



Un marco conceptual complementario para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de educación secundaria

José Ramón **Jiménez** Rodríguez

Doctorado en Matemática Educativa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora México

joseramon.jimenez@unison.mx

José Manuel **Castillo** Sedano

Doctorado en Matemática Educativa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora México

a215290112@unison.mx

Resumen

Se presentan avances¹ de un proyecto de intervención didáctica, consistentes en el diseño de un marco conceptual complementario para describir el desarrollo del pensamiento variacional, denominado Nivel Cero (N0), que a la vez fundamenta orientaciones didácticas en educación básica. Se plantea la tesis de que el estudio matemático exhaustivo del comportamiento de una sola magnitud variable según Jiménez (2020), constituye, por sí mismo, toda una estructura cognitiva (en el sentido piagetiano) que subyace al desarrollo del pensamiento variacional, y que dicha estructura puede y debería ser formada de manera completa en la educación secundaria, durante y en paralelo con el estudio de la representación de números y cantidades en la recta numérica (una magnitud variable—un eje numérico). Esto permitiría desarrollar en el alumno una serie de imágenes conceptuales (cualitativas) y herramientas matemáticas cuantitativas básicas que permiten identificar, describir y denominar los tipos básicos de comportamiento variacional de una magnitud variable.

Palabras clave: Educación media inferior; Magnitud variable; Pensamiento variacional; Razonamiento covariacional; Razonamiento variacional; Variación.

¹ Al momento de la redacción de este reporte el trabajo se encuentra en desarrollo. Actualmente se ubica en la fase de planeación, fundamentación y diseño preliminar de intervención didáctica.

Definición y relevancia del problema

El currículo de educación secundaria propone desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes. Sin embargo, en la abrumadora mayoría de las investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento variacional se presentan distintas perspectivas e interpretaciones del concepto en sí. Para nosotros, éste consiste en el estudio de la variación continua de las magnitudes variables involucradas en los fenómenos de cambio en progreso. Asimismo, en las orientaciones didácticas curriculares, el alumno es involucrado, desde el mismo primer momento, con tareas matemáticas propias del razonamiento covariacional. Estas tareas son complejas, debido a que requieren de la habilidad para coordinar la variación simultánea de dos cantidades, algo que para muchos estudiantes resulta difícil, y más aún cuando dicho contenido matemático se aborda como parte del tema de funciones, con un enfoque didáctico discreto y para nada variacional. Dada la ausencia de un marco conceptual apropiado para interpretar y conducir el desarrollo del pensamiento variacional en una etapa de escolarización temprana, hemos considerado necesario desarrollar uno propio, recuperando algunos planteamientos previos. La elaboración de tal marco conceptual complementario constituye una aportación teórica a la educación matemática.

Aunque sabemos que en los fenómenos del mundo en el que vivimos nunca se presentan las magnitudes variables por separado, aislar las magnitudes variables y estudiarlas de esa manera nos parece una decisión didáctica justificada, debido a que es una tarea cognitiva relativamente más simple, por cuanto no requiere de la coordinación explícita de dos cantidades variables. Un planteamiento cardinal del presente trabajo es la tesis de que *el estudio matemático exhaustivo del comportamiento de una sola magnitud variable* (EIMV) constituye, por sí mismo, toda una estructura cognitiva (parafraseando a Piaget, 1968) sobre la que reposa el ulterior desarrollo del razonamiento covariacional. La comprensión profunda del comportamiento de una sola magnitud variable², su descripción en términos matemáticos y su representación gráfica dinámica en la recta numérica es relevante y estructural para la formación y el desarrollo del pensamiento variacional, tanto desde el punto de vista matemático, como del cognitivo. En particular, es fundamental para la comprensión, interpretación, dotación de sentido y construcción de las gráficas cartesianas en el plano. Es la roca firme sobre la que se construye el edificio del pensamiento variacional.

Marco teórico y explicativo

Nuestro marco teórico y explicativo se fundamenta en la concepción de Harel (2008), quien afirma que el propósito principal de la educación matemática es desarrollar el pensamiento matemático, el cual se compone de *maneras de entender y maneras de pensar*. Además, se considera el aporte teórico de Amador y Jiménez (2023), el cual propone una adaptación del enfoque de Harel, extendiendo algunos términos. Es decir, conciben que, para desarrollar el pensamiento variacional, es pertinente diseñar estrategias didácticas que permitan generar *Maneras Variacionales de Entender* (MVdE) y *Maneras Variacionales de Pensar* (MVdP).

Definen a las MVdE como el producto cognitivo particular del acto mental de producir imágenes dinámicas relacionadas con las características esenciales de las magnitudes variables, presentes en los fenómenos de cambio en progreso, y las MVdP como las características

² Dado el nivel educativo en el que se ubica este proyecto, nos referimos exclusivamente a las magnitudes escalares.

cognitivas del acto mental de producir imágenes dinámicas por el estudiante, reveladas de las realizaciones repetidas de sus maneras variacionales de entender. Estos autores sostienen que es pertinente que en educación secundaria se desarrolle el pensamiento variacional a partir de un enfoque didáctico que tome en cuenta a las MVdE, con el propósito de construir y/o reconstruir conceptos matemáticos que soporten el desarrollo de este tipo de pensamiento matemático. Por ejemplo, dentro de las MVdE se concibe a las variables algebraicas no como objetos matemáticos abstractos sin significado, sino como símbolos elegidos convenientemente para representar aspectos cuantitativos esenciales de la realidad. La magnitud variable no representa un único valor numérico, ésta toma infinitos valores numéricos. La variación no consiste en cambios que ocurren “a saltos” en los fenómenos, más bien implica cambios cuantitativos continuos y suaves en los valores numéricos de la magnitud variable. La literal no representa solo un valor numérico, al contrario, representa todos y cada uno de los valores numéricos de la magnitud variable, asociados con una unidad de medida, entre otras.

Por otro lado, consideramos también el marco conceptual del *Razonamiento Covariacional* de Carlson y cols. (2003) y el del *Razonamiento Variacional* de Thompson y Carlson (2017). El Razonamiento Covariacional describe una serie de acciones mentales complejas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables, en términos de cinco niveles de desarrollo, que van desde el Nivel 1 (el más elemental) hasta el Nivel 5 (el más desarrollado). Cada nivel queda descrito por lo que se denomina *acción mental*, que consiste en la manifestación de ciertos razonamientos sobre los fenómenos de covariación. El desarrollo de cada nivel está en función de la acción mental asociada a ese nivel, y todas aquellas que la preceden. Por su parte, Ramos y Jiménez (2014) señalan dos limitaciones de este enfoque: a) se centra solamente en el Cálculo Diferencial, y b) no considera todas las representaciones semióticas deseables para abordar el pensamiento variacional. En su trabajo proponen de manera complementaria el uso de representaciones tabular, gráfica, algebraica, verbal, y digital.

Por su parte, el Razonamiento Variacional señala que éste consta de dos momentos críticos. El primero consiste en comprender que las magnitudes variables varían, es decir, que sus valores numéricos cambian. Se caracteriza por el hecho de ser una manera dinámica de pensar. Es decir, percibir en una situación de cambio la intervención de una o más magnitudes variables (una de las cuales puede ser el tiempo), indagar de qué manera cambian, formarse imágenes mentales dinámicas sobre estas, crear herramientas matemáticas para representar y cuantificar tales cambios, y desarrollar un lenguaje apropiado para describirlos. Hay un aspecto importante en la conceptualización de una magnitud variable que tiene una connotación intuitiva. Se trata del hecho de que el valor numérico que la magnitud variable toma en cada momento es único (no es posible que una magnitud variable tome dos o más valores numéricos diferentes en un mismo instante). Esta característica esencial es conocida como el *principio de unicidad*. El segundo momento es una apreciación de carácter estético: cuando una magnitud variable cambia, lo hace suavemente (el tiempo transcurre suavemente de un instante a otro en un intervalo, un atleta al correr se desplaza suavemente de un punto a otro de la trayectoria). Todo el proceso es continuo, no omite ningún estado en su devenir. El cambio es suave de un estado al siguiente, esta característica corresponde al *principio de continuidad*.

Consideramos que esta manera variacional de pensar es tanto *cualitativa* (implica la construcción de imágenes dinámicas de la variación y el razonamiento sobre ellas, al igual que el desarrollo de un lenguaje que refleje dicho dinamismo), como *cuantitativa* (tiene que ver con

cálculos numéricos, técnicas y expresiones algebraicas). La manera de pensar que exige el estudio matemático del cambio en progreso es un ente complejo que podemos concebir como constituido por dos componentes complementarios, a los que Thompson y Carlson (2017) han denominado respectivamente *razonamiento variacional* y *razonamiento covariacional*.

Se enfatizan en el presente trabajo las limitaciones de ambos marcos conceptuales, dado que el razonamiento covariacional es cognitiva y matemáticamente mucho más complejo que el razonamiento variacional, ya que para desarrollar en el alumno la capacidad de razonar de forma covariacional, no solo es deseable sino además y ante todo es *necesario* desarrollar previamente su capacidad más elemental para razonar de manera variacional, esto es, razonar sobre una sola magnitud variable. Esto es precisamente lo que constituye la esencia del Nivel Cero (N0)³. Es importante considerar que, para comprender de manera dinámica cómo ocurren los cambios en las magnitudes variables del fenómeno, es esencial utilizar adecuadamente el término “cambio”. Según Thompson et al. (2019), su uso adecuado implica percibir que las magnitudes variables están experimentando un cambio en curso en ese momento, es decir, conlleva la noción dinámica de “cambio en progreso” (en cierto lugar y en un marco temporal). Las magnitudes variables son intrínsecamente objetos dinámicos, poseen un trasfondo temporal y espacial.

Conceptualizamos como magnitud variable a cierta cualidad perceptible y cuantificable de un proceso en desarrollo, misma que en cada momento, en una progresión temporal inexorable, toma un valor numérico distinto. Como resultado de una cuantificación, cada valor numérico está asociado a una unidad de medida. Las magnitudes variables son temporales en el sentido expuesto, y son dimensionales en el sentido de que se les asocia una unidad de medición. La magnitud variable toma progresivamente distintos valores en distintos momentos, a medida que va desarrollándose el fenómeno o proceso en el que ella interviene. Esta imagen del concepto de variable es dinámica (*significado variacional*), según Jiménez et al. (2022). Por lo tanto, es importante tener en cuenta que, al estudiar fenómenos de variación, están presentes ciertas características cambiantes y cuantificables, que dan lugar a imaginarnos que el cambio está ocurriendo, esto es, siempre está presente un cambio en progreso (Thompson et al., 2019; Jiménez et al., 2022). El cambio en progreso es fundamental para abordar y comprender una variedad de fenómenos de variación en el ámbito de las ciencias naturales y sociales. Este concepto postula que los fenómenos, ya sean naturales o sociales, no son estáticos, sino que por su naturaleza intrínseca son dinámicos, y están en constante evolución a lo largo del tiempo.

Propuesta de un marco conceptual complementario: el Nivel Cero (N0) del pensamiento variacional

Se decidió denominar *Nivel Cero* (N0)⁴ a la etapa inicial correspondiente a la formación y desarrollo del razonamiento variacional. Es un marco conceptual complementario al Razonamiento Covariacional de Carlson et al. (2003) y Razonamiento Variacional de Thompson y Carlson (2017), y se enfoca en caracterizar el razonamiento variacional relacionado con la conceptualización matemática de la variación continua de una sola magnitud variable, teniendo ésta un trasfondo temporal. A continuación, en la Tabla 1 se enlistan y describen de manera sucinta las etapas que en su conjunto tienen lugar en el nivel cero del razonamiento, al adentrarse al análisis de una situación variacional, y que son requeridos para en un segundo momento, dicho

³ El marco conceptual del Nivel Cero (N0) y su conjunto de acciones mentales se describen en la Tabla 1.

⁴ Tomando en cuenta la terminología propuesta por Carlson et al. (2003).

tipo de pensamiento pueda transitar desde el trabajo matemático en la recta numérica hacia el trabajo matemático en el plano cartesiano. En esta línea de trabajo de Jiménez et al. (2022), la propuesta para abordar el *Nivel Cero (N0)* se desarrolla mediante las acciones mentales, sus *Evidencias de Manifestación (EDM)* y la *Calidad De la Ejecución (CDE)* de estas.

Tabla 1

Las Acciones Mentales del Nivel Cero del Pensamiento Variacional.

<p>Primera Acción Mental del Nivel Cero (AM1-N0). Consiste en identificar las magnitudes variables y las magnitudes constantes en el fenómeno (identificación de las magnitudes de interés relevantes). La EDM es un listado nominal de magnitudes constantes y variables percibidas en el fenómeno dinámico. La CDE se determina por: 1) el carácter de las magnitudes (variables y constantes) identificadas por el estudiante para la comprensión y posterior matematización del fenómeno; y 2) la pertinencia de las magnitudes variables percibidas, con respecto a la realidad intrínseca del fenómeno de cambio.</p>
<p>Segunda Acción Mental del Nivel Cero (AM2-N0). Tiene que ver con la cuantificación de cada una de las magnitudes de interés identificadas. Utilizar un método y un instrumento que permita cuantificar (con medición directa o indirecta) las propiedades involucradas en el fenómeno, o al menos imaginárselo e informarse. La EDM es un listado de valores numéricos consecutivos (ordenado de acuerdo con la progresión en que fueron registrados u obtenidos a medida que el proceso variacional sucedió) y que representan el comportamiento de la magnitud variable en el fenómeno de cambio cuantitativamente. La CDE consiste en si el estudiante percibe el carácter discreto de este listado de valores numéricos y lo confronta o no, con la realidad observada, que lo lleva a tomar conciencia de que solamente unos cuantos (realmente, muy pocos) valores numéricos han sido registrados, y de la dificultad o imposibilidad de registrarlos todos.</p>
<p>Tercera Acción Mental del Nivel Cero (AM3-N0). Se relaciona con la capacidad de comparar los valores numéricos de la magnitud variable que aparecen en el listado, establecer relaciones entre ellos, realizar mentalmente ciertas estimaciones aritméticas elementales (sentido numérico), para que a partir de la visualización completa del listado (progresivo) discreto de los valores numéricos consecutivos de la magnitud variable, se analice la dirección del cambio de la magnitud variable, y por ende el comportamiento de ésta. La EDM consiste en si el alumno es capaz o no, de analizar dos aspectos importantes de los valores numéricos: 1) el signo de los valores numéricos, para entender si los valores numéricos que consecutivamente toma la magnitud variable son positivos, negativos o incluso de ambos signos; 2) una comparación (inicialmente mental y aproximada) de los valores numéricos consecutivos que dicha magnitud variable toma de forma progresiva, para entender si dichos valores numéricos consecutivos van aumentando, disminuyendo, aumentan primero y luego disminuyen o viceversa. La CDE consiste en si el estudiante es o no capaz de describir de forma cualitativa y adecuada el cambio, ya sea mediante los términos “aumenta” o “disminuye”, o mejor aún, “crece” o “decrece”.</p>
<p>Cuarta Acción Mental del Nivel Cero (AM4-N0). Se refiere a la conceptualización de la variación continua. Requiere concebir que el cambio de la magnitud variable sucede de forma fluida y suave (sin brincos), es decir, a medida que el fenómeno se desarrolla, todo el proceso es continuo desde el inicio hasta su fin. Se fundamenta en lo que respecta al <i>principio de continuidad</i> presente en los fenómenos de cambio en progreso. La EDM y la CDE se vincula con si el estudiante es o no capaz de comprender que la variación de la magnitud variable no ocurre de forma caótica (o por partes), sino que sucede de manera natural con “suavidad”, y que a cualquier escala o amplificación del continuo de valores numéricos que toma la magnitud variable no omite ningún estado en su devenir. El estudiante debe comprender que los procesos de cambio son continuos en el sentido de que cambian suavemente de un estado al siguiente, es decir, si el proceso se encuentra en un estado en cierto momento, y en otro estado en un momento diferente, entonces asume todos los estados posibles entre estos dos momentos.</p>
<p>Cuarta Acción Mental del Nivel Cero (AM4-N0). Se refiere a la conceptualización de la variación continua. Requiere concebir que el cambio de la magnitud variable sucede de forma fluida y suave (sin brincos), es decir, a medida que el fenómeno se desarrolla, todo el proceso es continuo desde el inicio hasta su fin. Se fundamenta en lo que respecta al <i>principio de continuidad</i> presente en los fenómenos de cambio en progreso. La EDM y la CDE se vincula con si el estudiante es o no capaz de comprender que la variación de la magnitud variable no ocurre de forma caótica (o por partes), sino que sucede de manera natural con “suavidad”, y que a cualquier escala o amplificación del continuo de valores numéricos que toma la magnitud variable no omite ningún estado en su devenir. El estudiante debe comprender que los procesos de cambio son continuos en el sentido de que cambian suavemente de un estado al siguiente, es decir, si el proceso se encuentra en un estado en cierto momento, y en otro estado en un momento diferente, entonces asume todos los estados posibles entre estos dos momentos.</p>

<p>Quinta Acción Mental del Nivel Cero (AM5-N0). La representación algebraica de la magnitud variable identificada cumple una doble función e implica transitar del uso simbólico de la literal como incógnita (valor numérico generalizado), a utilizar el simbolismo de la literal para referirse a un objeto matemático que no representa un valor numérico fijo, al contrario, dicho valor numérico cambia suavemente. Esto corresponde con un proceso crucial en el desarrollo del pensamiento algebraico en el alumno, en el sentido variacional. Se trata de una acción mental a la que no se presta la atención debida en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra. La EDM y la CDE es que el estudiante comprenda dicha doble función de la representación algebraica, la literal simboliza tanto a la magnitud variable identificada, y también (contrario al significado de incógnita) representa a todos y cada uno de los (infinitos) valores numéricos, ordenados en una progresión temporal continua (valores numéricos consecutivos) que toma la magnitud variable en cada instante del fenómeno, y este(os) está(n) cambiando en cada momento. Es decir, se utiliza la representación simbólica de la literal como variable, conceptualizada con su debida connotación dinámica, no simboliza un solo valor fijo.</p>
<p>Sexta Acción Mental del Nivel Cero (AM6-N0). Tiene que ver con la representación gráfica o geométrica de una magnitud constante en la recta numérica y la localización de un punto fijo en ella, que corresponda con la representación del valor numérico de la magnitud constante. La EDM consiste en el proceso de construcción de la recta numérica, lo cual se desglosa en el trazo de una recta arbitraria, elegir un punto arbitrario como origen sobre este, escoger una dirección positiva y escoger un segmento unitario para que a partir de este graduar la recta, la localización sobre esta del punto A, cuya abscisa corresponde con el valor numérico de la magnitud constante. La CDE queda determinada por la capacidad del estudiante para utilizar sus conocimientos previos para construir la recta numérica e identificar al único punto fijo sobre ella que representa adecuadamente a la magnitud constante. La comprensión de las características esenciales de dicho punto: a) se trata de un punto fijo, estático, inamovible; b) la abscisa de este punto es exactamente igual al valor numérico de la magnitud constante.</p>
<p>Séptima Acción Mental del Nivel Cero (AM7-N0). Tiene que ver con la representación gráfica o geométrica de una magnitud variable en la recta numérica, mediante un punto móvil sobre esta. La EDM consiste en obtener una imagen dinámica de la variación de la magnitud variable que represente a todos y cada uno de los valores numéricos de esta, en donde la abscisa de dicho punto móvil es igual al valor numérico que toma la magnitud variable en ese momento, por lo tanto, en cada instante, la ubicación del punto móvil está determinado por el valor numérico que la magnitud variable toma en ese momento. La CDE se determina por la capacidad del estudiante para apoyarse de forma creativa en la acción mental previa, y proponer una manera adecuada de representar a la magnitud variable mediante un punto móvil en la recta numérica, describiendo las características esenciales de dicho punto móvil al llevar a cabo un análisis de este.</p>
<p>Octava Acción Mental del Nivel Cero (AM8-N0). La conceptualización de la variación continua de la magnitud variable en la representación gráfica. La EDM y CDE que el punto móvil que representa a la magnitud variable se desplaza siempre en la recta numérica, sin salirse de ella, sin brincos o saltos, pasando de una posición a la siguiente sin omitir ninguna, de manera suave y fluida, sin dejar “huecos” en el segmento de recta numérica, entre el valor inicial y el valor final de dicha magnitud variable que toma en el fenómeno de cambio.</p>
<p>Novena Acción Mental del Nivel Cero (AM9-N0). La dirección del desplazamiento del punto móvil en la representación geométrica o gráfica de la magnitud variable. La EDM consiste en si el alumno es capaz o no de detectar la dirección en la que ocurre el cambio de las magnitudes de interés, mediante su representación gráfica con ayuda del punto móvil en la recta numérica, y comprender que su movimiento representa el comportamiento de la magnitud variable. La CDE se basa en la capacidad del estudiante para comprender que, si el punto móvil se desplaza en dirección positiva, se puede decir que la magnitud variable crece, y si ocurre en dirección negativa, se infiere que la magnitud variable decrece; si no ocurre ningún desplazamiento del punto móvil (permanece fijo, sin movimiento), se argumenta que la magnitud identificada es una constante (esta no presenta variación ni cambio).</p>
<p>Décima Acción Mental del Nivel Cero (AM10-N0). La discriminación del carácter del cambio con base en la representación geométrica de la magnitud variable. La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de detectar, en el desplazamiento del punto móvil, que la distancia entre los pares de posiciones consecutivas de dicho punto puede manifestarse de tres maneras, que sea: igual o diferente (cada vez más separada y/o más junta).</p>
<p>Undécima Acción Mental del Nivel Cero (AM11-N0). La discriminación del carácter de cambio irregular con base en la representación geométrica. La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no, de detectar que el desplazamiento del punto móvil ocurre de manera irregular o caótica, dado que se manifiesta de forma aleatoria.</p>
<p>Duodécima Acción Mental del Nivel Cero (AM12-N0). La cuantificación del cambio en grueso o macroscópico en la representación gráfica o geométrica de la magnitud variable. La EDM y CDE consiste en si el alumno es capaz o no, de comprender que a partir de la determinación de la distancia entre pares de posiciones consecutivos del punto móvil que representa a la magnitud variable, es posible determinar si ésta crece o decrece cada vez lo mismo, cada vez más o cada vez menos.</p>

<p>Décimo Tercera Acción Mental del Nivel Cero (AM13-N0). La cuantificación numérica del cambio que experimenta la magnitud variable. La CDE está determinada por la capacidad y/o creatividad del estudiante para utilizar sus conocimientos previos y proponer una manera adecuada para cuantificar el cambio experimentado por una magnitud variable, mediante una resta (diferencia) de dos de sus valores numéricos consecutivos en la lista, señalando el orden en que dicha operación de sustracción debe realizarse. Esta cuantificación, a diferencia de lo que habitualmente se practica en la enseñanza bajo otros enfoques, no es puntual sino global (se realiza sobre todo el listado de valores numéricos) y dinámica (se van tomando de manera progresiva parejas consecutivas de valores numéricos de la magnitud variable, hasta agotar todas las parejas).</p>
<p>Décimo Cuarta Acción Mental del Nivel Cero (AM14-N0). La determinación del carácter y la magnitud del cambio a partir del signo y el valor absoluto de las diferencias. La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de realizar el cálculo de las diferencias de los valores numéricos consecutivos de la magnitud variable que interviene en el fenómeno. En esta etapa hay que prestar mucha atención no solo al tamaño de lo que cambia, es decir, al valor absoluto de dichas diferencias, sino sobre todo al signo que arroja dicho cálculo, debido a que éste expresa si la magnitud variable crece o decrece.</p>
<p>Décimo Quinta Acción Mental del Nivel Cero (AM15-N0). La discriminación fina de los tipos elementales de variación a partir del empleo repetido del cálculo de diferencias. La EDM consiste en la aplicación repetida del cálculo de diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de la magnitud variable. La CDE se refleja por la capacidad y/o creatividad del estudiante para utilizar sus conocimientos y acciones mentales previamente asimiladas, y proponer el cálculo repetido (por segunda vez, por tercera vez, etc.) de las diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de la magnitud variable, como herramienta para explorar e investigar, dentro de cada tipo elemental de comportamiento variacional, las subclases posibles (teóricamente), y determinar el comportamiento de la magnitud variable (creciente o decreciente) como: uniforme, acelerado y/o desacelerado.</p>
<p>Décimo Sexta Acción Mental del Nivel Cero (AM16-N0). La suma acumulada de los cambios absolutos. La EDM es la conceptualización de la suma de todas las diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de la magnitud variable como el cambio total o acumulado que dicha magnitud ha experimentado. La CDE se refleja en la capacidad del estudiante para proponer sumar los cambios progresivos de la magnitud variable para obtener el cambio neto o total que dicha magnitud variable experimenta.</p>
<p>Décimo Séptima Acción Mental del Nivel Cero (AM17-N0). La reversibilidad de los cambios absolutos (acercamiento intuitivo al Teorema Fundamental del Cálculo). La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de comprender que el valor actual de una magnitud variable se puede obtener a partir de los valores numéricos de sus cambios absolutos. Es decir, el valor numérico actual de una magnitud variable es igual al valor numérico que dicha magnitud tenía al inicio del proceso en el que ella interviene (valor inicial), más el cambio acumulado que experimentó al momento actual.</p>
<p>Décimo Octava Acción Mental del Nivel Cero (AM18-N0). La independencia del comportamiento de la magnitud variable en relación con el sistema de referencia elegido para cuantificarla. La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de comprender que, si se modifica el sistema de referencia para la obtención de los valores numéricos de la magnitud variable, éstos se ven afectados por la ubicación del origen de coordenadas, sin embargo, no se altera la esencia del fenómeno analizado, ya que se refieren a una misma realidad, simplemente contemplada desde diferentes ubicaciones.</p>

Fuente: Elaboración propia. 2025

Aclaremos que, aunque sin duda se trata de una acción mental importante para el desarrollo del pensamiento variacional, el establecimiento de relaciones (cualitativas, y sobre todo cuantitativas) entre las magnitudes variables, constantes y parámetros percibidas que intervienen en el fenómeno, no se incluye en el marco conceptual del Nivel Cero, dado que dichas ideas están directamente relacionadas con el razonamiento covariacional.

Discusión

La investigación educativa parece asumir como un hecho incuestionable y obvio que el razonamiento variacional es simple, natural y espontáneo, y que no deberíamos preocuparnos por su desarrollo. Sin embargo, al realizar el esfuerzo de identificar, describir y caracterizar de forma preliminar las acciones mentales del trabajo matemático requerido en el análisis de una sola

magnitud variable (aislada de las demás) percibida en un fenómeno de cambio en progreso, nos percatamos con asombro de dos hallazgos significativos: a) existe un gran número de acciones mentales del *Nivel Cero* (dieciocho hasta el momento), y b) las acciones mentales no son elementales, estas presentan cierto grado de abstracción y complejidad matemática. El marco conceptual propuesto exhibe que hay una problemática por atender, a la que hasta el momento no se le ha prestado la atención debida. Ciertamente, en el currículo escolar está contemplado el estudio de la recta numérica, pero lamentablemente no desde el punto de vista variacional, para desarrollar en ella imágenes gráficas dinámicas asociadas a los distintos comportamientos variacionales elementales, o a desarrollar y utilizar herramientas matemáticas que le permitan profundizar en el análisis del comportamiento de las magnitudes variables.

Por otra parte, nuestro marco conceptual también es adecuado como guía metodológica para estructurar de forma coherente el diseño de las actividades didácticas, materiales y recursos manipulables digitales tomando en cuenta varios registros de representación, y el trabajo matemático que debieran desarrollar los estudiantes a partir de las acciones mentales descritas para el Nivel Cero del Razonamiento Variacional. El uso de tecnología digital facilita la cuestión de cuantificar las magnitudes variables que intervienen en el fenómeno, al obtener los valores numéricos de éstas, con los cuales es posible matematizar el fenómeno. A su vez, ayuda en la visualización dinámica del comportamiento de las magnitudes variables analizadas de forma artificial por separado en la representación geométrica, mediante un punto móvil que se desplaza sobre la recta numérica, esto favorece la comprensión de ideas variacionales potentes, dado que enfrenta la conceptualización errónea presente en el currículo acerca del análisis de procesos variacionales “por porciones o por partes”, los cuales conceptualizan a los procesos de variación y cambio como si este sucediera por brincos o saltos. Sin embargo, con el uso del applet de geometría dinámica se logra apreciar claramente la representación gráfica y dinámica del comportamiento de una magnitud variable, en donde un punto móvil P se desplaza de forma continua desde el valor numérico inicial hasta el valor numérico actual de la magnitud variable.

Cabe reconocer que, para validar el desarrollo teórico que aquí se presenta, es necesaria su ulterior investigación y puesta en escena en el aula.

Referencias y bibliografía

- Amador S. L. M., Jiménez R. J. R. (2023). *Diseño didáctico de la covariación exponencial bajo el enfoque del pensamiento variacional*. Memorias del XVI Congreso Interamericano de Educación Matemática <https://xvi-ponencias.ciaem-iacme.org/index.php/xviciaem/xviciaem/paper/view/1338/694>.
- Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V., pp. 33-59.
- Carlson, M., Jacob, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento Covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA, VOL. 8* N°2, pp. 121-156.
- Harel, G. (2008). *What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question*. En B. Gold & R. Simons (Eds.), *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy*, Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 265 – 290. <https://mathweb.ucsd.edu/~harel/What%20Is%20Mathematics.pdf>.
- Jiménez R. J. R., Grijalva, M. A., Milner, F. A., Dávila-Araiza, M. T. & Romero, F. C. F. (2022). *Reconceptualización didáctica del Cálculo*. Colección Textos Académicos No. 156. Editorial de la Universidad de Sonora. ISBN: 978-607-518-508 8. <https://doi.org/10.47807/UNISON.201>
- Jiménez-Rodríguez, J. R. (2020). *Level-zero covariational reasoning in secondary school mathematics / El nivel cero del razonamiento covariacional en la educación secundaria*. Memorias de PME NA 2020. <https://pmena2020.cinvestav.mx/Portals/pmena2020/Proceedings/PMENA42-BRR-1655990-Jimenez.pdf>
- Piaget, J. (1968:1970). *Estructuralismo*. New York: Basic Books, Inc.

- Ramos, L. I., Jiménez, J. R. (2014). Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. *El cálculo y su enseñanza*, No. 5(1), pp. 111-130. <https://doi.org/10.61174/recacym.v5i1.119>
- Thompson, P. W., Ashbrook, M., y Milner, F. (2019). *Calculus: Newton, Leibniz, and Robinson meet technology*. Retrieved from <http://patthompson.net/ThompsonCalc/>
- Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.