



Razonamiento geométrico en estudiantes de educación media

Roberto **Torres** Peña
Universidad del Magdalena
Colombia
rtorres@unimagdalena.edu.co
Edwin David **Pertuz** Barón
Universidad del Magdalena
Colombia
epertuz@unimagdalena.edu.co
Darwin Dacier **Peña** González
Universidad del Magdalena
Colombia
ddpenag@unimagdalena.edu.co

Resumen

Este trabajo presenta un estudio a cerca del razonamiento matemático manifestado por estudiantes de los grados 9, 10 y 11 de educación secundaria y media en Colombia cuando se enfrentan a resolver un problema geométrico. Se analizaron los resultados obtenidos cinco de cada grado, al resolver una situación que involucra el teorema de Pitágoras. Para comprender los procesos de visualización, razonamiento y construcción, se examinaron las aprehensiones perceptiva, discursiva y operativa en la solución y justificación del problema. Encontrando que la visualización es fundamental en la solución de tareas geométricas, destacando la importancia de fortalecer el razonamiento geométrico en los estudiantes para mejorar sus habilidades en la identificación y resolución de problemas. El estudio evidencia la necesidad de privilegiar la enseñanza de la geometría, enfocada en la resolución de problemas que promuevan procesos coordinados de aprensión para el desarrollo del razonamiento configural por encima de la enseñanza teórica.

Palabras clave: Pensamiento matemático, razonamiento geométrico, razonamiento configural, resolución de problemas y educación media.

Introducción

Definición y relevancia del problema

En el ámbito de la Educación Matemática, se ha identificado un desfase significativo entre las expectativas curriculares en geometría y las capacidades reales de los estudiantes para visualizar, razonar y argumentar a partir de representaciones geométricas. Esta brecha no solo obstaculiza el aprendizaje de conceptos fundamentales, sino que también limita el desarrollo del pensamiento matemático en niveles más complejos. A pesar de los avances en la inclusión de la visualización como práctica didáctica y objeto de estudio, persisten importantes desafíos en cuanto a su integración efectiva en las aulas escolares y en la formación de los estudiantes.

Dentro de este panorama, el razonamiento geométrico basado en representaciones visuales emerge como un campo de interés prioritario. Diversos estudios han señalado que la comprensión profunda de conceptos geométricos requiere no solo del uso de representaciones, sino también de la capacidad de establecer relaciones entre ellas y de realizar transformaciones cognitivas que permitan la aprehensión significativa de los objetos matemáticos.

Este trabajo se centra en el análisis de dichas capacidades a través de un caso concreto: la comprensión y argumentación en torno al teorema de Pitágoras, como contenido paradigmático en la enseñanza de la geometría en la educación básica y media.

Estado del arte

La literatura en Educación Matemática ha documentado ampliamente la importancia de la visualización en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Autores como Duval (1993, 2006) han señalado que la comprensión de objetos matemáticos no puede prescindir de la movilización de diferentes registros de representación, siendo el registro visual uno de los más relevantes en geometría.

Diversas investigaciones han resaltado que, aunque los estudiantes suelen usar imágenes, muchas veces estas no contribuyen a la construcción de significados matemáticos sólidos (Presmeg, 2006; Arzarello et al., 2008). Ello se debe, en parte, a la falta de trabajo sistemático sobre las formas de razonamiento que permiten "leer" y transformar representaciones visuales de modo significativo.

En este contexto, los estudios sobre el razonamiento configuracional (Torregrosa, Quesada y Penalva, 2013) ofrecen una vía prometedora para comprender cómo los estudiantes construyen significados a partir de la organización de las figuras y relaciones espaciales en una tarea geométrica. El teorema de Pitágoras, por su riqueza visual y su presencia transversal en el currículo, se presenta como un contenido adecuado para explorar estas dimensiones.

Referentes teóricos

El marco teórico de este estudio se articula a partir de dos enfoques complementarios: la teoría de los registros de representación semiótica de Raymond Duval y el modelo de

razonamiento configuracional propuesto por Torregrosa, Quesada y Penalva. Esta combinación permite abordar de manera integrada tanto los procesos cognitivos implicados en la visualización geométrica como la naturaleza del razonamiento que se genera a partir de las configuraciones visuales.

Según Duval (1993, 2006), comprender un objeto matemático requiere movilizar distintos registros de representación semiótica, entre ellos el visual, el verbal y el simbólico. La visualización, en este contexto, no es un simple apoyo didáctico, sino un proceso fundamental que permite acceder a aspectos del objeto que no serían evidentes en otros registros.

Un elemento central en esta teoría es la noción de *aprehensión*, entendida como la forma en que el sujeto construye sentido a partir de una representación. Duval distingue tres tipos principales de *aprehensión*:

Aprehensión perceptiva: ligada a la captación inmediata de las formas visuales.

Aprehensión discursiva: mediada por el lenguaje y las inferencias verbales.

Aprehensión operativa: relacionada con la manipulación mental de las figuras, como transformaciones, desplazamientos o reorganizaciones.

Estas *aprehensiones* se movilizan de manera interdependiente durante la resolución de tareas geométricas, y su adecuada articulación es clave para el desarrollo del pensamiento matemático visual.

El modelo de razonamiento configuracional (Torregrosa, Quesada y Penalva, 2013) aporta una perspectiva centrada en la manera en que los estudiantes establecen relaciones entre elementos visuales dentro de una figura para construir argumentos geométricos. Este modelo considera que: Las configuraciones visuales no son solo dibujos, sino estructuras organizadas que permiten deducir propiedades o relaciones. El razonamiento se produce a partir de la identificación, construcción y transformación de dichas configuraciones. Este tipo de razonamiento es especialmente relevante en contextos donde la demostración formal no es todavía accesible para los estudiantes, pero donde se espera de ellos una justificación argumentada.

La combinación de este modelo con la teoría de Duval permite enriquecer el análisis de las producciones estudiantiles, considerando tanto la naturaleza de las representaciones utilizadas como los procesos de razonamiento que estas desencadenan.

La visualización ha sido objeto de creciente interés en la investigación en didáctica de la Matemática. Estudios como los de Presmeg (2006) y Arcavi (2003) destacan la ambivalencia de la visualización: puede facilitar el acceso al significado, pero también inducir errores si no se vincula a procesos de verificación y argumentación. En esta línea, se ha propuesto trabajar con tareas que promuevan la exploración activa de configuraciones visuales, favoreciendo la transición desde una *aprehensión perceptiva* hacia formas más estructuradas de razonamiento.

El estudio subraya la importancia de la visualización en el desarrollo de actividades geométricas. Según investigaciones recientes, las experiencias prácticas y el uso de manipulativos concretos y virtuales pueden mejorar significativamente el rendimiento en la

resolución de problemas geométricos al reducir la carga cognitiva y facilitar la comprensión (Shi et al., 2023; Ponte et al. 2023). La integración de estas herramientas en el aula puede promover una mejor comprensión de conceptos geométricos complejos y mejorar las habilidades de razonamiento geométrico.

Con este estudio busca dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué tipos de aprehensión y configuraciones visuales emergen en estudiantes al trabajar con tareas sobre el teorema de Pitágoras?

¿Qué características presentan los procesos de razonamiento configuracional desarrollados por los estudiantes en estas tareas?

Método y desarrollo

El estudio emplea un diseño comparativo cualitativo que se centra en el análisis de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de los grados 9, 10 y 11. El objetivo principal es evaluar cómo estos estudiantes desarrollan y coordinan los procesos de visualización, razonamiento y construcción en la resolución de problemas geométricos, y cómo estas habilidades reflejan sus aprehensiones perceptiva, discursiva y operativa.

El estudio se realizó con quince estudiantes de una institución educativa, divididos equitativamente en tres grupos de cinco estudiantes cada uno, correspondientes a los grados 9, 10 y 11. La selección de los participantes se realizó de manera intencionada (Menéndez y Rodríguez, 2012) con el único criterio de haber cursado Geometría y tener voluntad para participar de la investigación.

Para la evaluación se aplicó un problema geométrico específico en el que el teorema de Pitágoras estaba implícitamente involucrado. El problema fue formulado de tal manera que los estudiantes debían identificar la configuración geométrica subyacente para poder resolverlo correctamente. Este problema fue seleccionado debido a su capacidad para involucrar los tres procesos cognitivos descritos por Duval (1998): visualización, construcción y razonamiento.

Para garantizar la validez del problema planteado, se llevó a cabo un proceso de validación cualitativa mediante juicio de expertos. Se consultaron cuatro docentes investigadores con experiencia en didáctica de las Matemáticas, quienes evaluaron: La pertinencia del diseño con relación al objetivo de evidenciar las aprehensiones cognitivas, la adecuación del nivel de dificultad al grado escolar, la claridad y coherencia del enunciado y el potencial de la tarea para fomentar razonamiento visual y argumentación. las observaciones de los expertos fueron integradas mediante ajustes en el lenguaje de los enunciados, la progresión de dificultad y la inclusión de representaciones más sugerentes en las configuraciones visuales.

Los estudiantes recibieron el problema en un ambiente controlado y tuvieron el tiempo necesario para resolverlo. Durante la resolución, se les permitió utilizar herramientas de dibujo y escribir sus procesos de razonamiento y soluciones de manera detallada. Luego, se recopilieron las soluciones escritas de los estudiantes, así como cualquier dibujo o esquema que hubieran

realizado, adicionalmente, se realizaron entrevistas breves a algunos estudiantes seleccionados para obtener una comprensión más profunda de sus procesos de pensamiento y estrategias utilizadas.

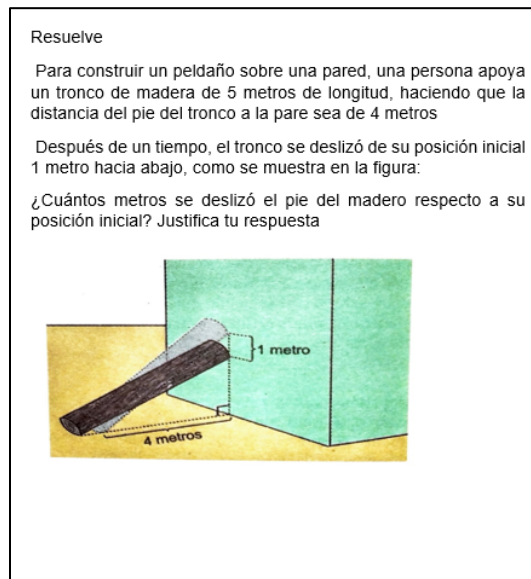


Figura 1 . Ilustración de la situación problema

Las soluciones escritas y los esquemas se analizan para identificar y categorizar los diferentes procesos de visualización, construcción y razonamiento empleados por los estudiantes en la solución del problema. Este análisis se basó en el modelo teórico de Duval (1998) y en los conceptos de aprehensión perceptiva, discursiva y operativa.

En cuanto a los procesos de aprehensión perceptiva, se evaluó cómo los estudiantes reconocieron y extrajeron información visual relevante de la configuración geométrica presentada en el problema. Para la aprehensión discursiva, se analizó la capacidad de los estudiantes para asociar la configuración geométrica identificada con afirmaciones matemáticas pertinentes, describiendo y justificando sus razonamientos. Por último, para los procesos de aprehensión operativa, se examinó la habilidad de los estudiantes para manipular mentalmente las figuras geométricas, realizar construcciones y transformaciones, y aplicar conceptos teóricos para resolver el problema.

Una vez analizados los procesos de aprehensión se compararon los resultados obtenidos por los estudiantes de los tres grados para identificar diferencias y similitudes en sus niveles de razonamiento geométrico y en su capacidad para coordinar los diferentes tipos de aprehensión. El análisis se sustentó en diferentes teorías y modelos educativos y cognitivos, principalmente en las aportaciones de Duval (1998) y las investigaciones de Torregrosa, Quesada y Penalva (2010).

Como parte del proceso de indagación sobre las aprehensiones y formas de razonamiento movilizadas por los estudiantes, se realizaron entrevistas breves de tipo semiestructurado a 9 de los 15 participantes luego de completar las tareas. Estas entrevistas se diseñaron con el propósito de explorar más a fondo los significados atribuidos por los estudiantes a las configuraciones visuales y las estrategias cognitivas utilizadas en su resolución.

Las entrevistas fueron transcritas y codificadas, utilizando las mismas categorías teóricas que guiaron el análisis de las producciones escritas. En particular, se buscaron indicios de: Aprehensión perceptiva, Aprehensión discursiva y Aprehensión operativa.

Estas entrevistas se integraron al análisis, contrastando los datos escritos y orales para enriquecer la comprensión de los procesos involucrados y validar las interpretaciones realizadas. En los resultados, se incorporan citas y fragmentos relevantes de las entrevistas para ilustrar patrones y matices identificados en las respuestas.

Resultados y discusión

Los resultados revelaron un desfase significativo entre las expectativas curriculares y las capacidades reales de los estudiantes para resolver problemas geométricos. La visualización emergió como un componente crítico en el desarrollo del razonamiento geométrico, destacando la necesidad de fortalecer esta habilidad en los estudiantes. Los análisis de aprehensión perceptiva, discursiva y operativa proporcionaron una visión detallada de los procesos cognitivos implicados y las áreas que requieren mayor atención y mejora en la enseñanza de la geometría.

A continuación, resultados obtenidos por los estudiantes

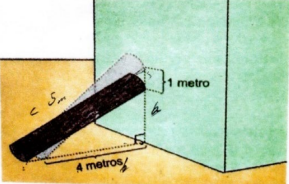


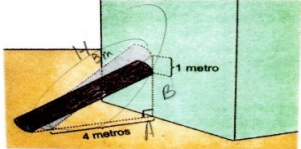
Diagrama de un tronco de madera de 5 metros apoyado contra una pared. El pie del tronco está a 4 metros de la pared. Se indica un desplazamiento de 1 metro hacia abajo.

$a^2 + b^2 = c^2$
 $4^2 + b^2 = 5^2$
 $16 + b^2 = 25$
 $b^2 = 25 - 16$
 $b^2 = 9$
 $b = 3$

Para construir un peldaño sobre una pared, una persona apoya un tronco de madera de 5 metros de longitud, haciendo que la distancia del pie del tronco a la pared sea de 4 metros.

Después de un tiempo, el tronco se deslizó de su posición inicial 1 metro hacia abajo, como se muestra en la figura:

¿Cuántos metros se deslizó el pie del madero respecto a su posición inicial? Justifica tu respuesta.



$C^2 = A^2 + B^2 \rightarrow B = \sqrt{C^2 - A^2}$
 $B = \sqrt{5^2 - 4^2}$
 $B = \sqrt{25 - 16} \rightarrow \sqrt{9} = 3$

Figura 2: A manera de ejemplo, se muestran respuestas presentadas por algunos estudiantes.

En la primera imagen, el estudiante identifica correctamente el objeto geométrico inmerso en la situación (triángulo rectángulo), extrae la información relevante (longitudes de los catetos) y procede a realizar una representación gráfica. Relaciona este triángulo con el teorema de Pitágoras y realiza los cálculos pertinentes, demostrando la presencia de aprehensión perceptiva y discursiva. Sin embargo, el estudiante no logra reconfigurar la situación inicial para aplicar adecuadamente el teorema y resolver el problema, lo que indica una dificultad en la aprehensión operativa, en detalle:

El estudiante identifica el objeto geométrico inmerso en la situación planteada (Aprehensión Perceptiva): una escalera apoyada contra una pared formando un triángulo rectángulo. Este reconocimiento es un claro ejemplo de aprehensión perceptiva, donde el estudiante observa y extrae información visual relevante de la figura. La identificación del triángulo rectángulo y sus componentes (los catetos y la hipotenusa) demuestra que el estudiante

puede percibir y conceptualizar figuras geométricas en un contexto práctico (Duval, 1998). El siguiente paso del estudiante es realizar una representación gráfica del triángulo rectángulo y relacionarlo con el teorema de Pitágoras. Este proceso implica la aprehensión discursiva, donde el estudiante asocia la configuración geométrica identificada con afirmaciones matemáticas pertinentes. El uso de la fórmula del teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$ para relacionar los lados del triángulo (donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa) muestra que el estudiante puede articular y justificar matemáticamente la relación entre los elementos geométricos (Duval, 1998). A pesar de la correcta identificación y representación de la figura geométrica, el estudiante enfrenta dificultades al intentar aplicar operativamente el teorema de Pitágoras para resolver el problema (Aprehensión Operativa). Aunque realiza los cálculos algebraicos relacionados con $a^2 + b^2 = c^2$, los resultados indican que no puede llegar a una solución satisfactoria.

Este "bucle" descrito por Torregrosa y Quesada (2010) evidencia la necesidad de fortalecer la capacidad de los estudiantes para pasar de la comprensión discursiva a la operativa en la resolución de problemas geométricos. Las respuestas del estudiante indican un desfase entre lo que los estudiantes deberían resolver y lo que realmente pueden resolver, destacando la necesidad de fortalecer el razonamiento geométrico en los estudiantes. Esta brecha puede abordarse mediante el uso de estrategias pedagógicas que fomenten la visualización y la manipulación de objetos geométricos, así como la implementación de preguntas orientadoras que promuevan el uso apropiado del lenguaje matemático y la argumentación (Clements, 2020).

Los resultados refuerzan la idea de que la enseñanza de la geometría debe enfocarse no solo en la transmisión de conocimientos teóricos, sino también en el desarrollo de habilidades de visualización y argumentación matemática, como sugieren estudios recientes en el campo de la Educación Matemática (Shi et al., 2023). Además, destaca la importancia de proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permitan coordinar de manera efectiva las diferentes aprehensiones necesarias para resolver problemas geométricos complejos.

A continuación, se presentan los hallazgos organizados en torno a tres ejes: (1) análisis comparativo entre niveles escolares; (2) dificultades comunes en la coordinación de aprehensiones; y (3) aportes de las entrevistas breves a la comprensión de los procesos cognitivos.

Grado	Aprehensión perceptiva	Aprehensión discursiva	Aprehensión operativa	Observaciones
9º	Realizan el proceso de visualización, asocian un concepto a la situación planteada	Identifican el teorema, pero no justifican.	No aplican correctamente el teorema	Dificultades en traducir representaciones a operaciones.
10º	logran visualizar la figura presente en la situación y la asocian a un concepto matemático	Enuncian el teorema, pero con errores en el uso algebraico	Inician el procedimiento, pero no lo finalizan con éxito	Mejora en identificación y representación, pero aún falta articulación.
11º	Realizan el proceso de visualización, asocian la situación planteada con una figura geométrica y esta a su vez con un concepto	Utiliza el teorema de Pitágoras dejando ver que identifican las variables que lo conforman y lo que se necesita para aplicarlo.	Aplican el teorema, pero cometen errores numéricos o de interpretación del contexto	Se observan avances, pero persisten vacíos en la articulación completa.

Esta tabla resume el proceso progresivo de mejora en la articulación entre aprehensiones a lo largo de los grados, aunque aún en 11º se identifican “bloqueos” operativos, como lo describen Torregrosa, Quesada y Penalva (2010), que limitan el paso efectivo de la aprehensión discursiva a la operativa.

Conclusiones

El estudio revela que, aunque los estudiantes de los grados 9, 10 y 11 tienen la capacidad de identificar elementos geométricos básicos y aplicar teorías como el teorema de Pitágoras, existen notables diferencias en su habilidad para coordinar aprehensiones perceptivas, discursivas y operativas. La visualización se destaca como un componente esencial en el desarrollo de habilidades geométricas, y se observó que los estudiantes con mayor capacidad de visualización tienden a tener un mejor desempeño en la resolución de problemas geométricos.

El desfase entre lo que los estudiantes deberían ser capaces de resolver y lo que realmente pueden resolver pone en evidencia la necesidad de fortalecer el razonamiento geométrico en la educación secundaria. Las habilidades de razonamiento configural, esenciales para la resolución de problemas geométricos complejos, aún no están completamente desarrolladas en muchos estudiantes, lo que sugiere una deficiencia en la metodología de enseñanza actual.

Fomentar el uso del lenguaje matemático y la argumentación en las aulas para mejorar la aprehensión discursiva y operativa de los estudiantes y adaptar las actividades educativas para atender las necesidades individuales de los estudiantes, reconociendo las diversas formas en las que perciben y comprenden los problemas geométricos.

Es importante reconocer que la muestra utilizada en este estudio es reducida, compuesta por 15 estudiantes de tres grados escolares distintos. Este tamaño limitado puede restringir la transferibilidad de los hallazgos a poblaciones más amplias o contextos educativos diferentes. Por tanto, si bien los resultados aportan un análisis detallado y valioso sobre los procesos de razonamiento geométrico y coordinación de aprehensiones, deben interpretarse con cautela. Se recomienda que futuras investigaciones amplíen la muestra y consideren una mayor diversidad de contextos para validar y generalizar las conclusiones obtenidas.

Referencias y bibliografía

- Duval, R. Geometrical pictures: kinds of representation and specific processes. In: Sutherland, R.; Mason, J. (Ed.). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education*. Berlin: Ed. Springer, 1995. p. 142-157.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Springer.
- Duval, R. (1999). Representation, vision, and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*, 3-26.
- Menéndez, M., & Rodríguez, M. (2012). El análisis de contenido como técnica de investigación cualitativa. En M. Menéndez & M. Rodríguez (Eds.), *Metodología de la investigación cualitativa* (pp. 15-34). Madrid: McGraw-Hill.
- Torregrosa, G., & Quesada, A. (2007). El razonamiento configural en geometría. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 79-90.

- Torregrosa, G., Quesada, A., & Penalva, A. (2010). Razonamiento configural y aprehensión operativa en geometría. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(1), 9-26.
- Ponte, R., Viseu, F., Neto, V, Aires, A., (2023). Revisiting manipulatives in the learning of geometric figures. *Frontiers in Education*.
- Shi, Licheng & Dong, Linwei & Zhao, Weikun & Tan, Dingliang. (2023). Improving middle school students' geometry problem solving ability through hands-on experience: An fNIRS study. *Frontiers in Psychology*. 14. 1126047. 10.3389/fpsyg.2023.1126047.