Construindo um livro de códigos de proposição de problemas para análise de tarefas de PPM em transformação linear

Joab dos Santos **Silva**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
joab.silva@ifpb.edu.br
Silvanio de **Andrade**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
silvanio@usp.br

Resumo

Esse artigo apresenta a construção das categorias que compõem um livro de códigos para a análise de tarefas de proposição de problemas, voltadas ao ensino e aprendizagem de transformações lineares. Para isso, realizamos uma revisão de literatura com foco em investigar como tais categorias são definidas, promovemos dois workshops com professores de Matemática (em formação inicial e continuada) e analisamos qualitativamente as respostas e os feedbacks dos participantes à luz da literatura. Como resultado, definimos categorias relacionadas ao tipo de problema, à relação com a situação-problema e à solubilidade, bem como à complexidade matemática envolvida, tanto no texto quanto na solução. Os resultados contribuem para o aprimoramento de instrumentos de análise em Educação Matemática e para o desenvolvimento de práticas formativas baseadas na proposição de problemas no contexto da Álgebra Linear.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Análise qualitativa; Educação Matemática; Ensino superior; Formação de professores de Matemática; Proposição de problemas matemáticos.

Problema de pesquisa

Nos últimos anos, diferentes abordagens teórico-metodológicas têm sido propostas para o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, incluindo o uso de representações semióticas, demonstrações, problemas abertos, modelagem, tecnologias digitais em ambientes de geometria dinâmica, Educação Matemática Realística e a Teoria APOS (Stewart *et al.*, 2019; Trigueros & Wawro, 2020). Segundo Trigueros e Wawro (2020, p. 477), "começar com problemas reais ou realistas ajuda os alunos a desenvolver abordagens que constroem uma ponte entre situações concretas e os conceitos abstratos necessários para modelá-las".

No campo da Proposição de Problemas Matemáticos (PPM), embora haja um número crescente de estudos voltados à formação de professores (Imaoka *et al*.,2015; Silber e Cai, 2021; Joaquin, 2024; Kovács, 2024), ainda são escassas as investigações que articulam PPM ao ensino de conteúdos de Matemática avançada. Nesse contexto, este estudo busca responder à seguinte questão de pesquisa: Como construir e aprimorar um instrumento para categorização e análise qualitativa e quantitativa das respostas a uma tarefa de PPM voltada ao ensino e aprendizagem de transformações lineares?

Proposição de problemas matemáticos

Entre as diversas contribuições da pesquisa internacional, destacam-se os trabalhos de Stoyanova e Ellerton (1996) e de Cai *et al*. (2015), que definem a proposição de problemas como um processo de construção de problemas relevantes a partir de interpretações pessoais de situações concretas, baseadas na experiência matemática do participante. Os problemas propostos ou reformulados devem ser solucionáveis com base nas informações fornecidas na situação. Neste estudo, adotamos a definição apresentada por Cai e Hwang (2020), segundo a qual a proposição de problemas em Educação Matemática refere-se a um conjunto de atividades relacionadas que envolvem estudantes e professores na formulação ou reformulação de problemas, e na expressão de um problema ou tarefa, com base em um contexto específico.

O desenvolvimento de uma atividade de PPM parte de uma tarefa de PPM, que é composta por duas partes: a situação-problema e o prompt (Cai *et al*., 2022). A situação-problema apresenta o contexto e dados iniciais, podendo emergir de cenários do mundo real ou cenários puramente matemáticos ou abstratos (Cai e Hwang, 2023). Quanto à estrutura, Stoyanova e Ellerton (1996) classificam as situações problema como livres, semiestruturadas e estruturadas. Mais recentemente, Baumanns e Rott (2021) propuseram a fusão das duas primeiras categorias em uma única, denominada situações-problema não estruturadas, caracterizadas pela ausência de uma tarefa inicial definida ou de um exemplo de problema.

O prompt, por sua vez, explicita aos participantes o que se espera que realizem na tarefa de PPM. Exemplos recorrentes de prompts podem ser encontrados em Cai e Hwang (2023) e Cai *et al*. (2024). Segundo a categorização proposta por Baumanns e Rott (2024), os prompts podem ser abertos ou fechados. Prompts abertos não impõem restrições quanto à dificuldade, ao público-alvo ou ao conteúdo. Assim, uma mesma situação-problema pode gerar quatro configurações distintas de tarefa de PPM, a depender da combinação entre o tipo de estrutura da situação-problema e o tipo de prompt, sendo essa escolha orientada pelos objetivos específicos da atividade.

Nesse estudo, trabalhamos com uma tarefa de PPM baseada em uma situação-problema não estruturada, de contexto puramente matemático. A tarefa envolve a definição de transformação linear entre espaços vetoriais arbitrários, os conceitos de núcleo e imagem, a informação de que ambos são subespaços vetoriais, e três vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. O prompt inicialmente utilizado era aberto, sendo posteriormente reformulado para um prompt fechado.

Desenvolvimento metodológico

A categorização e análise de dados obtidos a partir de uma tarefa de PPM requerem o uso de um instrumento específico, comumente denominado livro de códigos de proposição de problemas. Esse instrumento deve incluir definições gerais e específicas, bem como instruções detalhadas para a codificação das respostas em planilhas eletrônicas, organizadas segundo uma estrutura de fluxograma que oriente de forma sistemática o processo de análise. Na literatura internacional, identificam-se diversos métodos para avaliação das tarefas de PPM. Com base nisso, realizamos uma revisão de literatura com foco em investigar se, e de que maneira, os estudos categorizam aspectos como tipos de respostas, relação com a situação-problema, solubilidade, complexidade matemática e criatividade.

Observa-se que, em muitas pesquisas voltadas à formação de professores de Matemática, os conteúdos presentes nas tarefas de PPM e em suas respectivas respostas estão majoritariamente relacionados à educação básica (Leung e Silver, 1997; Crespo e Sinclair, 2008; Silber e Cai, 2021; Joaquin, 2024). Embora estudos como os de Imaoka *et al*. (2015) e Kovács (2024) apresentem emergências de conteúdos mais avançados — como funções de várias variáveis (Cálculo de Várias Variáveis) e congruência módulo m (Teoria dos Números) —, mesmo nesses casos, as tarefas de PPM não foram direcionadas explicitamente a disciplinas de Matemática avançada.

A pesquisa envolvendo atividades de PPM em contextos de Matemática avançada é ainda incipiente. Como consequência, há carência de exemplos característicos (EC) que subsidiem a formulação das definições e instruções necessárias à construção de um livro de códigos de voltado a esse nível de ensino. Diante disso, realizamos dois workshops com o objetivo de subsidiar o desenvolvimento de tal instrumento, aplicando uma tarefa com foco no ensino e aprendizagem de transformações lineares. O primeiro workshop foi realizado em outubro de 2024, de forma remota (via Google Meet), durante um encontro de um grupo de pesquisa do qual o primeiro autor é membro e o segundo autor é coordenador. A atividade teve duração de duas horas e contou com a participação de seis integrantes do grupo. Foi utilizada uma tarefa de PPM com situação-problema não estruturada, de contexto puramente matemático, e prompt aberto, conforme descrito a seguir:

> A transformação linear é um tipo particular de função, cujo domínio e contradomínio são espaços vetoriais, e que preservam as operações de adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar. Silva (2021) define a transformação linear como:
> "Sejam U e V dois K-espaços vetoriais. Uma função $T: U \longrightarrow V$ é uma transformação linear se:
> 1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \forall\, u_1, u_2 \in U$
> 2. $T(\lambda u) = \lambda T(u), \forall\, \lambda \in K$ e $\forall\, u \in U$" (p. 107)
> A toda transformação linear $T: U \longrightarrow V$ estão associados dois subespaços, o núcleo e a

imagem, definidos por Silva (2021) como:
"Sejam U e V dois K-espaços vetoriais e $T: U \longrightarrow V$ é uma transformação linear.
1. O conjunto $\{u \in U; T(u) = 0\}$ é chamado núcleo de T e denotamos por $Nuc(T)$.
2. O conjunto $\{v \in V; \exists\, u \in U\ com\ T(u) = v\}$ é chamado imagem de T e denotamos por $Im(T)$." (p. 118)
Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores $(-1,4,2)$, $(1,2,-1)$ e $(3,-5,0)$ do $\mathbb{R}^3$.
Proponha três problemas distintos que possam ser resolvidos a partir destas informações.
Algumas orientações: Para os problemas propostos, podem utilizar tanto as informações apresentadas na situação-problema quanto informações elaboradas pelo proponente a partir se suas experiências de vida e conhecimentos prévios.

O segundo workshop foi realizado em novembro de 2024, durante um evento de formação de professores de Matemática na região Nordeste do Brasil. A atividade ocorreu de forma presencial, em um Laboratório de Matemática equipado com computadores e acesso à internet, permitindo o uso do software gratuito *Calculadora de Matrizes*. O workshop teve duração de duas horas e contou com a participação de oito estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Foi utilizada a mesma tarefa de PPM aplicada no Workshop 1, com duas modificações principais: o prompt foi reformulado de aberto para fechado, e alguns trechos foram ajustados para melhor adequação ao formato da tarefa. A seguir, apresentamos os fragmentos modificados da tarefa de PPM:

[...] Considere os vetores $(-1,4,2)$, $(1,2,-1)$ e $(3,-5,0)$ do $\mathbb{R}^3$.
Proponha três problemas distintos utilizando os vetores dados (não necessariamente os três) e que possam ser resolvidos a partir destas informações.
Algumas orientações: Para os problemas propostos, além das informações apresentadas na situação-problema, é possível utilizar informações elaboradas pelo proponente a partir se suas experiências e conhecimentos.

Resultados e discussões

Na revisão de literatura, identificamos diferentes propostas de categorização das respostas em tarefas de PPM. Silver e Cai (1996) propõem categorias que consideram o tipo de resposta, a solubilidade, a complexidade linguística e a complexidade matemática. Leung e Silver (1997) analisam as respostas com base na qualidade, plausibilidade, suficiência de informações e complexidade matemática. Bonotto e Santo (2015), com base em Silver e Cai (1996), Leung e Silver (1997) e Yuan e Sriraman (2010), propõem uma categorização que inclui tipo de problema, relevância, plausibilidade, complexidade textual e complexidade da solução. Além disso, as autoras avaliam a criatividade dos problemas plausíveis com informações suficientes, considerando os critérios de fluência, flexibilidade e originalidade. De modo semelhante, Baumanns e Rott (2024) também adotam essas três dimensões da criatividade em suas análises.

A seguir, apresentamos os resultados obtidos nos dois workshops, com foco nas respostas elaboradas pelos participantes e nos feedbacks fornecidos após a realização da tarefa de PPM. Para fins de identificação, adotamos a seguinte notação: *Workshop 1 – Participante 1 – Problema 1* será representado por **W1P1P1**. Abaixo, descrevemos as respostas e análises correspondentes:

W1P1P1: Verifique se os vetores acima é uma transformação linear.
W1P1P2: Classifique esses vetores em LD ou LI.
W1P1P3: Verifique se os vetores formam um triângulo retângulo.
W1P2P1: Determine se o vetor $w = (2,1,-3)$ pertence à imagem da transformação T.
W1P3P1: Qual a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (-1,4,2)$ e $T(0,1) = (3,-5,0)$?
W1P4P1: O que é um Subespaço?
W1P4P2: O que é um Espaço Vetorial?
W1P4P3: Como resolver algo dessa natureza?
W1P4P4: Onde podemos perceber a transformação linear em nossos cotidianos?
W1P4P5: Como você pretende trabalhar essa situação com um professor que tem um perfil parecido com o meu?
W1P4P6: Como vou propor um problema se tenho dificuldade de compreender o fenômeno explorado?
W2P1P1: Sejam os vetores $(-1,4,2)$ os geradores do núcleo de uma transformação linear. Diga uma transformação que tem esses geradores.
W2P1P2: Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y+3z, 4x+2y-5z, 2x-y)$. Encontre os vetores geradores da imagem da transformação linear e verifique se ela é de fato uma transformação linear.
W2P1P3: Escreva uma transformação linear cujo os vetores geradores da imagem sejam $(3,-8,0)$.

Com base nas categorias identificadas na revisão de literatura, os problemas **W1P4P3**, **W1P4P5** e **W1P4P6** foram classificados como EC de *problemas não matemáticos*. Todos os demais foram considerados EC de *problemas matemáticos*. Dentre estes, os problemas **W1P4P1** e **W1P4P2** foram inicialmente categorizados, segundo Bonotto e Santo (2015), como EC de *problemas matemáticos irrelevantes*. Contudo, optamos por adotar a nomenclatura *problemas matemáticos não relacionados*, pois entendemos que essa terminologia representa com maior precisão a ideia de que tais problemas não fazem uso das informações fornecidas na situação-problema, rompendo, portanto, a relação com o contexto proposto. Além disso, o termo "irrelevante" pode ser interpretado de maneira negativa pelos participantes, sugerindo uma falta de valor matemático, o que nem sempre corresponde à realidade. Por exemplo, o problema **W1P1P2** é altamente relevante para a Álgebra Linear, embora não estabeleça conexão com o tema central da tarefa (transformação linear). De modo semelhante, **W1P4P4** utiliza o conceito de transformação linear, mas desconsidera os vetores fornecidos na situação-problema. Assim, os problemas **W1P1P2**, **W1P1P3**, **W1P4P1**, **W1P4P2** e **W1P4P4** são classificados como EC de *problemas matemáticos não relacionados*.

Por outro lado, os problemas **W1P1P1**, **W1P2P1**, **W1P3P1**, **W2P1P1**, **W2P1P2** e **W2P1P3** foram identificados como EC de *problemas matemáticos relacionados*. Entre eles, os problemas **W1P1P1**, **W1P2P1**, **W2P1P1** e **W2P1P3** foram classificados como EC de problemas *não solucionáveis*, segundo a tipologia de Silver e Cai (1996). Desses, **W1P2P1**, **W2P1P1** e **W2P1P3** são EC de problemas *não solucionáveis por informação insuficiente* (Silver e Cai, 1996), também descritos por outros autores como *problemas matemáticos plausíveis com informações insuficientes* (Leung e Silver, 1997; Bonotto e Santo, 2015). Em nossa análise, adotamos a terminologia proposta por Silver e Cai (1996). Já o problema **W1P1P1** representa um EC de *problema não solucionável por objetivo incompatível* (Silver e Cai, 1996).

Assim, os problemas **W1P3P1** e **W2P1P2** são EC de *problemas matemáticos relacionados e solucionáveis*. Ao analisar suas estruturas, observamos que o enunciado de **W1P3P1** apresenta apenas uma pergunta/demanda, enquanto o de **W2P1P2** contém duas. Quanto às soluções, **W1P3P1** exige o cálculo de uma transformação linear completamente definida, ao passo que **W2P1P2** demanda, além da definição de uma transformação linear, a determinação de um conjunto gerador da imagem da transformação. Ainda, caso os problemas **W2P1P1** e **W2P1P3** fossem reformulados com a inclusão da informação "$T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$", tornando-os solucionáveis, suas soluções envolveriam o cálculo explícito de uma transformação linear utilizando os vetores fornecidos, a partir de um conjunto gerador do domínio ou da imagem.

Conclusões

Com base nas análises realizadas, foram definidas as categorias que compõem o livro de códigos de proposição de problemas, concebido como instrumento para a categorização e análise quantitativa e qualitativa das respostas de uma tarefa de PPM, voltada ao ensino e aprendizagem de transformações lineares. A Tabela 1 apresenta as descrições das categorias referentes ao tipo de problema, à relação com a situação-problema e à solubilidade. No que diz respeito à complexidade matemática, propusemos uma adaptação do modelo de análise de Bonotto e Santo (2015), organizando a complexidade em duas dimensões: três subcategorias para a complexidade do texto do problema e quatro subcategorias para a complexidade da solução. As Tabelas 2 e 3 detalham, respectivamente, essas subcategorias, acompanhadas de descrições e exemplos representativos para cada grau de complexidade da solução.

Tabela 1
Descrição das categorias de respostas do livro de código de proposição de problemas.

Tipos de respostas	Tipos de problemas	Descrição
Sem resposta		Nenhuma escrita ou respostas não compreensíveis.
Declaração		Sentenças ou expressões matemáticas que não demandam ação com uma exigência por parte do resolvedor (verificar, analisar, calcular, determinar, provar etc.).
Problema	Não matemático	Pergunta que não implica nenhuma relação, cálculo ou conteúdo matemático, ou seja, que não é necessariamente resolvida pela Matemática (Leung e Silver, 1997).
	Matemático	Contém uma exigência matemática de tal modo que demanda do resolvedor uma ação ou determinada resposta.
	Não relacionado	Não usa nenhuma das informações dadas na situação-problema (no caso, os vetores) ou usa fora do contexto (transformação linear: definição, propriedades, núcleo e imagem).
	Relacionado	Usa pelo menos uma das informações dadas na situação-problema (no caso, pelo menos um dos vetores) dentro do contexto (transformação linear: definição, propriedades, núcleo e imagem).
	Não solucionável	Quando falta informação suficiente para gerar uma solução ou propõe um objetivo incompatível com a situação-problema (Silver e Cai, 1996).
	Solucionável	Quando, em conjunto com as informações dadas na situação-problema, contém uma demanda matemática que inclui informação suficiente para gerar uma solução (Silver e Cai, 1996).

Fonte: Autoria própria, 2025.

Tabela 2

Descrição dos graus de complexidade matemática do texto do problema.

Grau	Descrição
Complexidade matemática CT1	Problemas com uma pergunta.
Complexidade matemática CT2	Problemas com duas perguntas.
Complexidade matemática CT>2	Problemas com mais de duas perguntas.

Fonte: Autoria própria, 2025.

Tabela 3

Descrição dos graus de complexidade matemática da solução do problema.

Grau-descrição	Exemplos
Complexidade matemática CR1 – Envolve apenas cálculo direto e conhecimento de definições.	O proponente cria uma transformação linear e pede, por exemplo, para: calcular la imagem de um ou mais dos vetores dados; ou, verificar se os vetores dados pertencem ao núcleo ou à imagem da transformação.
Complexidade matemática CR2 – Envolve propriedades de transformação linear e conhecimentos que são pré-requisitos.	O proponente pede para determinar uma transformação linear (transformação linear completamente definida) utilizando os vetores dados.
Complexidade matemática CR3 – Envolve propriedades de transformação linear, conhecimentos que são pré-requisitos e definições de núcleo e imagem.	O proponente pede para determinar uma transformação linear (transformação linear completamente definida) utilizando os vetores dados + determinar o núcleo ou imagem da transformação.
Complexidade matemática CR>3 – Envolve propriedades de transformação linear, conhecimentos que são pré-requisitos, definições e resultados sobre núcleo e imagem.	O proponente pede para determinar uma transformação linear (transformação linear completamente definida) utilizando os vetores dados + analisar a transformação quanto a injetividade e sobrejetividade (envolve o Teorema do Núcleo e da Imagem e suas consequências). O proponente pede para determinar uma transformação linear (transformação linear completamente definida) utilizando os vetores dados, tomando um conjunto gerador para o domínio ou um conjunto gerador da imagem (Teorema do Núcleo e da Imagem - problemas com solução única ou infinitas soluções).

Fonte: Autoria própria, 2025.

Referências

Baumanns, L., & Rott, B. (2021). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, 13 (2), 59-76.

Baumanns, L., & Rott, B. (2024). Problem-posing tasks and their influence on pre-service teachers' creative problem-posing performance and self-efficacy. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101130.

Bonotto, C., & Santo, L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, 103-123.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101391.

Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In *Mathematical challenges for all* (pp. 115-145). Cham: Springer International Publishing.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, 3-34.

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., & Jiang, C. (2024). Advances in research on mathematical problem posing: Focus on task variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 101186.

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., & Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Task variables, processes, and products. In C. Fernandez, S. Llinares, A. Gutierrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119-145). PME

Crespo, A. & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 395–415.

Imaoka, M., Shimomura, T., & Kanno, E. (2015). Problem posing in the upper grades using computers. *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, 257-272.

Joaquin, M. N. B. (2024). Problem Posing Among Preservice and Inservice Mathematics Teachers. In *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education: International Research and Practice Trends* (pp. 173-187). Singapore: Springer Nature Singapore.

Kovács, Z. (2024). An Approach to Developing the Problem-Posing Skills of Prospective Mathematics Teachers: Focus on the “What if not” Heuristics. In *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education: International Research and Practice Trends* (pp. 189-215). Singapore: Springer Nature Singapore.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5-24.

Silber, S., & Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students’ mathematical problem posing. *ZDM–Mathematics Education*, 53(4), 877-889.

Silva, J. S. (2021). *Álgebra Linear*. Paco.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for research in mathematics education*, *27*(5), 521-539.

Stewart, S., Andrews-Larson, C., & Zandieh, M. (2019). Linear algebra teaching and learning: themes from recent research and evolving research priorities. *ZDM*, 51, 1017-1030.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students’ problem posing in school mathematics. *Technology in mathematics education*, 4(7), 518-525.

Trigueros, M., & Wawro, M. (2020). Linear algebra teaching and learning. *Encyclopedia of mathematics education*, 474-478.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students’ creativity and mathematical problem posing abilities. In B. Sriraman & K. Lee (Eds.), The elements of creativity and giftedness in mathematics (pp. 5–28). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.