Fortalecimiento del Pensamiento Espacial mediante una secuencia didáctica empleando el Teorema de Pick, GeoGebra y el Tangram en estudiantes de quinto grado.

Juddy **Valderrama**
EDUMAT UIS: Escuela de Educación y Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana
Colombia
javalmor@correo.uis.edu.co
Daniel **Moreno**
EDUMAT UIS: Escuela de Matemática y Instituto Técnico Gustavo Duarte Aleman
Colombia
dmorenoc@correo.uis.edu.co
Carlos **Guerrero**
Escuela de Educación, Universidad Industrial de Santander
Colombia
carlos2191614@correo.uis.edu.co
Felix **Luna**
Escuela de Educación, Universidad Industrial de Santander
Colombia
felix2201074@correo.uis.edu.co

Resumen

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1998) estableció los lineamientos y Estándares Básicos de Competencias (EBC) para estructurar el currículo académico en pensamientos, procesos y contextos. Allí se plantea abordar la enseñanza desde la resolución de problemas como eje articulador de la Matemática, potenciando procesos como el razonamiento, la comunicación y la modelación de fenómenos en un movimiento vertical y horizontal de los contenidos. Particularmente, en este trabajo se hace una mirada a la enseñanza del teorema PICK desde lo planteado. Por su parte, la investigación se estructura desde un modelo epistémico del pragmatismo, siguiendo las fases del método de la Investigación Acción propuesto por Latorre (2005). Este trabajo se aplicará en una institución pública del municipio de Floridablanca con una población del grado quinto y una muestra en la sede A.

Palabras clave: Colombia; Educación Matemática; Secuencia Didáctica; Teorema de Pick; Tangram.

Planteamiento del problema

El desarrollo adecuado del Pensamiento Espacial, especialmente en geometría, es clave para resolver problemas cotidianos. Godino (2004) afirma "El estudio de estas propiedades son las que deben convertirse en los conocimientos formales de la geometría esto es, los teoremas de la geometría Euclidiana" (p. 14). Sin embargo, la enseñanza de Matemáticas en el aula no siempre sigue los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN), cuyo objetivo es fortalecer el razonamiento y la visualización, así como la aplicación del lenguaje simbólico y numérico para resolver problemas (MEN, 1998). De igual forma se expone que, la enseñanza de las Matemáticas en las IE de Colombia debe responder a los aspectos propuestos por el MEN (2006) para la enseñanza de la Matemática, estos aspectos son: partir de situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las Matemáticas, diseñar procesos de aprendizaje mediados por escenarios culturales y sociales, fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las Matemáticas, aprovechar la variedad y eficacia de los recursos didácticos y refinar los procesos de evaluación. (p. 72-76).

No obstante, en las aulas se hace necesario que los docentes integren actividades que aborden los cinco pensamientos matemáticos, con especial énfasis en el PE, con el propósito de propiciar escenarios ricos en exploración, visualización, razonamiento y comunicación de la aplicación de la geometría en el entorno del individuo. En este contexto, la presente investigación propone una secuencia didáctica basada en el Teorema de Pick para fortalecer el PE en estudiantes de quinto grado, apoyada en herramientas de exploración físico y tecnológico como GeoGebra y el Tangram, alineándose con los Estándares Básicos de Competencia y el currículo institucional y se pretende dar respuesta a ¿Cómo fortalecer el PE utilizando el Teorema de Pick mediante una secuencia didáctica basada en el ABP?, cuyo objetivo es fortalecer el PE a partir de una secuencia didáctica utilizando el teorema de pick en estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa José Elías Puyana en el año 2025 en fases de diagnóstico, diseño, aplicación y análisis de la secuencia

Objetivos

General

Fortalecer el PE a partir de una secuencia didáctica utilizando el teorema de pick en estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa José Elías Puyana en el año 2025.

Específicos

- Determinar el estado actual de los estudiantes frente al tema del área
- Diseñar una secuencia didáctica para el fortalecimiento del PE, en el tema del área utilizando el teorema de Pick.
- Aplicar la secuencia didáctica para el fortalecimiento del PE haciendo uso del teorema de Pick
- Analizar el nivel de efectividad de la secuencia didáctica para el desarrollo del PE

Justificación

El fortalecimiento del PE es esencial tanto en el desarrollo de habilidades matemáticas como en su aplicación en la vida cotidiana. Permite visualizar, analizar y resolver problemas geométricos, competencias clave en el ámbito académico y real. MEN (1998, 2006) lo reconoce como uno de los cinco tipos fundamentales de pensamiento matemático en los EBC y Lineamientos Curriculares, destacando su importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Esta investigación se basa en el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), modelo que favorece el aprendizaje significativo al involucrar a los estudiantes en la resolución práctica de problemas. Según Reina et al. (2016), las secuencias didácticas estructuradas facilitan la construcción progresiva del conocimiento, fortaleciendo el pensamiento crítico y la creatividad.

El Teorema de Pick se emplea como herramienta innovadora para enseñar el cálculo de áreas en el plano cartesiano, ofreciendo un enfoque visual que facilita la transición de lo concreto a lo abstracto y mejora la comprensión de propiedades geométricas. Su implementación en una secuencia didáctica permite a los estudiantes de quinto grado no solo mejorar en el cálculo de áreas, sino también fortalecer su razonamiento espacial.

Esta investigación beneficia tanto a estudiantes como a docentes. Los estudiantes mejoran su rendimiento en Matemáticas y desarrollan habilidades espaciales aplicables a distintos contextos. Para los docentes, representa una alternativa metodológica al enfoque tradicional, diversificando estrategias pedagógicas y optimizando la enseñanza del PE mediante secuencias didácticas adaptables a sus prácticas.

Antecedentes

El fortalecimiento del PE ha sido abordado desde diversas perspectivas teóricas y metodológicas, tanto en contextos internacionales como nacionales y locales. Las investigaciones analizadas permiten comprender cómo herramientas como el tangram, el software GeoGebra y el Teorema de Pick han sido utilizadas con distintos propósitos educativos, niveles escolares y resultados. A continuación, se presentan los antecedentes organizados por su procedencia, resaltando sus aportes, limitaciones y su conexión con la presente propuesta de investigación.

Antecedentes Internacionales

En Venezuela, Gómez (2010) desarrolló una intervención con estudiantes de primaria empleando el tangram para trabajar el cálculo de áreas y perímetros. A través de pruebas diagnósticas y evaluaciones posteriores, se evidenció una mejora en la comprensión de estos conceptos, así como un aumento en la motivación y participación de los estudiantes.

Por su parte, Jiménez y Blanco (2016), en España, aplicaron el Teorema de Pick como herramienta didáctica para la formación de futuros docentes. Mediante el uso de tramas de puntos y geoplanos, introdujeron el cálculo de áreas a partir del conteo de puntos interiores y de frontera. Aunque los participantes enfrentaron dificultades iniciales, estrategias como la

descomposición de figuras y el trabajo colaborativo facilitaron la comprensión, destacando el valor didáctico del teorema como recurso reflexivo y visual.

En Perú, Díaz, Rodríguez y Lingán (2018) compararon el uso de GeoGebra con métodos tradicionales para enseñar geometría en secundaria. El grupo que utilizó el software mostró mejoras significativas en habilidades como el razonamiento espacial, la comunicación matemática y la resolución de problemas, lo cual evidencia el potencial de las herramientas digitales para generar aprendizajes significativos.

Estos estudios destacan la eficacia del tangram, GeoGebra y el Teorema de Pick como recursos didácticos. Sin embargo, se centran en niveles educativos distintos y no proponen una integración simultánea de estos elementos en una misma secuencia didáctica, ni están dirigidos específicamente a estudiantes de educación básica primaria. Este vacío es el que busca atender la presente investigación.

Antecedentes Nacionales

En Colombia, Castillo (2013) diseñó una estrategia con materiales manipulativos (geoplanos, tangram, poliminós) para enseñar área y perímetro en estudiantes de sexto grado. La intervención permitió mejorar la comprensión del área a través de un aprendizaje activo y visual, promoviendo la conexión entre procedimientos y propiedades geométricas.

Ceballos y Romero (2012), en el Tolima, desarrollaron una secuencia didáctica con el tangram para abordar conceptos de perímetro, área y polígonos en séptimo grado. A través de talleres y diarios de campo, observaron un aumento en la motivación y participación del estudiantado, así como mejoras en la interpretación y aplicación de contenidos geométricos. Araujo (2020) propuso un laboratorio virtual de geometría basado en Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA), enfocado en el desarrollo de conceptos métricos. El estudio mostró avances en la conceptualización del área y el perímetro, además de mayor motivación hacia las Matemáticas mediante el uso de tecnología. Aunque estas propuestas evidencian resultados positivos, se enfocan en grados superiores o en el uso aislado de un recurso. En contraste, esta investigación plantea la integración articulada del Tangram, GeoGebra y el Teorema de Pick en una secuencia didáctica orientada a básica primaria, dentro del enfoque del ABP.

Antecedentes Locales

A nivel local, el estudio de Cárdenas (2023), realizado en Bucaramanga, implementó un acompañamiento extraescolar para estudiantes universitarios del primer semestre de Licenciatura en Educación Básica Primaria, enfocado en geometría bidimensional y tridimensional. Los resultados mostraron mejoras en el rendimiento académico, el desarrollo de habilidades espaciales y una actitud más favorable hacia el aprendizaje de la Matemática. Si bien el grupo objetivo de este estudio difiere del de la presente propuesta, sus hallazgos reafirman la importancia de estrategias centradas en el PE, especialmente cuando se aplican de manera contextualizada y adaptada a las características de los estudiantes.

Marco teórico

En el presente apartado se describen las teorías que dan sustento a esta investigación. Se parte del ABP como la metodología activa al momento de planear actividades, posteriormente se definirá el PE como el pensamiento principal a fortalecer y se finaliza con el objeto matemático, el teorema de PICK, el cual permitirá desarrollar actividades que fortalezcan el PE bajo el enfoque de desarrollo de procesos.

Aprendizaje Basado en Problemas – ABP

El ABP es una metodología educativa surgida en la década de 1960 en la Escuela de Medicina de la Universidad de McMaster en Canadá, con el propósito de transformar la enseñanza tradicional mediante un enfoque centrado en la resolución de problemas reales (Barrows, 1986). Desde entonces, se ha expandido a diversas disciplinas y niveles educativos, consolidándose como una estrategia que promueve la autonomía y el pensamiento crítico (Escribano & Del Valle, 2008).

Según Hmelo-Silver (2004), el ABP permite desarrollar simultáneamente conocimientos, habilidades y estrategias de resolución de problemas. Utiliza problemas como punto de partida para integrar conocimientos en un aprendizaje centrado en el estudiante y facilitado por el docente (Barrows, 1986). Desde una visión sociocultural, el aprendizaje se da mediante la interacción social, con la guía del docente y la colaboración entre pares (Vigotsky, 1978, citado en Escribano & Del Valle, 2008). Además, la enseñanza debe basarse en la experiencia y la investigación, promoviendo el pensamiento crítico (Dewey, 1939, citado en Escribano & Del Valle, 2008)

Escribano y Del Valle (2008) destacan que el ABP no solo es una estrategia didáctica, sino un modelo integral de aprendizaje que transforma el rol de estudiantes y docentes. Su aplicación fomenta la exploración, el análisis y la reflexión, favoreciendo el aprendizaje significativo, el trabajo colaborativo y el desarrollo de competencias esenciales. En el aula, el ABP sigue una secuencia de siete pasos: presentación del problema, aclaración de terminología, identificación de factores, generación de hipótesis, identificación de lagunas de conocimiento, acceso a la información y resolución del problema (Escribano & Del Valle, 2008).

Estos pasos permiten estructurar el proceso de enseñanza-aprendizaje, fomentando la indagación, el pensamiento crítico y la colaboración. Al centrarse en problemas auténticos, el ABP genera mayor compromiso en los estudiantes y les permite aplicar los conocimientos adquiridos en contextos reales (Escribano & Del Valle, 2008).

Pensamiento Espacial – PE

El MEN (1998, 2006) establece que el Pensamiento Matemático se compone de cinco tipos de pensamiento: Pensamiento Numérico, Pensamiento Métrico, Pensamiento Aleatorio, Pensamiento Variacional y Pensamiento Espacial. Este último será el eje central de la presente investigación, dado su relevancia en la Educación Matemática y su impacto en el desarrollo de habilidades cognitivas fundamentales.

El PE abarca la geometría, la orientación espacial y la visualización, elementos clave en la Educación Matemática según el MEN (1998) y la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). Su importancia radica en su aplicación en actividades como la lectura de mapas, la visualización de rutas y la construcción de planos y diseños. En este orden de ideas, el MEN (1998) define el PE como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones mentales del espacio y sus transformaciones. Para su desarrollo, los estudiantes deben realizar operaciones mentales que les permitan interpretar y manipular estructuras espaciales. En esta investigación, se abordará desde un enfoque basado en procesos, enfatizando la construcción progresiva del conocimiento espacial mediante la experimentación y la reflexión.

Según el MEN (1998), el PE se desarrolla a través de la exploración activa y modelación del espacio, permitiendo a los estudiantes avanzar desde un espacio sensorio-motor, donde manipulan objetos y realizan desplazamientos, hasta un espacio conceptual o abstracto, donde representan mentalmente el espacio y reflexionan sobre sus propiedades geométricas. Este proceso debe apoyarse en el contexto del estudiante, incorporando un lenguaje cotidiano, movimientos corporales y gestos para facilitar la comprensión.

El modelo de Van Hiele complementa esta visión, estableciendo niveles progresivos en el razonamiento geométrico. Según Jaime y Gutiérrez (1990), los estudiantes avanzan desde el reconocimiento visual de figuras (Nivel 1) hasta el razonamiento formal y comparativo de estructuras geométricas (Nivel 5). Este modelo explica cómo los estudiantes pasan de una comprensión intuitiva a una estructuración lógica del espacio, alineándose con lo propuesto por el MEN (1998, 2006) en el desarrollo del PE.

Teorema de Pick

El **Teorema de Pick**, formulado y demostrado por el matemático checoslovaco George Alexander Pick en 1899, cuyo teorema a pesar de su relevancia matemática, el teorema permaneció en relativo anonimato hasta que el matemático Steinhaus lo incluyó en su libro *Mathematical Snapshots* en 1969. De acuerdo con este teorema, si los vértices del polígono se encuentran en una trama punteada o una cuadrícula y no presenta agujeros, su área A se puede calcular mediante la siguiente expresión matemática: $A = I + \frac{B}{2} - 1$ "donde I es el número de puntos enteros interiores y B es el número de puntos enteros sobre la frontera del polígono" (Ramírez, 2010, p. 3), además, la unidad de medida para el área será el área de los cuadrados que forman una red.

El motivo por el que se considera hacer del uso del Teorema de Pick se debe a que es una herramienta sencilla y poco enseñada que permite calcular áreas sin fórmulas convencionales. Su uso facilita la visualización y el razonamiento geométrico mediante el conteo de puntos en una cuadrícula, promoviendo una comprensión intuitiva de la geometría. En la presente investigación, el enfoque se centrará en el uso del Teorema de Pick fortalecer el cálculo del área y el perímetro de polígonos dentro de una red de puntos. Sin embargo, en su aplicación se verán involucrados otros conceptos matemáticos, como características y propiedades de las figuras geométricas. A través de este estudio, se espera fortalecer el PE y geométrico en los estudiantes,

promoviendo el aprendizaje activo y la exploración de propiedades matemáticas en un entorno visual y manipulativo, tal como lo sugiere el MEN (1998, 2006).

Diseño Metodológico

Esta investigación se fundamenta en el modelo epistémico del pragmatismo, cuyo propósito es transformar la realidad mediante acciones concretas. Se adopta el método de Investigación-Acción de Latorre (2005), que consta de cuatro fases: planificación, acción, observación y reflexión. El enfoque es experimental dentro de la Investigación Educativa, ya que se busca implementar una propuesta didáctica en un contexto escolar real. La población objetivo son estudiantes de educación básica primaria de la Institución Educativa José Elías Puyana Sede A, ubicada en Floridablanca, Santander. La muestra corresponde a estudiantes de quinto grado, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico para permitir una observación directa y detallada de la intervención educativa. Al retomar el método, la planificación se divide en dos momentos: primero, el diagnóstico del conocimiento de los estudiantes mediante un cuestionario que evalúa el PE a través de cuatro preguntas; y segundo, el diseño del plan de acción basado en los resultados obtenidos. La estrategia de intervención consiste en una secuencia didáctica de diez sesiones organizadas en tres momentos: apertura, desarrollo y cierre.

En la apertura (sesiones 1 y 2), se clarifican los conocimientos previos mediante la resolución de problemas geométricos con Tangram. En el desarrollo (sesiones 3 a 8), la tercera sesión define el problema central: "¿Cómo calcular el área de una figura en el plano cartesiano?". La cuarta sesión analiza el problema e introduce el Teorema de Pick a través del cálculo del área con métodos tradicionales y este teorema. La quinta sesión formula objetivos de aprendizaje mediante textos que presentan problemas relacionados con el cálculo de áreas. Las sesiones 6, 7 y 8 incluyen la investigación y el estudio individual mediante el uso del software GeoGebra para calcular áreas de figuras bidimensionales y tridimensionales, explorando el proceso de desdoblamiento de figuras tridimensionales en planos 2D.

En el cierre (sesiones 9 y 10), se da la discusión e informe, los estudiantes reflexionan sobre los métodos utilizados y aplican lo aprendido en la resolución de problemas. Se fomenta el diálogo para argumentar cuál método es más efectivo.

Para argumentar cuál método es más efectivo. La evaluación es formativa, basada en el progreso de los estudiantes y su capacidad para resolver problemas utilizando el Teorema de Pick. Para valorar el desarrollo del PE durante la intervención, se emplearán tres tipos de instrumentos. Inicialmente, se aplicará un cuestionario diagnóstico con preguntas abiertas y cerradas para identificar el nivel de comprensión geométrica de los estudiantes. Durante la secuencia, se utilizarán rúbricas de observación y listas de cotejo para registrar avances en el uso del Teorema de Pick, el manejo del tangram y GeoGebra, y la argumentación matemática. Al cierre, se aplicará una rúbrica final junto con actividades de autoevaluación y una breve entrevista grupal. Con estos instrumentos se pretende valorar tanto los productos como los procesos, en coherencia con el enfoque de investigación-acción y el ABP.

Resultados esperados

El diagnóstico inicial permitirá identificar las dificultades de los estudiantes en PE, se espera obtener los insumos para el diseño de la secuencia didáctica basada en la aplicación del Teorema de Pick basado en la metodología didáctica del ABP mediada con la herramienta tecnológica de GeoGebra, el Geoplano y el Tangram.

Se espera que la secuencia didáctica, apoyada en herramientas tecnológicas, fortalezca el PE mediante la comprensión de conceptos geométricos, promoviendo el razonamiento, la comunicación y la modelación. Además, el uso de tecnología facilitará la exploración dinámica de figuras y la conexión entre lo bidimensional y tridimensional, enriqueciendo el aprendizaje con visualización, prueba y lenguaje matemático.

Conclusiones

La presente investigación aborda en el contexto educativo nacional de Colombia en institución Publica la necesidad de ahondar en el desarrollo PE para potencializar habilidades de los estudiantes. Es prematuro determinar conclusiones generales, puesto que el trabajo se encuentra en la fase exploratoria de formulación, en respuesta se espera tener como resultados, la participación activa de los actores y que lo abordado sea útil y le aporte al desarrollo del plan de mejoramiento de las Prácticas Pedagógicas del grado quinto en cuanto la enseñanza de la Matemática como una herramienta para potenciar el desarrollo del Pasamiento Matemático y la interpretación del individuo con su entorno y su naturaleza.

Bibliografía y referencias

Araujo, D. S. (2020). *Desarrollo del pensamiento métrico espacial a través de la implementación de un laboratorio de geometría interactivo*. *Revista Espacios, 41*(35), Artículo 14. Recuperado de https://www.revistaespacios.com

Barrows, H. (1986). A taxonomy of problem-based learning methods. Medical Education, 20, 481-486.

Castillo Beleño, J. I. (2013). *Área y perímetro de polígonos y regiones poligonales*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia].

Ceballos Villanueva, S y Romero Suárez, M. (2012). *El Tangram chino de siete piezas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría*. Ibague : Universidad del Tolima, 2012.

Escribano, A, y Del Valle, Á. (2008). *El Aprendizaje Basado en Problemas: Una propuesta metodológica en Educación Superior*. Narcea Ediciones.

Ferrero de Pablo, L. (2010). Jaque a las matemáticas. Arco Libros - La Muralla. https://www-digitaliapublishing-com.bibliotecavirtual.uis.edu.co/a/137272

Godino, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*.

Gómez, S. J. (2010). *Tangram como recurso didáctico para la comprensión de la geometría en cálculos de área y perímetro de figuras poligonales* [Trabajo Especial de Grado, Universidad Central de Venezuela].

Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-based learning: What and how do students learn? *Educational Psychology,* 16(3), 235-266.

Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares M.V. Sanchez (Eds.) Teoría y práctica de la educación matemática. (pp.295-384). Sevilla: Alfar. https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Jiménez-Gestal, C., & Blanco Nieto, L. J. (2017). El teorema de PICK como pretexto para la enseñanza de la Geometría con Estudiantes para Maestro. Números, 94, 7-21. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. Recuperado de https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1243287/Jimenez2017Teorema.pdf

Latorre, A. (2005). *La Investigación-Acción : Conocer y Cambiar la Práctica Educativa*. Editorial Grao.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1998). *Lineamientos curriculares*. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estandares Básicos de Competencias*. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ramírez, J. (2010). *El Teorema de Pick y redes de puntos*. Universitat Autònoma de Barcelona.

Reina Neira, L. Gómez de la Hoz, Felizzola Jiménez, H y Hualpa Zúñiga, A. (2016). *Aprendizaje basado en problemas para la enseñanza de diseño y análisis de experimentos.* INGE CUC, 12(2), 86-96.

Secretaría de Educación Distrital. (1999). *Desarrollo del pensamiento espacial y geométrico: proyecto evaluación competencias básicas, material de apoyo al trabajo de los docentes área de matemáticas*. https://repositoriosed.educacionbogota.edu.co/entities/publication/cf8ffc00-574f-4b9d-a5ac-15ce48094811