Aprendiendo las coordenadas polares con GeoGebra

José Luis **Henostroza** Gamboa
Pontificia Universidad Católica del Perú / Sociedad Peruana de Educación Matemática
Perú
jhenost@pucp.pe

Resumen

El tema de coordenadas polares se estudia por primera vez en el curso de Cálculo Integral, tercer semestre de Estudios Generales Ciencias en nuestra universidad. Se introduce el tema de coordenadas polares para luego resolver problemas de recta tangente, área de regiones y longitud de curvas polares haciendo uso del cálculo diferencial e integral. Con la finalidad de que los estudiantes aprendan este tema que es nuevo para la mayoría, les proponemos actividades de exploración, descubrimiento, análisis y síntesis con ayuda del software GeoGebra. El objetivo del presente taller es analizar con los participantes un conjunto de actividades guiadas, dirigidas a estudiantes universitarios, las cuales buscan propiciar la exploración, descubrimiento y análisis de situaciones en el sistema de coordenadas polares, con apoyo de GeoGebra. Proponemos también un espacio de reflexión con los participantes acerca de cómo trabajamos con nuestros estudiantes el tema de coordenadas polares desde las características propias de cada universidad.

Palabras clave: Cálculo integral; Coordenadas polares; Educación Matemática; Educación para jóvenes; Educación superior; Enseñanza presencial; GeoGebra.

Introducción

La educación superior en cualquier país necesita responder a las demandas sociales que inciden directamente en la educación de los futuros ciudadanos en general. En el documento Modelo Educativo PUCP (2023) se resalta que la sociedad de la información principalmente demanda un cambio en el paradigma educativo. Pasar de la transmisión de conocimientos a la formación de profesionales mediante el fomento del aprendizaje autónomo, autodirigido, significativo y constructivo.

Dicho modelo educativo (PUCP) responde a factores que influyen en la educación universitaria, prácticamente a nivel mundial. En Rosaura, Martínez y Valladares, por ejemplo, se resalta que los futuros profesionales en el mundo actual necesitan desarrollar y fortalecer competencias para analizar y resolver problemas, tomar decisiones bien pensadas en un mundo en constante cambio, comunicarse de manera efectiva, aprender permanentemente y hacer uso eficaz de las TIC en su medio familiar y laboral.

Bennasar-García, M., Guerrero, J., y Zambrano-Leal, N. sugieren que los docentes, en particular en el contexto universitario latinoamericano, deben estar preparados y actualizados en métodos, recursos idóneos para los temas de su especialidad, y en instrumentos para la evaluación justa, objetiva de los aprendizajes de sus estudiantes.

Respecto al tema de coordenadas polares, Vicent, R., Granado, F., Pariche, Anner señalan que, en general, dicho tema suele obviarse en la enseñanza o abordarse tangencialmente. En algunos contextos universitarios, el tema de coordenadas polares se desarrolla en cursos de precálculo. En otros, como la PUCP, el tema está inmerso en el curso de Cálculo Integral. Es un tema nuevo para la mayoría de alumnos y con mucha información para procesar e integrar en un tiempo corto. Estas consideraciones nos motivan a proponer el presente taller, donde será importante el intercambio de experiencias entre todos acerca de cómo facilitar el aprendizaje de las coordenadas polares en los estudiantes.

Definición y relevancia del tema a desarrollar en el taller

Los cursos de cálculo integral en la formación científica básica de los estudiantes que se orientan a las ciencias e ingeniería tienen como tema central el concepto de integral definida. Luego se trabajan diversos métodos para calcular integrales definidas y algunas aplicaciones geométricas y físicas. Por ello, los estudiantes necesitan estar familiarizados con el sistema de coordenadas polares, las semejanzas y diferencias con el sistema cartesiano y el comportamiento algebraico y gráfico de las ecuaciones en coordenadas polares. Esto es necesario para el planteo correcto de las integrales que permitan calcular áreas y longitudes.

Considerando estos factores optamos en la PUCP por una metodología de enseñanza-aprendizaje que posibilite que los estudiantes se familiaricen de modo activo y en poco tiempo con las curvas polares de uso más frecuente en el cálculo integral. Esta metodología combina método expositivo participativo, uso de herramientas visuales y lo que es más importante: actividades de exploración y descubrimiento para el estudiante, donde interactúe con el software GeoGebra. El propósito general del taller es presentar estas actividades a los participantes, analizarlas y dialogar acerca de su efectividad y de cómo mejorarlas o adaptarlas el contexto de trabajo de cada colega.

Referencial teórico

Elementos conceptuales acerca de coordenadas polares

La teoría fundamental sobre coordenadas polares se presenta en textos de Precálculo. En Stewart (2004) por ejemplo leemos acerca del sistema de coordenadas polares, ubicación de puntos en el plano, ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares de un mismo punto. La diferencia fundamental entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares radica en que un punto que se representa en coordenadas polares como (r, θ) puede representarse algebraicamente de infinitas maneras, dadas por $((-1)^n\, r\, , \theta + n\, \pi)$, para cualquier número entero n. Este hecho trae como consecuencia que una ecuación en coordenadas polares, digamos de la forma $E(r, \theta) = 0$ pueda escribirse en la forma $E((-1)^n r, \theta + n\pi) = 0$, para *n* entero. De este modo, ecuaciones algebraicamente distintas en coordenadas polares pueden resultar equivalentes.

Uso de recursos informáticos en la educación matemática

La producción e incorporación de las llamadas tecnologías de información y comunicación tiene ya un historial importante, y hoy en día todos nosotros somos en mayor o menor grado parte de ese historial. Sánchez Ilabaca (1993) nos presenta una clasificación interesante de los recursos informáticos existentes en ese entonces. Muchos de ellos siguen vigentes, pero han evolucionado en versiones, potencialidades y presentación para ser más accesibles y más atractivos para los usuarios.

En este devenir histórico, las TIC no podían quedar al margen de los procesos de enseñanza y aprendizaje en los distintos niveles educativos, y en particular, en la educación matemática. Quienes estamos vinculados con la enseñanza somos protagonistas de esta historia. Como todo en la vida, el uso de los recursos informáticos tuvo y tendrá siempre ventajas, desventajas, peligros, dudas. García, et al. (1995) a este respecto sugiere a los maestros que conviertan a las calculadoras gráficas, hojas de cálculo, recursos multimedia, software educativo, recursos de internet en herramientas para potenciar las competencias en sus estudiantes mediante la visualización, la propuesta de actividades no rutinarias que fomenten el sentido crítico y especialmente la construcción de conocimientos por descubrimiento.

Es importante mencionar que las TIC bien usadas deben estar al alcance de todos, atender a la diversidad. Lucy Barquero (1996) nos da ejemplo de ello al tratar acerca de la computación como medio de apoyo en el aprendizaje de la población con discapacidad, en Costa Rica.

GeoGebra y su uso en la educación matemática

GeoGebra es un software libre, de geometría dinámica, que por esta característica facilita la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, el álgebra, y también estadística, probabilidades y cálculo.

Carrillo (2011) resalta que las versiones más recientes del software se adaptan prácticamente a cualquier tema de matemáticas en secundaria, bachillerato y superior, pero también señala que ya existe una versión pensada en el apoyo para primaria.

Castellanos (2010) resalta que la característica dinámica de GeoGebra posibilita que los estudiantes interactúen con los objetos geométricos para manipularlos, construir relaciones, formular conjeturas respecto a sus construcciones, repetir los procesos cuantas veces lo necesiten, cambiar la apariencia de los objetos geométricos.

Como profundización de esta idea, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2015) afirma que el software en general es una ayuda tecnológica para que el estudiante aprenda, les dé sentido a las ideas matemáticas, razone y comunique a otros su pensamiento matemático.

Con estas ideas trabajamos el tema de coordenadas polares en el curso de Cálculo Integral para alumnos del tercer ciclo de estudios conducentes a carreras de ciencias e ingeniería del siguiente modo: Se dispone de 8 horas cronológicas distribuidas en cuatro clases de dos horas para el tema. En las primeras dos horas el docente presenta el sistema de coordenadas polares, sus características, relaciones con el sistema cartesiano, aspectos generales de las ecuaciones en coordenadas polares. La exposición se apoya con el uso de GeoGebra y de paso los estudiantes aprenden a configurarlo para coordenadas polares.

Durante el fin de semana antes de la siguiente clase los estudiantes deben trabajar con las actividades que analizaremos en el presente taller. La finalidad de estas actividades es que el estudiante mediante la exploración generalice y obtenga conclusiones acerca de las curvas más usadas en coordenadas polares como las rosas, caracoles y lemniscatas. Si bien los estudiantes pueden interactuar entre sí, cada uno de ellos, de manera individual, deberá subir en el repositorio del curso sus conclusiones de las primeras cinco actividades, para que el docente las analice.

En la siguiente sesión de dos horas los estudiantes se organizan en grupos de cuatro integrantes cada uno, dialogan acerca de las conclusiones obtenidas por cada uno y elaboran una síntesis de conclusiones grupales. Dos o tres grupos voluntariamente pueden exponer esas conclusiones a todo el salón. El profesor valida o afina según sea en caso dichas conclusiones. Ya teniendo claro el comportamiento de las curvas polares tipo rosa los estudiantes divididos en los mismos grupos responden la siguiente actividad donde las indicaciones son más generales y se requiere que acuerden una estrategia y luego organicen la información obtenida por cada uno para obtener conclusiones como grupo.

Con todo ello, en la siguiente clase podemos abordar problemas de área de regiones o longitudes de curvas conocidas. En caso de curvas que no son conocidas, por lo general brindamos una gráfica sin ejes para que los estudiantes ubiquen el polo y los ejes, siempre con el apoyo de GeoGebra si lo necesitan, y de sus capacidades en trigonometría especialmente.

Estrategia para desarrollar el taller

En concordancia con todo lo presentado hasta el momento, proponemos a los participantes la ejecución y el análisis de las actividades utilizadas con los alumnos. Se espera el diálogo acerca de su pertinencia, experiencias similares que desarrollen los participantes, sugerencias para su mejoramiento. Se espera que, al socializar estas actividades con colegas de otros contextos (docentes universitarios, de bachillerato o en general quien tenga interés en este taller) todos podamos obtener insumos específicos y pertinentes que permitan mejorar las herramientas didácticas para que estas sean cada vez más efectivas para el aprendizaje de los estudiantes.

Proponemos distribuir el tiempo disponible para el taller del siguiente modo: Presentación del tema del taller, la dinámica de su desarrollo y resolución conjunta de la Actividad 1 (20 minutos). Desarrollo y análisis individual de las actividades propuestas (30 minutos). Diálogo en parejas (20 minutos). Conversatorio (40 minutos). Si alguien necesita alguna ayuda acerca del manejo del GeoGebra, entre todos podemos ayudarnos.

Actividad 1: ¿Para qué coordenadas polares? ¿No es suficiente lo que inventó Descartes?

Varios autores, como por ejemplo Vincent, et al. (2016) justifican la presencia del tema de coordenadas polares en el currículo universitario porque este sistema hace más sencillo el estudio de curvas que en coordenadas cartesianas no se pueden analizar. Y además (por ejemplo, en nuestro curso posterior de Cálculo en varias variables) agregamos otros sistemas como coordenadas paramétricas, cilíndricas y esféricas. La primera actividad es un problema de lugar geométrico, cuya respuesta es una de estas curvas.

Actividad 1: ¿No son suficientes las coordenadas cartesianas?

Resolvamos el siguiente problema: Un segmento $\overline{AB}$ de longitud 8cm tiene su extremo A en el eje x y su extremo B en el eje y. Si dichos extremos se deslizan sobre sus ejes, halle la ecuación del lugar geométrico que describe el pie de la perpendicular trazada desde (0,0) al segmento.

Figura 1. Actividad 1.

Con los participantes del taller resolveremos el problema y visualizaremos en GeoGebra el lugar geométrico. Su ecuación es $(x^2 + y^2)^3 = 64x^2y^2$ en cartesianas y $r = 4sen(2\theta)$ en polares.

Actividad 2: Graficamos una curva polar

En concordancia con las ideas que subyacen a esta propuesta, estimulamos al estudiante a que explore, manipule, investigue, anote sus conclusiones y las comparta. Solo tiene que seguir las indicaciones que se le dan como guía en este camino.

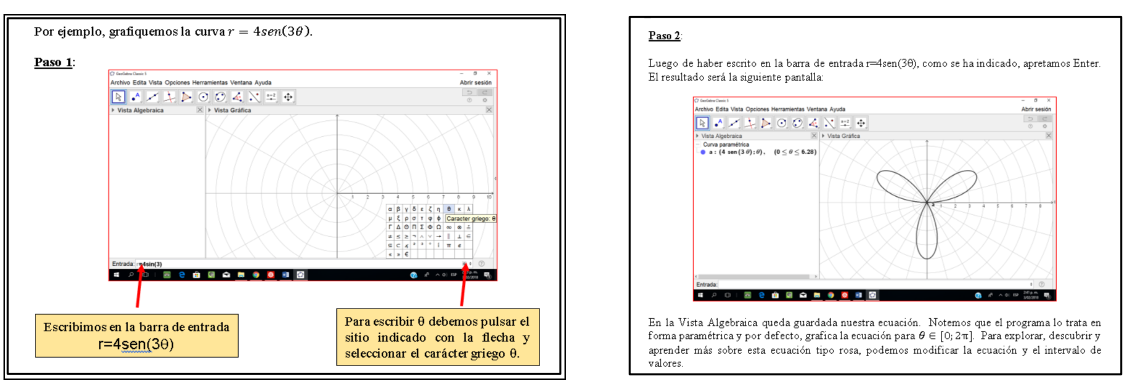

Figura 2. Actividad 2.

Actividad 3: Conocemos más de cerca las variables r y θ

El objetivo aquí es que los participantes, poniéndose en el rol de estudiantes, observen la relación entre los valores de θ y la gráfica que obtiene. En el taller reflexionaremos si conviene a los alumnos usar otras herramientas como calculadoras y hojas de cálculo.

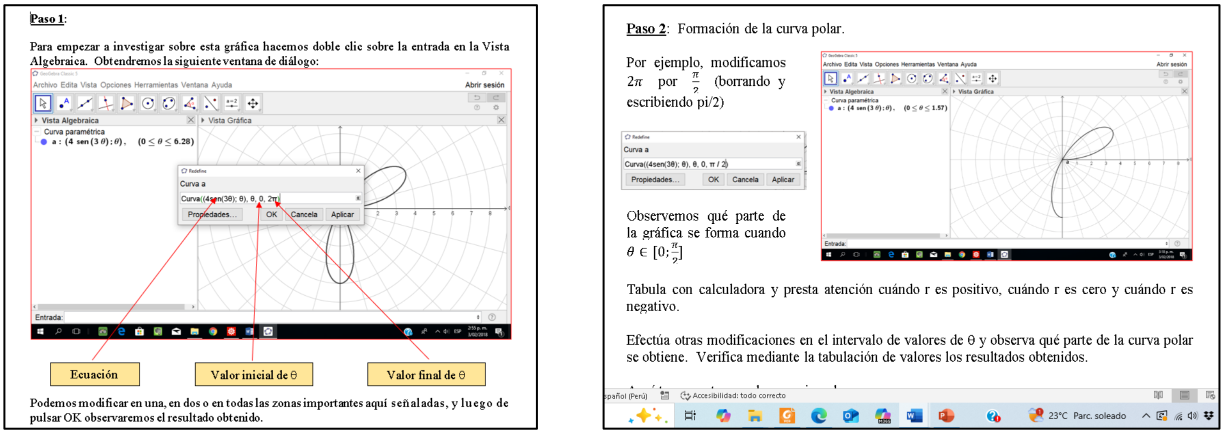

Figura 3. Actividad 3.

Actividad 4: Variaciones en torno al parámetro a en $r = a\,sen(3\theta)$.

Esta actividad tiene como propósito que los participantes (en el rol de estudiantes) descubran por experimentación cómo influye en la forma de la gráfica el valor de a.

- Grafica las curvas: $r = \frac{1}{2}sen(3\theta)$, $r = 6sen(3\theta)$, $r = -4sen(3\theta)$.
- Grafica luego las curvas: $r = \frac{1}{2}cos(3\theta)$, $r = 6cos(3\theta)$, $r = -4cos(3\theta$
- Responde a las siguientes preguntas acerca de las ecuaciones

$$r = a\,sen(3\theta) \text{ y } r = a\,cos(3\theta)$$

1. ¿A cuál de los ejes es simétrica la curva $r = a\,sen(3\theta)$?

____

2. ¿A cuál de los ejes es simétrica la curva $r = a\,cos(3\theta)$?

____

3. ¿Cómo influye $|a|$ en la gráfica?

____

____

4. ¿Hacia donde "apunta" la curva $r = a\,sen(3\theta)$ cuando $a > 0$?

____

5. ¿Hacia donde "apunta" la curva $r = a\,sen(3\theta)$ cuando $a < 0$?

____

6. ¿Hacia donde "apunta" la curva $r = a\,cos(3\theta)$ cuando $a > 0$?

____

7. ¿Hacia donde "apunta" la curva $r = a\,cos(3\theta)$ cuando $a < 0$?

____

Figura 4. Actividad 4, preguntas de exploración.

Actividad 5: Variaciones en torno al parámetro n en $r = 4\,sen(n\theta)$.

En esta actividad el estudiante tiene la oportunidad de utilizar los deslizadores. Esta herramienta permite diferenciar el comportamiento de la gráfica cuando n es entero y cuando n no es entero. Solo el primer caso tiene que ver con curvas polares de uso constante. Se guía al estudiante para configurar el deslizador (por si no lo recuerda).

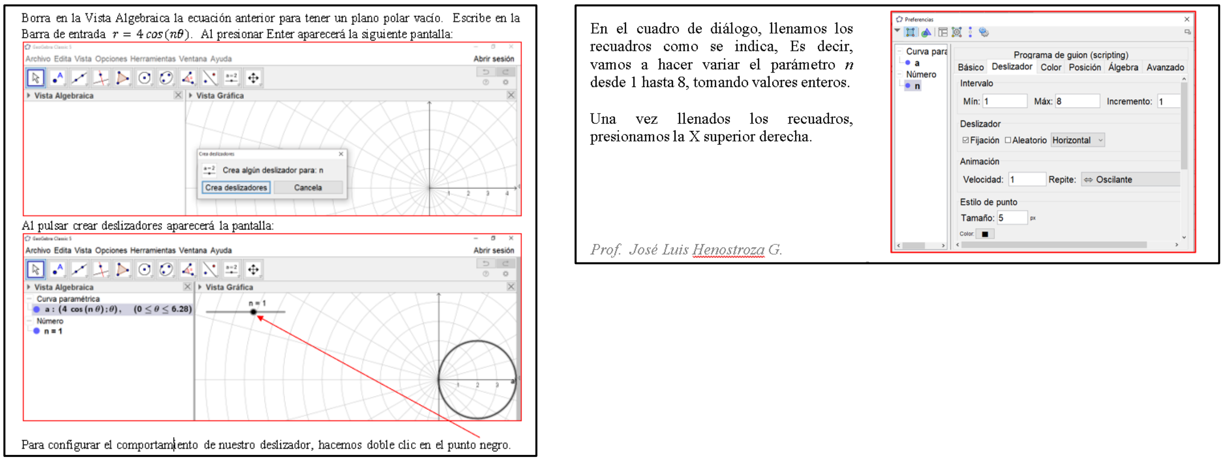

Figura 5. Actividad 5, generar un deslizador y configurar sus opciones.

Se le indica al estudiante en la ficha impresa de la actividad que mueva el deslizador y observe cuántos pétalos tiene la gráfica cuando n es par, cuando n es impar. Que haga el mismo análisis con $r = a\ sen(n\theta)$ usando el mismo deslizador, y que concluya cuáles son las semejanzas y diferencias.

Actividad 6: Conociendo la familia de caracoles en coordenadas polares

Ya teniendo claro el comportamiento de las curvas polares tipo rosa los estudiantes distribuidos en los mismos grupos desarrollarán la siguiente actividad donde las indicaciones son más generales y se requiere que acuerden una estrategia y luego organicen la información obtenida por cada uno para obtener conclusiones como grupo. En el taller los participantes propondrán actividades similares de acuerdo a cómo trabajan con sus estudiantes el tema de coordenadas polares.

Te invitamos a utilizar el Geogebra para explorar las gráficas polares de la forma

$$r = a + bsen(\theta),\ r = a + bcos(\theta),\ \text{con } a > 0,\ b \in \mathbb{R}.$$

<u>Cuestión previa</u>

Como primera tarea obtén las ecuaciones polares equivalentes de

$$r = a + bsen(\theta) \ \text{ y } \ r = a + bcos(\theta)$$

¿Porqué es suficiente considerar solamente $a > 0$?

____

____

Figura 6. Actividad 6, obtener las ecuaciones equivalentes del caracol.

Actividad

Observa las características más saltantes de la gráfica obtenida, luego de dar diversos valores a las constantes a y b. Basta con considerar $a > 0$. Las siguientes preguntas te ayudarán a organizar las conclusiones (que luego compartirás con tu grupo)

1. ¿Cuál es la principal diferencia entre una gráfica "tipo seno" y una gráfica "tipo coseno"?

2. ¿Qué cambio importante observas en ambas gráficas cuando b es positivo y cuando b es negativo?

3. Considera $a > 0$ y $b > 0$ y observa las características de la gráfica según los diversos valores de la razón $\frac{a}{b}$.

Figura 7. Actividad 6, preguntas de exploración.

Referencias y bibliografía

Barquero, Lucy. (1996). La computación como medio de apoyo en el aprendizaje para la población con discapacidad. *Memorias III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa.* https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6873125

Bennasar-García, M., Guerrero, J., y Zambrano-Leal, N. (2021). Pedagogía y formación docente universitaria hoy en Latinoamérica, una visión epistemológica. *Praxis & Saber,* 12(29), e11267. https://doi.org/10.19053/22160159.v12.n29.2021.11267

Carrillo de Albornoz, Agustín. (2010). GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. *Unión, 23,* 201–210. https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/30/28

Castellanos, Idania. (2012). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de II de Magisterio de la E.N.M.P.N.* [tesis de magíster, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán]. Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes. https://www.cervantesvirtual.com/obra/visualizacion-y-razonamiento-en-las-construcciones-geometricas-utilizando-el-software-GeoGebra-con-alumnos-de-ii-de-magisterio-de-la-enmpn/

García, A., Martínez, A., Miñano, R. (1995). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*, 19–28. Síntesis.

National Council of teachers of mathematics. (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. 89–100. México: Editando libros.

Pontificia Universidad Católica del Perú. Modelo Educativo PUCP (2023). 14–37 https://s3.amazonaws.com/files.pucp.edu.pe/homepucp/uploads/2016/08/02171957/Modelo-Educativo-2023-web-2.pdf

Rosaura, R., Martínez, R., y Valladares, L. (2010). *Innovación en la educación superior*. México: FCE.

Sánchez Ilabaca, Jaime. (1993). *Informática educativa.* 91–114. Universitaria.

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2004). *Precálculo*, 650–661. International Thompson Editores.

Vicent, R., Granado, F., Pariche, Anner. (2019, 5–10 de mayo). *Propuesta para la enseñanza/aprendizaje de las coordenadas polares con GeoGebra*. [Comunicación]. V Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Medellín, Colombia. https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/35/267