Un camino alternativo para presentar la propiedad de completitud del sistema de los números reales

Alexandra **Fregueiro**
Consejo de Formación en Educación (CFE)
Uruguay
suresmeralda@hotmail.com
Analía **Bergé**
Université du Québec à Rimouski
Canadá
analia_berge@uqar.ca

Resumen

El sistema de los números reales es el dominio numérico en el cual se desarrollan conceptos y se validan propiedades del Análisis Matemático vinculadas a sucesiones y series numéricas, funciones continuas, funciones derivables y la noción de integrabilidad, entre otros. Estos desarrollos teóricos son posibles en $\mathbb{R}$ y no en $\mathbb{Q}$ debido a una propiedad que distingue a estos dos cuerpos totalmente ordenados: la propiedad de completitud. En este taller, nos proponemos abordar el trabajo con dos actividades pensadas para generar la necesidad e introducir la propiedad de completitud vía la convergencia de las sucesiones monótonas crecientes y acotadas superiormente. Las actividades fueron experimentadas en el marco de una tesis doctoral reciente; serán retomadas en el taller y se analizará su potencial didáctico con los participantes.

Palabras clave: Consejo de Formación en Educación; Educación Matemática; Educación Superior; Enseñanza; Enseñanza del análisis matemático; Formación docente inicial; Investigación educativa; Uruguay.

Introducción

El sistema de los números reales, $\mathbb{R}$, es el sistema numérico en el que se desarrollan conceptos y se validan propiedades del Análisis Matemático, relacionados con sucesiones y series numéricas, funciones continuas, funciones derivables y la idea de integrabilidad, entre otros temas. Estos desarrollos teóricos son posibles en $\mathbb{R}$ y no en el sistema de los números racionales, $\mathbb{Q}$, debido a una propiedad que diferencia a estos dos cuerpos totalmente ordenados: la propiedad de completitud que verifica $\mathbb{R}$ y no $\mathbb{Q}$.

Nos ha interesado investigar hasta qué punto los estudiantes universitarios comprenden por qué estos desarrollos teóricos son viables en $\mathbb{R}$ y no en $\mathbb{Q}$. En particular, en el curso de análisis de variable real del profesorado de Matemáticas en Uruguay, llamado Análisis 1, la propiedad de completitud del sistema de números reales se presenta a través del enunciado que establece que todo subconjunto de números reales, que no esté vacío y esté acotado superiormente, tiene un supremo real, conocido como la propiedad o el axioma del supremo. Existen investigaciones, que se mencionarán en la siguiente sección, que indican que solo una pequeña proporción de estudiantes comprende la noción de supremo. Por lo tanto, deducimos que la comprensión de la propiedad de completitud en el ámbito del análisis matemático se dificulta cuando se introduce a través de la propiedad del supremo. El propósito de este taller es explorar un enfoque alternativo a la propiedad del supremo para presentar la propiedad de completitud del sistema de números reales. Con este propósito hemos diseñado y probado una secuencia de enseñanza y aprendizaje que busca resaltar la importancia de esta propiedad, así como aprovechar su doble función como herramienta (utilizar la noción para resolver ciertos problemas) y objeto de estudio, basándonos en la dialéctica herramienta – objeto propuesto por Douady (1992). Las actividades han mostrado su eficacia en una experimentación en laboratorio en el marco de una tesis doctoral (Fregueiro 2024). En este taller trabajaremos con las dos primeras actividades de esta secuencia que buscan explorar otro camino para introducir la propiedad de completitud del sistema real en la formación de futuros profesores de Matemática (Fregueiro y Bergé 2024).

Estado del arte

Para abordar la enseñanza y el aprendizaje de la completitud de $\mathbb{R}$ como un problema, es fundamental distanciarse de esta noción y comprender cómo, por qué y en qué contexto se hizo necesaria en el ámbito matemático. Nos basamos en el trabajo de Bergé y Sessa (2003), quienes identifican tres estados epistemológicos de la propiedad de completitud a lo largo de la historia de las Matemáticas: como un atributo implícito, como un atributo explícito que se acepta de manera natural, y como una propiedad que es explícita y demostrable. Este recorrido histórico nos ayuda a entender qué problemas resuelve la completitud, su relevancia en la construcción de conocimientos matemáticos en Análisis, y la insuficiencia de los números racionales para abordar ciertos problemas. La convergencia de sucesiones monótonas y acotadas, así como el teorema del valor intermedio (o Teorema de Bolzano), son ejemplos de la necesidad de formalizar esta propiedad a principios del siglo XIX. Los problemas que requieren la completitud están relacionados con la creación de pruebas formales que aseguran la existencia de elementos en el sistema numérico real, muchas de las cuales son evidentes desde una perspectiva gráfica. La propiedad de completitud es esencial para fundamentar el Análisis y para resolver problemas de existencia, como límites, raíces de funciones o intersecciones de intervalos.

En cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de la completitud, hemos observado que diversas investigaciones abordan temas relacionados, ya sea de manera directa o indirecta. Los estudios de Bergé (2016, 2008), Acevedo (2011) y Bills y Tall (1998) nos brindan información sobre las ideas que los estudiantes construyen cuando se presenta la completitud en cursos iniciales de Análisis a partir del Axioma del supremo; el tipo de trabajo en el aula descrito en estos estudios es similar al de los cursos de Análisis 1 del profesorado uruguayo. De estos trabajos se deduce que este enfoque genera una visión naturalizada de la propiedad, lo que no parece ayudar a los estudiantes a utilizar la completitud como una herramienta explícita. Las actividades y preguntas planteadas en estas investigaciones sugieren que los cursos típicos de Análisis tienden a tratar el supremo de manera aislada, sin vincularlo a contextos específicos y enfocándose en analizar sus propiedades, sin hacer evidente la necesidad de su existencia. Interpretamos que presentar la completitud a través del concepto de supremo no facilita que los estudiantes puedan aplicar esta propiedad en la demostración de otras propiedades o en la definición de otros conceptos matemáticos. Esto bloquea el acceso a la completitud, y en el mejor de los casos, los alumnos solo retienen la definición formal de supremo y la demostración de propiedades generales de los supremos de subconjuntos de números reales.

Existen investigaciones que evidencian las dificultades que los estudiantes pueden enfrentar al conceptualizar la noción de supremo. Algunas de estas dificultades están relacionadas con la comprensión de las estructuras, objetos y relaciones lógicas involucradas en la construcción de su definición formal (Chellougui, 2016), así como con la realización de ejercicios para determinar y justificar la existencia de cotas superiores, inferiores, supremos e ínfimos de conjuntos dados (Sari et al., 2018; Hernández & Trigueros, 2012). Las actividades y preguntas propuestas en estas investigaciones nos llevan a concluir que en los cursos típicos de Análisis se da un tratamiento objetual a la noción de supremo, sin hacer explícita la necesidad de su existencia.

A partir de la reflexión sobre lo expuesto, decidimos desarrollar una propuesta de enseñanza para introducir la propiedad de completitud, que evidencie su necesidad y muestre que trabajar con ciertas nociones matemáticas no es posible en el conjunto de los números racionales. Tomamos de Bergé (2016) la sugerencia de presentar la propiedad de completitud a través de situaciones que trasciendan lo estrictamente numérico e incluyan sucesiones o funciones, recreando condiciones similares a las que llevaron a la definición de esta propiedad. Nuestra propuesta se centra en introducir la completitud a través de la convergencia de sucesiones monótonas y acotadas. En la siguiente sección, detallaremos las nociones teóricas que respaldan nuestro trabajo.

Marco conceptual

Las nociones matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje

Según Douady (1992, 1995), es útil distinguir entre el carácter de herramienta (H) y el carácter de objeto (O) de un concepto matemático. El carácter de herramienta de la completitud se observa cuando se aplica para resolver situaciones específicas, como demostrar la convergencia de sucesiones o la existencia de raíces o extremos de funciones bajo condiciones particulares. Por otro lado, el carácter de objeto se revela cuando se estudia la completitud de manera general, desligada de contextos específicos, o cuando se analiza su interrelación con otras nociones matemáticas. Tomamos de Douady (1995) las siguientes caracterizaciones: un alumno ha aprendido cierta noción matemática si es capaz de hacerla funcionar en su doble carácter de herramienta y de objeto. Para el docente, enseñar un concepto matemático implica crear las condiciones que permitirán la apropiación del mismo por parte del alumno, lo que requiere cierta organización en su enseñanza.

Hay nociones matemáticas cuyo aprendizaje representa, en buena medida, un salto con respecto a los conocimientos previos de los estudiantes: su presentación en el aula involucra la definición de nuevos objetos matemáticos o la introducción de un nuevo formalismo, o de nueva simbología, o responden a la necesidad de unificar o generalizar conocimientos. Las nociones con estas características han sido denominadas nociones o conceptos FUG (Robert, 1998; Dorier, 1995) justamente por su carácter formalizador, unificador y generalizador. Pensamos que la propiedad de completitud puede ser interpretada como una noción FUG por las razones que detallamos a continuación.

En los cursos universitarios donde la completitud se introduce con el enunciado de la propiedad del supremo, se hace necesario definir nuevos objetos matemáticos, nuevas palabras e introducir una nueva simbología, característica formalizadora de la noción en el sentido de Robert (1998). La completitud permite unificar nociones ya conocidas de manera compartimentada por los estudiantes, como ser el comportamiento de ciertas sucesiones numéricas y las propiedades de ciertas funciones continuas en intervalos cerrados. El trabajo matemático, en un cuerpo ordenado y completo, posibilita asegurar y generalizar la convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas, y ciertas características de todas las funciones continuas en intervalos cerrados. Considerar la completitud como una noción FUG nos posibilita tomar en cuenta las recomendaciones didácticas de autores que han trabajado en la enseñanza y el aprendizaje de este tipo de nociones. Estos investigadores consideran que las nociones FUG difícilmente pueden ser introducidas en el aula a partir de una situación fundamental en el sentido de Brousseau (1986), afirman que son nociones que requieren de una enseñanza a largo plazo y de la elaboración de un discurso particular por parte del docente (metadiscurso) para generar la reflexión en el aula sobre las nociones puestas en juego (Dorier, 1995).

Estrategia para desarrollar el taller

En el taller se propondrán dos actividades matemáticas que se entregarán en distintos momentos. Previo a la entrega de las actividades se explicará con detalle la dinámica del taller, que consiste en una instancia de trabajo individual seguida de una instancia de trabajo grupal para luego cerrar con una discusión general. Pensamos que esta estrategia privilegia la participación activa de los talleristas favoreciendo la apropiación de nuevas ideas asociadas a los saberes a transponer al aula y generando espacios de discusión, de análisis y de reflexión. Para realizar este taller se requiere que los participantes estén familiarizados con las pruebas de acotación, monotonía y cálculo de límites de sucesiones reales (o racionales) definidas por recurrencia.

Primer momento

Se entrega la primera actividad que consiste en completar una tabla con las propiedades que verifican ciertas estructuras algebraicas y de orden. La idea es relacionar la propiedad que distingue a cada estructura algebraica con la existencia de nuevos elementos numéricos y luego analizar qué es lo que diferencia a los sistemas numéricos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Luego de unos minutos de trabajo individual los talleristas compartirán y discutirán sus resultados con el resto de los integrantes del grupo al que pertenecen. Durante la puesta en común se analizará la relación entre los elementos de cada sistema numérico y las propiedades que distinguen a cada estructura algebraica.

Segundo momento

Se entrega la segunda actividad, en la que se estudiará, en $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$, el comportamiento de una sucesión racional definida por recurrencia, monótona creciente y acotada superiormente en $\mathbb{Q}$, que no es convergente en $\mathbb{Q}$. Los talleristas trabajarán unos minutos de forma individual para luego compartir y discutir sus producciones con el resto del grupo que integra. Durante la puesta en común se analizará el potencial de esta actividad para presentar un enunciado de la propiedad de completitud vía la convergencia de sucesiones monótonas, tomando los aportes de los participantes.

Tercer momento

En esta instancia se pretende realizar un análisis reflexivo sobre el potencial de presentar en el aula la propiedad de completitud a partir del trabajo con sucesiones monótonas racionales. El análisis reflexivo se estructurará teniendo en cuenta los saberes previos que la propuesta requiere, las dificultades que podrían surgir en el aula, los puntos de claridad y las certezas que permite deducir, así como también, una institucionalización posible. Analizaremos los conocimientos previos que se requieren para presentar la propiedad de completitud vía la convergencia de sucesiones racionales monótonas crecientes y acotadas superiormente y los contrastaremos con los conocimientos previos necesarios para enunciar dicha propiedad vía la propiedad del supremo. También organizaremos una discusión grupal con el propósito de dirimir si una de estas dos presentaciones puede ser más significativa para los estudiantes.

Temporalidad del taller

Introducción: 5 minutos

Primer momento: trabajo individual 10 minutos, discusión grupal 10 minutos, puesta en común y cierre 15 minutos.

Segundo momento: trabajo individual 20 minutos, discusión grupal 15 minutos, puesta en común y cierre 25 minutos.

Tercer momento: análisis reflexivo conjunto 10 minutos.

Referencias y bibliografía

Acevedo, C. (2011). Una secuencia didáctica para el concepto del Supremo basado en la teoría APOE (Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México).

Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 6(3), 163-197.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 217-235. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9101-5

Bergé, A. (2016). Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres réels, TWG1: Calculus and analysis. In E. Nardi, C. Winslow, & T. Hausberger (Eds.), Proceedings of the First International Network for Didactic Research in University Mathematics, INDRUM2016 (pp. 33-42). University of Montpellier and INDRUM. https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016

Bills, L. y Tall, V. (1998). Operable Definitions in Advanced Mathematics: The Case of the Least Upper Bound. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 104–111). Stellenbosch: Program Committee of the 22nd PME Conference.

Brousseau, G. (1986). Teoría de las situaciones didácticas. Grupal Logística y Distribución.

Chellougui, F (2016). Approfondissement du questionnement didactique autour du concept de « borne supérieure », TWG3:Logic, Numbers and Algebra. In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds.), Proceedings of the First International Network for Didactic Research in University Mathematics, INDRUM2016 (pp. 266–275). University of Montpellier and INDRUM. https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016

Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. Educational Studies in Mathematics, 29(2), 175–197.

Douady, R. (1992). Contribución de la didáctica de las matemáticas a la docencia. Referencias Irem, 6, 132–158.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de la relación con el conocimiento matemático. En M. Artigue, R. Douady, R. Moreno & P. Gómez (Eds.). Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fregueiro, A. (2024). *Una propuesta para el aprendizaje de la propiedad de completitud del sistema de los números reales*. [Tesis de doctorado no publicada]. CICATA-IPN.

Fregueiro, A. & Bergé, A. (2024). La propiedad de completitud del sistema real: Una introducción vía la convergencia de sucesiones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 38*, e230005. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38n230005

Hernández, L. A., & Trigueros, M. (2012). Acerca de la comprensión del concepto del supremo. Educación Matemática, 24(3), 99 –119.

Robert. A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. Recherches en Didactique des Matématiques, 18(2), 139–190.

Sari, C. K., Machromah, U. & Purnomo, M.E. R. (2018). Finding and proving supremum and infimum: students' misconceptions. Journal of Physics: Conference Series. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1180/1/012007