De Vieta a Po-Shen Loh: una fórmula alternativa para la solución de una ecuación de segundo grado

Allan **Gen** Palma
Universidad Estatal a Distancia (UNED)
Costa Rica
agen@uned.ac.cr
Eric **Padilla** Mora
Universidad Estatal a Distancia (UNED)
Costa Rica
epadilla@uned.ac.cr

Resumen

Este taller tiene el propósito de dar a conocer a las personas estudiantes de Matemática, Educación Matemática y docentes de la educación secundaria, la relación que existe entre el trabajo realizado por Vieta y una fórmula alternativa para la solución general de una ecuación de segundo grado con una incógnita propuesta por Po-Shen Loh, esto a partir del diseño de una secuencia didáctica que se sugiere para su enseñanza. Se espera que la actividad contribuya en el área de la didáctica y que la estrategia de mediación pueda ser asimilada por los participantes y que valoren su implementación tanto en su proceso de formación como durante el ejercicio profesional.

Palabras claves: álgebra; didáctica; secuencia didáctica; enseñanza de la Matemática; estrategia didáctica.

Introducción

La búsqueda, creación y construcción de estrategias didácticas que contribuyan a favorecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, es y ha sido un trabajo arduo para quienes se dedican a la Educación Matemática. Sobre todo, porque las dificultades que se han encontrado abarcan la mayoría de los niveles educativos, y casi todas sus áreas. Una de ellas es el álgebra, y específicamente el de la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, el cual ha sido abordado en diversas investigaciones como las de: Velozo (2011);

Ávila, León y Rodríguez (2018); y Hernández, García y Campo (2023), entre otras. Al respecto estos últimos advierten que:

> algunos errores que se han identificado al resolver las ecuaciones cuadráticas se deben a que aplican inadecuadamente los métodos de solución (como la fórmula general, la factorización y completar el cuadrado perfecto), al intentar factorizar ecuaciones cuadráticas que no son factorizables, entre otros. (Hernández et al., 2023, p. 3)

Además, con la aparición de las calculadoras científicas, en las cuales, con solo digitar los coeficientes numéricos se obtiene el resultado de las raíces, esto más bien provocó una desmejora en cuanto a la comprensión y aplicación de las diversas estrategias que permiten obtener la solución de la ecuación de segundo grado. Esto se evidencia en la actualidad dado que es frecuente escuchar a los estudiantes cuestionarse sobre ¿Qué son esos valores que se obtienen? ¿Para qué se pueden emplear? Pero sobre todo en la resolución de un problema aplicado o en algún contexto cuando preguntan ¿Qué hago con esos valores? ¿Para qué me sirven? ¿Qué significa el valor de "x" y el valor de la "y"?

En esa exploración de alternativas que podrían contribuir con la compresión y favorecer el proceso de solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, existe un método propuesto por el profesor Po-Shen Loh, quien trabaja para la Universidad Carnegie Mello, al logra diseñar una estrategia pedagógica con un enfoque diferente que se hace evidente al analizar la simetría de una parábola alrededor de la línea vertical que pasa por su vértice. Lo interesante de esta estrategia es que los pasos individuales ya habían sido descubiertos, por separado, por otros matemáticos. No obstante, el aporte de Loh fue lograr combinar esos pasos en un único método coherente. Si se analiza la estrategia con detenimiento se evidencia una clara ganancia de eficiencia, lo que permite considerarlo como algo sorprendente al pensar el por qué no se había descubierto antes. Además, es necesario reflexionar sobre su empleo como un enfoque alternativo para resolver ecuaciones cuadráticas, pero más aún, resulta conveniente presentar una secuencia lógica y didáctica para el abordaje del tema. Sobre todo, porque los métodos tradicionales que se han empleado, por lo general, han presentado diversas dificultades para los estudiantes tal y como se evidencia en el siguiente apartado.

Dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones de primer y segundo grado en una variable

Diversos investigadores como Moreno y Castellanos (1997); Barría y Chavarría (2010); Tettay, Pulgar y Rojas (2019); Pérez, Diego, Polo y González (2019); y Alberola (2024) entre otros, han abordados las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales. En primer lugar, se puede señalar que, no comprenden adecuadamente el significado del signo igual, lo que se evidencia cuando, al tener un cero en uno de los lados de la ecuación durante una resta, tienden a ignorarlo o incluso eliminarlo. Esto revela una dificultad en la comprensión del concepto de equivalencia.

Además, cuando las ecuaciones incluyen fracciones, no logran resolverlas ni saben cómo abordarlas correctamente. También enfrentan problemas al aplicar la propiedad distributiva del producto respecto a la suma; por ejemplo, ante una expresión como $2(x+1)=7$, suelen escribir erróneamente $2x+1=7$.

Otro aspecto en el que se observan errores frecuentes es en las operaciones con números enteros, cometiendo equivocaciones en sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Asimismo, no logran diferenciar entre los términos con incógnita y los términos independientes.

Finalmente, al utilizar el "método de la balanza"-es decir, realizar la misma operación en ambos miembros de la igualdad para mantener su equilibrio-, muchas veces aplican dicha operación solo en uno de los lados, lo que impide llegar a una solución correcta. Lo complejo de esto, y es señalado por Alberola (2024) es que este tipo de errores es acarreado por los estudiantes al resolver otro tipo de ecuaciones como las de segundo grado y grados superiores, las ecuaciones exponenciales y las logarítmicas, entre otras.

En cuanto a las dificultades presentadas por los estudiantes en la resolución de ecuaciones de segundo grado, los estudios de Ávila, León y Rodríguez (2018) y Barrera (2024) son referentes clave, ya que permiten categorizarlas. Así, las dificultades pueden surgir de:
Los conocimientos previos: al confundir las propiedades y las diferencias entre ecuación, igualdad e inecuación, operar y simplificar erróneamente expresiones algebraicas o aplicar de manera errónea los casos de factorización en un ejercicio.

Realizar operaciones con expresiones algebraicas: transponer incorrectamente los términos en el despeje de una incógnita, operar erróneamente expresiones que estén dentro de paréntesis y despejar de forma incorrecta la incógnita en una ecuación cuadrática.

Calcular valores numéricos: operar los números reales del discriminante de manera incorrecta, calcular mal las raíces de una ecuación cuadrática y reemplazar incorrectamente los resultados obtenidos en la ecuación cuadrática inicial.

Identificar la estructura y los elementos de una ecuación cuadrática: dado que no logran reconocer los términos de una ecuación cuadrática, confunden entre si los parámetros a, b y c dado que los reemplazan equivocadamente en la fórmula general.

Errores al factorizar por método del aspa simple (inspección): dado que, aunque logran determinar los factores primos, se equivocan de signos o bien no logran encontrar los factores correctos.

Errores al emplear el método de completar cuadrados, tales como: omisión de signos y símbolos, omiten el signo + al sumar el término que completa el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo. Se equivocan al despejar la ecuación lineal, al completar el trinomio cuadrado perfecto dividen entre 2 el coeficiente de "x" dos veces para luego elevarlo al cuadrado, al extraer raíces cuadradas y al encontrar el valor para completar el trinomio cuadrado perfecto al no elevar al cuadrado el resultado $\frac{b}{2}$.

Errores al emplear el método de la fórmula general: se les dificulta el manejo de la fórmula, omiten el signo del radical, prevalece el hecho de no identificar el coeficiente $a = 1$ y, en su lugar, utilizan el exponente 2.

Ahora bien, todas estas dificultades requieren de una intervención desde el proceso de planificación de las actividades de mediación, lo cual conlleva al docente a repensar y replantear el cómo enseñar estos temas. Para así, en caso de presentarse algunas de estas situaciones, saber cómo encausar el proceso de enseñanza. Además, cobra importancia el establecer secuencias didácticas apropiadas en su proceso de enseñanza.

Las secuencias didácticas y su importancia

Las secuencias didácticas pueden ser entendidas como un "conjunto de actividades ordenadas, estructuradas y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos que tienen un principio y un final" (Zavala, 2000, p. 16). Es claro que el proceso de enseñanza puede ser dinámico y que en muchas ocasiones requiere de ajustes, pero durante el planeamiento del mismo debe establecerse diversas conexiones, es allí donde cobra mucha importancia este concepto, el cual para Díaz (2013) es:

> El resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, con ello se parte de la intención docente de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información que a la que va acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa, esto es tenga sentido y pueda abrir un proceso de aprendizaje, la secuencia demanda que el estudiante realice cosas, no ejercicios rutinarios o monótonos, sino acciones que vinculen sus conocimientos y experiencias previas, con algún interrogante que provenga de lo real y con información sobre un objeto de conocimiento. (p. 4)

De lo anterior, se podría considerar que las secuencias didácticas cobran importancia en:
La organización del contenido: al estructurar los temas de forma lógica y coherente, lo que facilita la comprensión. Así cada paso de la secuencia está diseñado para que el conocimiento se construya de manera progresiva.

Coherencia en la enseñanza: dado que se garantiza que todas las partes del proceso de enseñanza (objetivos, contenidos, actividades, evaluación) estén alineadas entre sí. Esto evita fragmentaciones en el aprendizaje y asegura que se puedan relacionar diferentes conceptos y habilidades de manera lógica.

Planificación efectiva: esto se relaciona con la panificación de los objetivos y actividades, propiciando que el tiempo se aproveche al máximo.

Fomenta la participación: mediante la planificación de actividades que estimulen la reflexión, el análisis y la resolución de problemas.

Flexibilidad y ajuste: dado que permite realizar ajustes según los avances y necesidades del grupo, lo que contribuye a una enseñanza más dinámica.

Los aspectos mencionados anteriormente sustentaron el diseño y la elaboración del presente taller, el cual articula una secuencia didáctica que comprende: la factorización de polinomios, la solución general de una ecuación de segundo grado, las fórmulas de Vieta para sus soluciones y la forma alternativa de solución propuesta por Po-Shen Loh. El propósito fundamental es ofrecer a los docentes y estudiantes de Matemática una herramienta adicional que optimice la enseñanza y el aprendizaje de este tema.

Con ello, además de cumplir con el compromiso de la divulgación de la Matemática, se espera que la estrategia se convierta en una guía para los participantes y que puedan reflexionar el cómo y cuándo implementarla cada vez que deseen enseñar algún contenido y requieran del diseño de una secuencia didáctica.

Propuesta de la secuencia didáctica del taller

A continuación, se presenta una sugerencia en cuanto a la secuencia lógica didáctica que puede emplearse para desarrollar la temática.

1. Se expone una breve reseña sobre Po-Shen Loh. (5 minutos)
2. Se recomienda iniciar con un repaso de algunos métodos de factorización como:
   a) Factorización de un trinomio cuadrado perfecto. (3 minutos)
   b) Factorización por inspección. (3 minutos)
   c) Factorización por diferencia de cuadrados. (3 minutos)
   d) Factorización por el método de completar cuadrados. (5 minutos)
   e) Solución de una ecuación de segundo grado con una incógnita empleando la factorización y la propiedad absorbente del cero en los números reales. (3 minutos)
3. Una vez abordados estos temas de factorización se continúa con una forma de obtener la solución general de una ecuación de segundo grado con una incógnita. (18 minutos)
4. Luego es conveniente que a partir de las soluciones de la ecuación cuadrática se obtengan la fórmula de Vieta para la suma y el producto de las soluciones. (10 minutos)
5. Con base en lo desarrollado, se espera deducir la solución alternativa para ecuaciones de segundo grado con una incógnita propuesta por Po-Shen Loh. (20 minutos)
6. Seguidamente, se proponen cuatro ejercicios de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, para resolverlos mediante la fórmula alternativa de Po-Shen Loh. (25 minutos)
7. Finalmente se responden preguntas de los participantes, y se les solicita llenar un cuestionario de evaluación del taller. (15 minutos)

Aspectos generales del taller

Este taller está dirigido a estudiantes de Matemática y de Enseñanza de la Matemática, así como a docentes de Matemática de secundaria. La capacidad máxima de participantes es de 25, las cuales deberán contar con una mesa de trabajo, una libreta de apuntes, un lápiz o lapicero, un borrador y un sacapuntas.

La metodología de trabajo consiste en una propuesta de secuencia lógica didáctica, para lo cual los talleristas irán proyectando una presentación en Power Point con las interrogantes que deben de trabajar y responder, pueden realizarlo en forma individual o en parejas con el objetivo de promover el aprendizaje cooperativo. El objetivo es que bajo la guía e interrogación de los talleristas y la estrategia de mediación propuesta se logre determinar la nueva alternativa de solución de una ecuación cuadrática, la cual se pondrá a prueba mediante la solución de cuatro ejercicios.

Actividades por desarrollar

I parte. Breve reseña sobre Po-Shen Loh

II parte. Repaso de algunos conceptos algebraicos básicos

1. Factorización de trinomios cuadrados perfectos de la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$.
   Se asignarán ejercicios.

2. Factorización por inspección de trinomios de forma $ax^2 + bx + c$ usando la estructura
$$ax^2 + bx + c = (px + s)(qx + r)$$

   Ejemplo, factorizar $x^2 - x - 6$, la cual corresponde a $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.

   Se discutirá la estrategia y se asignarán ejercicios.

3. Factorización por el método de diferencia de cuadrados.
   Se trabajará particularmente binomios de la forma $a^2 - b^2$.

   Se asignarán ejercicios.

4. Factorización por el método de completar el cuadrado.
   Factorizar el siguiente trinomio $x^2 - x - 6$
$$x^2 - x - 6 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$
$$= \left(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2}\right) = (x - 3)(x + 2)$$

   Se discutirá la estrategia y, además, se asignarán ejercicios.

III Parte. Solución de una ecuación de segundo grado con una incógnita

1. Solución de una ecuación cuadrática empleando la factorización y la propiedad absorbente del cero.
   Se discutirá la solución de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$.
   Dado que $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$.

   Por lo que $\Rightarrow x - 3 = 0$ Por la propiedad absorvente del cero.
   $\Rightarrow x = 3.$
   Y $\Rightarrow x + 2 = 0$ Por la propiedad absorvente del cero.
   $\Rightarrow x = -2.$
   Por tanto, el conjunto de solución corresponde a $S = \{-2,3\}$.

2. Prueba de la fórmula general de las ecuaciones cuadráticas con una incógnita.
   Se parte de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c constantes reales, y $a \neq 0$. Al utilizar los conocimientos anteriores se comprobará que las soluciones de la ecuación están dadas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Además, que dichas soluciones se pueden escribir de la forma:
   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

   Nota: como parte de la estrategia y secuencia, se empleará la técnica de completar cuadrados para obtener la fórmula general.

3. Fórmulas de Vieta de la suma y producto de las soluciones de la ecuación de segundo grado.
   A partir de los resultados obtenidos en la actividad anterior se concluirá que la suma y el producto de las soluciones de una ecuación cuadrática corresponden a
   $$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$
   $$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

IV Parte. Método alternativo

1. Análisis visual y discusión del método alternativo de Po-Shen Loh para obtener la solución de las ecuaciones de segundo grado.

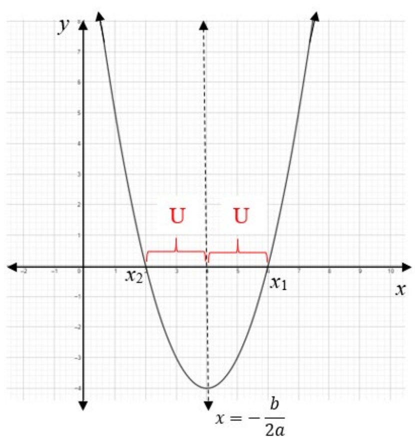

Figura 1. Visualización de la estrategia de Po-Shen Loh

Si se denomina con U la distancia entre el punto medio de las soluciones, se obtiene,

$$\overbrace{\left(\frac{S}{2} + U\right)}^{x_1}\overbrace{\left(\frac{S}{2} - U\right)}^{x_2} = P, \text{ con } U = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Nota: solo se considera la solución positiva dado que U representa una distancia.
Por lo tanto, $x_1 = \left(\frac{S}{2} + U\right) = \left(-\frac{b}{2a} + U\right)$ y $x_2 = \left(\frac{S}{2} - U\right) = \left(-\frac{b}{2a} - U\right)$.

Para llegar a este resultado se recurre a lo obtenido en los pasos anteriores, y con ello se completa la secuencia didáctica.

Además, usando dicho método deberán resolver los siguientes ejercicios.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 + 2x - 8 = 0$
c) $5x^2 - 6x - 1 = 0$
d) $x^2 + x + 1 = 0$

Referencias y bibliografía

Ávila-León, C., León-Ruíz, L. y Rodríguez-Delgado, D. (2018). *Ecuaciones cuadráticas con una incógnita con raíces reales*. https://repositorio.uniandes.edu.co/server/api/core/bitstreams/79506a0f-47c1-4dd0-8408-745865761ec2/content

Alberola-Palop, J. (11 de abril del 2024). *Errores y dificultades en la resolución de ecuaciones y cómo ayudar a los alumnos a superarlos*. https://www.tekmaneducation.com/errores-dificultades-ecuaciones/

Barrera-González, M. (2024). Comprensiones acerca de los errores que cometen los estudiantes al resolver ecuaciones cuadráticas: una experiencia de estudiantes panameños. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 17*(2) pp. 35-62. ISSN: 22-15-5627. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/57777/60968

Barría-Bobadilla, A. y Chavarría-Lara, M. (2010). *Dificultades que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado* [Tesis de pregrado. Universidad del Bío-Bío, Chile.] http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1986/1/Barria_Bobadilla_Alejandra.pdf

De-Moreno, I. y De-Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado. *Revista EMA, 2*(3), 247-258. https://core.ac.uk/download/pdf/12341542.pdf

Díaz-Barriga, Á. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Hernández-Yañez, M., García-García, J. y Campo-Meneses, K. (2023). Conexiones matemáticas asociadas al concepto de ecuación cuadrática que establecen futuros profesores mexicanos de matemáticas. *Uniciencia, 37*(1), pp. 1-26. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/16884/28126

Pérez-Istúriz, M., Diego-Mantecón, J., Polo-Blanco, I. y González-López, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA 13*(2), 84-103. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/v13i2.7613/7339

Po-Shen, L. (2019). *A Simple Proof of the Quadratic Formula Po-Shen Loh*. https://arxiv.org/pdf/1910.06709

Tettay-Mejías, S., Pulgar-García, M. y Rojas-Sandoval, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. *Praxis15*(2), 193-205. https://revistas.unimagdalena.edu.co/index.php/praxis/article/view/3249/2612

Velozo-Boza, G. (2011). *Análisis del error en ecuaciones cuadráticas* [Tesis para optar al grado de Licenciado en Educación y al Título de Profesor de Educación Media en Matemática con Mención Didáctica. Universidad de Valparaíso]. https://repositoriobibliotecas.uv.cl/serveruv/api/core/bitstreams/a04d7bc2-0409-47b2-8b01-66f2e1b3c982/content

Zavala-Vidielle, A. (2000). *La práctica educativa. Cómo enseñar*. Editorial Graó, sétima edición. Barcelona España. https://des-for.infd.edu.ar/sitio/profesorado-de-educacion-inicial/upload/zavala-vidiella-antoni.pdf