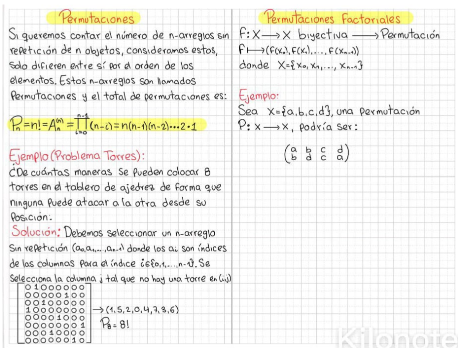

Figura 6. Definición con fórmula y ejemplo del concepto de permutación (Archila, 2025).

Mediante el concepto y la fórmula de permutación de un conjunto de n elementos diferentes, el profesor explica cómo se puede entender el concepto de permutaciones con repetición o permutaciones de un multiconjunto, esto permite que los estudiantes comprendan como se deriva la fórmula de permutaciones de un multiconjunto a partir del total de permutaciones de un conjunto de n elementos diferentes, teniendo en cuenta las características de este tipo de permutación, que son la repetición y el orden; para esto, el profesor muestra un ejemplo de este tipo de permutación con el objetivo de que los estudiantes comprendan las características por medio de las propiedades de las funciones (ver Figura 7).

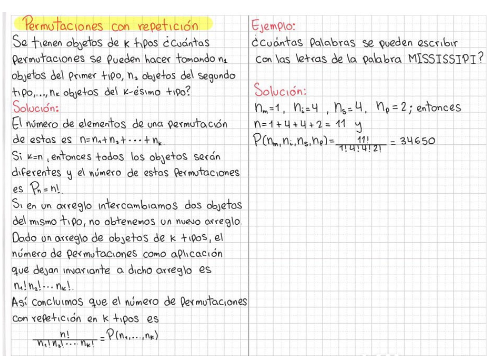

Figura 7. Construcción de la fórmula de permutación con repetición a partir de la permutación sin repetición (Archila, 2025).

Como resultado del análisis de la observación de clase con base en el modelo cognitivo DGH_0 se identifica que existen otros tipos de permutaciones que no se estaban teniendo en cuenta y que son importantes para la construcción y comprensión del concepto de permutación. Además, gracias a las clases del profesor, se observa que a partir de la permutación sin repetición se pueden derivar y comprender las fórmulas del total de todos los tipos de permutaciones, ya que el explica cómo se deriva la fórmula de las permutaciones con repetición a partir de la permutación sin repetición identificando las características y haciendo uso de las propiedades de las funciones (ver Figura 7).

El resultado de la primera aplicación del ciclo nos permite llegar a un refinamiento del primer modelo cognitivo denominado DGH_1, el cual se diseña teniendo en cuenta los resultados del análisis de la prueba diagnóstica y la observación de clase que se mencionó anteriormente. En este nuevo modelo cognitivo hipotético, el concepto se construye mediante dos tipos de *Acciones* que se interiorizan en dos *Procesos,* el *Proceso* de ordenación y el *Proceso* de función biyectiva, las cuales se coordinan para construir la estructura *Proceso* de permutación. En la Figura 8 se observan la estructuras y mecanismos mentales para la construcción del concepto de permutación, en este caso hasta la estructura *Proceso*.

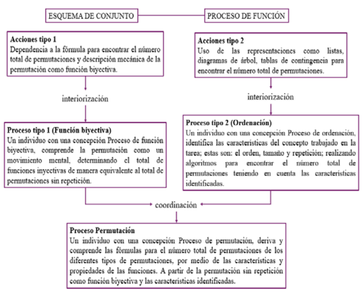

Figura 8. Refinamiento de la DGH_0 denominada DGH_1 (Archila, 2025).

Conclusiones

El modelo cognitivo refinado de la Figura 8, el cual fue validado en la investigación de Archila (2025) describe las posibles estructuras y mecanismos mentales que debe realizar un estudiante para construir y comprender el concepto de permutación. Este modelo cognitivo nos muestra que es importante comprender el concepto por medio de la equivalencia de las definiciones de ordenación y función, ya que permite que los estudiantes hagan uso del concepto para diferentes contextos o áreas. Por ejemplo, la comprensión de todos los tipos de permutaciones como funciones son de utilidad en áreas como el álgebra abstracta, ya que ayuda en la comprensión de otros conceptos como simetría, grupo de permutaciones, entre otros. En áreas como la estadística hacer uso del concepto de permutación teniendo en cuenta las características les permite abordar el concepto para hallar otros conceptos como la probabilidad, comprender el concepto de combinación, entre otros.

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Archila, A. (2025). *Construcción del concepto de permutación en estudiantes de matemáticas desde la perspectiva de la Teoría APOE* [Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander] https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/44962

Asiala, M., Kleiman, J., Brown, A., & Mathews, D. (1998). The Development of Students' Understanding of Permutations and Symmetries. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(1), 13-43. https://doi.org/10.1023/a:1009738109343

Salgado, H.M. (2007). *Conteo: Una propuesta didáctica y su análisis* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]

Wilson, R & Watkins, J. (2013). *Combinatorics: ancient & modern*. OUP Oxford.