



Un universo de posibilidades en aulas multigrado de primaria con Matemática Discreta

Mayra Elizabeth **Parra** Amaya

Programa de Tutorías para el aprendizaje en la formación integral (PTA FI 3.0), MEN

Colombia

maparra72@uan.edu.co

Osvaldo Jesús **Rojas** Velásquez

Universidad Antonio Nariño

Colombia

orojasv69@uan.edu.co

Resumen

Este estudio describe una experiencia de enseñanza y aprendizaje con algunas nociones de la Matemática Discreta (teoría de grafos, combinatoria y razonamiento) para el aula multigrado de primaria. El objetivo es despertar el interés por aprender temas matemáticos por medio de la resolución de problemas contextualizado a los oficios, particularmente el de ser astronauta, analizando diferentes formas de ordenar objetos para la toma de decisiones. El enfoque de la investigación es de corte cualitativo, la primera actividad tiene un seguimiento por medio del semáforo del aprendizaje, y la segunda, con un enfoque descriptivo. La metodología tiene cuatro pasos: preparación, aplicación, participantes, recolección de datos y análisis de datos, basados en el Modelo pedagógico MULTI-CREA (Parra, 2024). Los resultados encontrados evidencian el gran potencial que tienen estas aulas en la aceleración del aprendizaje. La aplicación de juegos estratégicos y temas relacionados con la Matemática Discreta, ayudan a tomar mejores decisiones.

Palabras clave: Aula multigrado; teoría de grafos; juegos estratégicos; oficios.

Definición y relevancia del problema

Este estudio aborda la problemática de la ausencia de la Matemática Discreta en los currículos de educación básica primaria, especialmente en aulas multigrado, a pesar de su relevancia en la era digital (Tamayo, Lago, Hernández y Abreu, 2021). Se propone un enfoque pedagógico que integra diversas asignaturas en torno a un tema central de interés de los

estudiantes, el oficio de astronauta, utilizando el modelo MULTI-CREA (Parra, 2024) basado en la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal (Van den Heuvel, 2020). La EMR se centra en el aprendizaje práctico y significativo, fomentando la resolución de problemas abiertos y la construcción del conocimiento matemático a través de la creatividad, la argumentación y el razonamiento (Gravemeijer y Terwel, 2000; Parra y Rojas, 2022). Para evaluar estas habilidades, se utilizan indicadores commognitivos (Zayyadi et al., 2019) en un estudio cualitativo con enfoque descriptivo.

La secuencia didáctica incluye dos actividades, en la primera seis retos de teoría de grafos y en la segunda actividad con dos juegos estratégicos, destacando el juego "Déjalo sin estrellas", que busca desarrollar el pensamiento matemático y la generalización (Stacey, Burton, Mason, 1982; Mason, 1989; Radford, 2006). Este ejercicio incentiva el pensamiento matemático (Stacey, Burton, Mason, 1982), en el cual, por medio de preguntas orientadoras, se lleva al estudiante del proceso de particularización (identificando aspectos en común de casos particulares) para transferir propiedades que se cumplen de una situación u otra, hasta encontrar el camino de la generalización (fases: abordaje, ataque y revisión).

Para la Matemática Discreta es de vital importancia el concepto de generalizar, que significa descubrir alguna ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); donde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema (Mason, 1989). Radford (2006) ve la importancia de la generalización como proceso fundamental para descubrir y construir Matemáticas.

La presente investigación se propone fomentar el entusiasmo por el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes, empleando la resolución de problemas situados en contextos reales, enfatizando la profesión de astronauta, con el fin de facilitar la comprensión y aplicación de conceptos básicos de la Matemática Discreta y de la teoría de grafos.

Materiales

Para la realización de la secuencia didáctica “Ser Astronauta” en base al modelo pedagógico MULTI-CREA (Parra, 2024), se utilizan algunos materiales, que pueden ser adaptados según los contextos. Los materiales necesarios para aplicar la actividad son: computador, video beam, sonido, hojas carta, fotocopias, tijeras, colbón, piedritas pintadas (amarillo, azul, blanco, gris y naranja), juego de cartas de Súper constelaciones y súper mundos, plantilla de nave espacial, colores, sistema solar, rejilla de evaluación, diagrama de barras (semáforo del aprendizaje) lápiz y borrador.

Método

El ejercicio se llevó a cabo a partir de estos cuatro pasos:

Preparación y aplicación

En esta etapa se organizó la secuencia didáctica que lleva por objetivo desarrollar en los estudiantes habilidades que contribuyan a la resolución de problemas matemáticos retadores, a

partir del oficio de ser astronauta, fortaleciendo valores sociales como el cooperativismo, la sana convivencia y la colaboración mediante la interacción lúdica, la teoría de grafos y otras aplicaciones. En el organizador gráfico se muestran las relaciones con otras asignaturas mostrando la interdisciplinariedad y articulación con otras áreas (Ver Fig. 1).



Figura 1. Organizar gráfico de la actividad

Podemos observar que las asignaturas que acompañaran nuestra secuencia son Matemáticas (conjunto M), Ciencias Naturales y Sociales (conjunto C) y Artística (conjunto A). Cada uno de ellos lleva en su interior las temáticas a trabajar según el área y en sus intersecciones el producto o evidencia articulada con las otras asignaturas.

Por ejemplo:

$M \cap A \cap C = \{\text{objetivo de la secuencia didáctica}\}$

$M \cap A = \{\text{Creación de constelaciones y cohete espacial}\}$

$A \cap C = \{\text{Comprensión de textos, creatividad y construcción}\}$

$M \cap C = \{\text{Constelaciones Planetas, satélites y otros datos}\}$

La secuencia didáctica se estructura en cinco fases clave: motivación, estructuración, práctica, transferencia y cierre. En la primera etapa, se exploran los conocimientos previos de los estudiantes mediante preguntas sobre el oficio de astronauta, sus experiencias, desafíos y referentes, fomentando la participación y el intercambio de ideas.

La segunda fase, de estructuración, se enfoca en responder a las preguntas iniciales, proporcionando información detallada sobre la historia, geografía y ciencia relacionadas con la vida de los astronautas, el universo y las constelaciones. Se introducen conceptos matemáticos como estructuras aditivas y multiplicativas, unidades de tiempo, distancia y velocidad, y se establece la conexión entre las constelaciones y la teoría de grafos, utilizando el concepto de "arreglo de vecinos" para representar las conexiones entre estrellas. Cada constelación la relacionamos como un grafo, en donde las estrellas son los vértices y las conexiones imaginarias son las aristas (Ver Fig. 2). También, se construye la matriz de adyacencia del grafo (constelación), nombrada por los estudiantes como el "arreglo de vecinos", en donde se indica en sistema binario, con "1" (si hay conexión) o "0" (si no hay conexión).

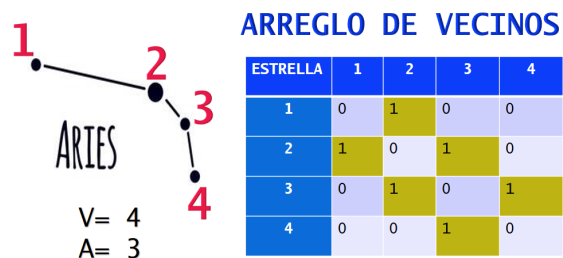


Figura 2. Relación de la constelación con la teoría de grafos.

La etapa se lleva a cabo en forma de plenaria, fomentando la participación de todos los estudiantes multigrado bajo una propuesta general con actividades diferenciadas. A continuación, en la tercera etapa, se pasa a actividades individuales adaptadas a cada grado. Tras completar las tareas, los estudiantes intercambian sus trabajos para realizar una revisión y evaluación entre pares, con la supervisión del docente. Se utiliza el "Semáforo del Aprendizaje" para proporcionar retroalimentación cualitativa inmediata, clasificando el desempeño en tres niveles: verde (comprensión total), amarillo (comprensión parcial) y rojo (necesidad de mayor apoyo). Cada estudiante recibe una calificación cualitativa y una referencia en un diagrama de barras, permitiéndoles visualizar su progreso en relación con los retos propuestos (Ver Fig. 3)

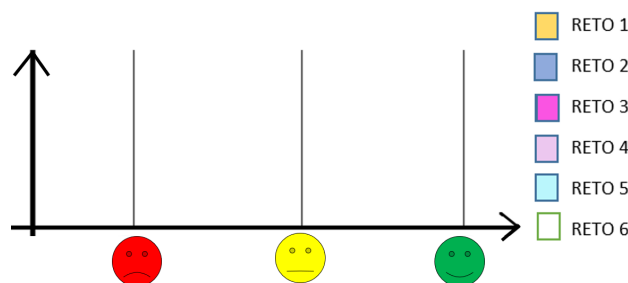


Figura 3. Semáforo del aprendizaje – Reto Astronauta

La actividad será evaluada por medio de seis retos, cada uno de ellos será evidenciado con un rectángulo de un color (según el reto), con el nombre de cada estudiante y el grado, ubicado en las caritas de colores rojo, amarillo y verde (Ver Fig. 4).

RETO 1 YESICA 3°	RETO 2 YESICA 3°	RETO 3 YESICA 3°	RETO 4 YESICA 3°	RETO 5 YESICA 3°	RETO 6 YESICA 3°
------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

Fig. 4: Fichas rectangulares de los retos

Los retos a trabajar son los siguientes: RETO 1: Arreglo de vecinos, RETO 2: Constelaciones camino Euleriano, RETO 3: Constelaciones Ciclo Euleriano, RETO 4: Constelaciones árbol o ciclo, RETO 5: Constelaciones zodiacales y RETO 6: Creando constelaciones.

En la cuarta etapa, transferencia se realiza la asociación de las constelaciones con la teoría de grafos, se explica la temática, buscando tener un conocimiento, lenguaje técnico y algunas definiciones como camino, ciclo o bucle, matriz de adyacencia, camino Euleriano, ciclo Euleriano y grafo árbol.

Todos los retos anteriores se desarrollaron con integrantes del mismo grado, desglosando el nivel de complejidad.

Para la segunda actividad, inicialmente, se construye un cohete con una plantilla diseñada y por medio de un juego de cartas (Súper mundos y Súper Constelaciones), diseñadas por Juegos y Modelos (aprendizaje divertido), especialmente para la temática, se comparan algunas medidas con valores enteros y decimales, para las constelaciones y los planetas, Estas medidas relacionan datos reales para los planetas y satélites como diámetro, distancia al sol, densidad, velocidad de escape, velocidad orbital y el año de descubrimiento. Para las constelaciones, medidas como porcentaje del cielo, estrella del asterismo, distancia a la estrella alpha, objetos messier y visibilidad dada en grados.

El segundo juego llamado “Déjalo sin estrellas”, es un juego adaptado de “Toma dos o juego de NIM (<https://static.idm314.org/resources/activities/idm-2024-games-es.pdf>)”. Las estrellas pueden ser piedritas pintadas de distintos colores y tamaños. Los estudiantes deben encontrar la estrategia ganadora siguiendo el siguiente instrumento:

Juego: Déjalo sin estrellas

Inicio. Hay un montón de estrellas sobre una mesa. Este juego se juega con dos jugadores. Ambos jugadores saben cuántas estrellas hay en el montón.

¿Cómo jugar? Comienza un jugador. En el turno de un jugador, él debe tomar exactamente una o dos estrellas del montón. Los jugadores se alternan para jugar.

¿Quién gana? El primer jugador que no puede hacer su movimiento es el perdedor. El otro gana. Estas instrucciones y un instrumento con seis problemas retadores (PR), orientadas para que los estudiantes pudieran ir analizando por casos y así logaran descubrir la estrategia ganadora.

Preguntas orientadoras:

PR1. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para “Déjalo sin estrellas” con una sola pila de 3 estrellas? Juega con tu compañero varias veces. ¿Quién gana con más frecuencia? Analiza la situación, juega el número de veces que sea necesario.

PR2. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para una sola pila de 5 estrellas?

PR3. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para una sola pila de 6 estrellas?

PR5. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para una sola pila de 9 estrellas?

PR6. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para una sola pila de cualquier número de estrellas?

Para la quinta etapa, la de cierre, después de haber aplicado los retos, se socializa el diagrama de barras del Semáforo del aprendizaje para evaluar la secuencia. Por medio del Pasaporte se realiza la autoevaluación (ver Fig. 5), sugerencias y opiniones entre todos, en el cual no solo se evalúa la parte cognitiva, sino también la parte de responsabilidad, trabajo en equipo y actitud en clase.

Aspectos a evaluar										Sugerencia
Desarrollo de las situaciones Retos	R1 	R2 	R3 	R4 	R5 	R6 				
Cumplimiento con el material solicitado.										
Trabajo en equipo										
Actitud en la clase										

Figura 5. Pasaporte (Modelo MULTI-CREA). Proceso de autoevaluación – Reto Astronauta

Igualmente, tomando algunos indicadores de los componentes commognitivos como el uso de palabras, mediador visual, narrativa y rutina (Zayyadi *et al.*, 2019) (Ver Tabla I), para ser usado solo en la implementación del juego “Déjalo sin estrellas”.

Tabla 1

Indicadores de los componentes commognitivos utilizados para resolver problemas matemáticos

Componente commognitivo	Indicador
Uso de palabras	Escribe y recita palabras, incluidos términos algebraicos, numéricos y semánticos, ecuaciones y otros términos utilizados por los estudiantes para resolver problemas matemáticos.
Mediador visual	Utiliza objetos como gráficos, imágenes, diagramas y otros en la resolución de problemas matemáticos.
Narrativa	Describe hechos matemáticos tales como axiomas, definiciones y teoremas que son utilizados por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.
Rutina	Explica los pasos seguidos para resolver los problemas dados.

Participantes

La población está conformada por los estudiantes de aula multigrado de primaria, de la Institución Educativa San Gerardo del municipio de Garzón (Huila) y la muestra de la investigación está constituida por 10 estudiantes de los grados 3°, 4° y 5° de la Sede rural y multigrado, El Batán.

Recolección de datos

El proceso de recolección de datos comenzó con la evaluación (ver Fig. 3 y Fig.4) y autoevaluación de los Retos (ver Fig. 5) y con la entrega de un instrumento para los juegos. Para el proceso de autoevaluación, los estudiantes completaron la Tabla I, coloreado de verde todas las caritas, para los 10 estudiantes multigrado.

En los juegos, se organiza dos mesas con estudiante de los tres grados. Para el juego Súper Mundos y Súper constelaciones, los estudiantes comparaban las medidas y conocían los valores de cada una de los planetas, satélites y constelaciones. Ellos observaban a través de la práctica, cuáles eran los valores más grandes o pequeños de esas medidas y en siguientes partidas, de forma estratégica iban apostando a los mayores valores y, por ende, ganaban.

En el juego “Déjalo sin estrellas”, los estudiantes entregaron el instrumento, solo dos de ellos contestaron todos los problemas retadores incluidos en el instrumento (un estudiante de 4° y uno de 5°), los demás, dejaban algunos problemas retadores sin contestar. Se puede indicar que para el PR1 contestó el 80% de los estudiantes, para el PR2 el 60%, para el PR3 el 40%, para el PR4 el 70%, para el PR5 el 50% y para el PR6 el 20%, evidenciando que a medida que el número de fichas aumentaba, eran menos los estudiantes que opinaban al respecto.

Análisis de datos

Los resultados de la recolección del pasaporte indican un éxito notable en la implementación de los seis retos, con un 100% de comprensión para la parte cognitiva y social. La autoevaluación reveló una actitud positiva hacia la participación, el cumplimiento de tareas, el trabajo en equipo y el compromiso general, lo que sugiere un alto nivel de motivación hacia el tema del oficio de astronauta.

En cuanto a los juegos estratégicos, estos proporcionaron un espacio para la exploración y el aprendizaje práctico, donde los estudiantes aplicaron habilidades de comparación numérica y resolución de problemas aditivos y multiplicativos. Finalmente, el análisis del juego "Déjalo sin estrellas" a través de los indicadores commognitivos reveló información valiosa sobre las estrategias y el lenguaje utilizado por los estudiantes al abordar problemas matemáticos.

Uso de palabras

Los estudiantes escriben y recitan palabras de su lenguaje cotidiano (Ver Fig. 6) como gana, el primero, el que empiece o inicia, el segundo, múltiplo de 3, pierde, par, impar, coge, oportunidad o ventaja, saca, desventaja y arreglos de tres fichas, entre otras. Usando el software Atlas ti, se muestran las coincidencias en las palabras más usadas.



Figura 6. Uso de palabras más usadas en el Déjalo sin estrellas, usando el software Atlas ti.

No incluyen términos algebraicos, ecuaciones y otros términos utilizados para resolver problemas matemáticos.

Mediador visual

Utilizan el material concreto (fichas) y a medida que avanza el juego logran organizarlas para que sea más fácil visualizar las que quedan en la pila. Pero en cuanto a la parte escrita no utilizan ningún objeto como gráficos, imágenes, diagramas, etc. Solo un estudiante logró ver la importancia de colocar las fichas en arreglos de 3.

Narrativa

Los hechos matemáticos se evidencian mediante conjeturas dando un orden a las ideas para llegar a la respuesta parcial del PR6.

Rutina

Los estudiantes explican por medio de ideas sueltas algunas conjeturas y solo 2 estudiantes muestran una respuesta generalizada que se acerca a la correcta.

Para concluir la actividad y conseguir la estrategia ganadora, se construyó la siguiente tabla, con la participación de todos y a manera de discusión (ver Tabla II).

Primer Jugador-A Segundo jugador-B

Tabla 2

La estrategia ganadora para cualquier número de fichas

Jugador	Número no múltiplo de 3	Múltiplo de 3
A	Tiene la ventaja. Debe tomar una o dos fichas para dejar en el montón un múltiplo de 3.	Tiene la desventaja. Pero debe estar pendiente si en algún momento puede dejar un múltiplo de 3 en el montón.
B	Tiene la desventaja. Pero debe estar pendiente si en algún momento puede dejar un múltiplo de 3 en el montón.	Tiene la ventaja. Debe tomar una o dos fichas para dejar en el montón un múltiplo de 3.

Resultados

El trabajo organizado en secuencias didácticas enfocado a los oficios despierta gran interés y curiosidad en los estudiantes. El aula multigrado es un excelente espacio para generar aprendizaje de forma integral. Por medio de la aplicación de la Matemática Discreta en los juegos estratégicos y la teoría de grafos, evidenciamos algunos aspectos a mejorar en el desarrollo del pensamiento matemático que tienen algunos estudiantes de la Institución Educativa San Gerardo en la resolución de problemas. Generalmente en la institución educativa, es la primera vez que los estudiantes se enfrentan a un juego estratégico. Se evidencia que la gran mayoría de estudiantes les costó llegar al PR6, por medio de ese hilo conductor planteado inductivamente y les hace falta retomar algunos componentes del álgebra temprana, como lo es la relación matemática y la estructura aritmética y la generalización. Aunque el ejercicio en la parte escrita se aproximó a algunas ideas en el proceso de generalización, la respuesta es parcial a lo esperado. Solo el 20% de los estudiantes evidenciaron un proceso de comprobación, revisión y generalización. Se logró el objetivo del instrumento 1, con la ayuda de todos, a modo de discusión y por medio de preguntas orientadoras (ver Tabla I).

Conclusiones

La integración entre la EMR, los indicadores de los componentes cognitivos (Zayyadi *et al.*, 2019) (Ver Tabla I) y el pensamiento matemático (Stacey, Burton y Mason, 1982) constituye la lupa desde la cual se realiza la interpretación de los datos y el análisis de los resultados.

En el desarrollo del trabajo se establece una metodología clara, flexible y puntual la cual contribuye a alcanzar el interés de los estudiantes por aprender temas matemáticos por medio de la resolución de problemas contextualizado al oficio de ser astronauta, para comprender y resolver problemas básicos de la Matemática Discreta y teoría de grafos, hacia el aprendizaje de las Matemáticas en el aula multigrado.

Las secuencias didácticas enfocada a los oficios, despierta interés y curiosidad en los estudiantes, propiciando un excelente espacio para generar aprendizaje de forma flexible e integrada.

Referencias

- Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). *Hans Freudenthal, un matemático en Didáctica y teoría curricular*. VU Research Portal.
- Hernández, A. L. (2021). Acercamiento a la realidad educativa en las escuelas del sector rural venezolano. *Revista Scientific*, 6(19), 264-278.
- Little, A. W. (2006). Education for all: Multigrade realities and histories. In *Education for All and Multigrade Teaching* (pp. 1-26). Springer, Dordrecht.
- Parra, M. & Rojas, O. (2022). La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula multigrado de primaria: Una caracterización. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 2(3), 1-27.
- Parra, M. (2024). *Modelo pedagógico MULTI-CREA, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula multigrado de primaria contextualizado a los oficios*. [Tesis de Doctorado en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño]. Colombia
- Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. *28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1–21(March 1987), 2–21
- Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.
- Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the learning of mathematics*, 9(2), 2-8.
- Tamayo, L. D. P., Lago, I. B., Hernández, W. G., & Abreu, D. R. (2021). Tendencias actuales del desarrollo del pensamiento computacional desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Discreta. *Revista Cubana de Ciencias Informáticas*.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). *International reflections on the Netherlands didactics of mathematics: Visions on and experiences with Realistic Mathematics Education*. Springer Nature.
- Zayyadi, M., Nusantara, T., Subanji, S., Hidayanto, E., & Sulandra, I. M. (2019). A commognitive framework: The process of solving mathematical problems of middle school students. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 18(2), 89-102.