La explicación en la producción de pruebas de futuros profesores: el caso del Álgebra Moderna

Miguel Ángel **Moreno-Ramírez**
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas, Universidad del Valle
Colombia
miguel.angel.moreno@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta comunicación tiene como fin reportar pruebas con valor explicativo construidas por futuros profesores de Matemáticas al considerar problemas del Álgebra Moderna. Para tal fin, se consideran dos aproximaciones teóricas, por un lado, el marco Dualidad, Necesidad y Razonamiento repetido (DNR) centrado en el reconocimiento de productos y procesos al resolver problemas, por otro lado, las discusiones alrededor de la explicación en la Filosofía de la Práctica Matemática (FPM). La metodología fue cualitativa con una estrategia de estudio de caso y los instrumentos correspondieron a registros de audio, vídeo y producciones escritas de las resoluciones de futuros profesores. Los resultados indicaron que los futuros profesores reconocieron características esenciales de los objetos matemáticos al construir pruebas, ya sea en la construcción de hipótesis o en el reconocimiento del teorema. Como conclusión se destaca el reconocimiento de pruebas para estudiar la explicación, así como las representaciones en la construcción de explicaciones.

Palabras clave: Álgebra Abstracta; Álgebra Moderna; Explicación matemática; Filosofía de la Práctica Matemática; Futuros profesores de Matemáticas; Prueba explicativa.

Introducción

En el marco de la Filosofía de las Matemáticas, un reciente interés se ha enfocado en el reconocimiento de *prácticas matemáticas*, mostrando la construcción de objetos, métodos y teoremas como una interacción entre las Matemáticas y los agentes -idealizados o reales- (Carter, 2019). Este tipo de estudios -que se inscriben en la línea de la Filosofía de la Práctica Matemática (FPM)- han permitido enriquecer otras tradiciones centradas en los fundamentos (caracterizadas por reconocer las construcciones matemáticas como una consecución lógica de objetos), reconociendo a las Matemáticas como una construcción humana e histórica (Mancosu, 2016).

Mancosu (2016) y Hamami y Morris (2020) han reconocido una serie de temáticas en las que se han enfatizado los estudios recientes en FPM, destacando las investigaciones en visualización, razonamiento diagramático, explicación, pureza de los métodos, entre otros. Dichas temáticas, además de que han abierto diversas posibilidades de investigación en filosofía de las Matemáticas, también ha permitido conectar debates y estudios que resultan pertinentes en el marco de la Educación Matemática.

Entre las discusiones pertinentes en Educación Matemática se reconocen los estudios centrados en la *explicación*, debido a que esta última constituye un proceso transversal que posibilita la comprensión de los objetos matemáticos. En FPM, se ha estudiado la explicación en las pruebas matemáticas, permitiendo la distinción entre pruebas explicativas y no explicativas, es decir, entre pruebas que solamente verifican (explicitan el *qué*) y pruebas que explican (explicitan el *porqué*) (Mancosu, 2018).

Los estudios de la *explicación* no solo han permitido explorar su naturaleza sino también su impacto en la Educación Matemática. Se reconocen recientemente dos reportes, por un lado, el de Frans y François (2023), quienes hacen una apuesta metodológica que permite fundamentar empíricamente las características que se reconocen de la explicación matemática, explorando el valor explicativo de las pruebas en libros de texto de secundaria, universidad y en artículos de investigación en Matemáticas. Por otro lado, el reporte que se presenta en CMC (2023, 3h59m18s) expuso algunos métodos que se probaron en el aula para aportar explicaciones a los estudiantes, mostrando así algunos éxitos y fracasos de los métodos.

La relevancia de los anteriores estudios se da en relación con su carácter empírico, destacando recursos y contextos de la Educación Matemática que ayudan a estudiar la naturaleza de la explicación matemática, mostrando que esta última no solo se da por su valor intrínseco sino también por las condiciones que tienen los sujetos para comprender una explicación. En esta línea, el presente reporte, derivado de una investigación en maestría, busca analizar empíricamente el valor explicativo de pruebas que se construyen en contextos de la educación superior, particularmente, en la formación del futuro profesor de Matemáticas con relación al Álgebra Moderna.

Para tal fin, en las siguientes secciones se explicitará la aproximación teórica, la metodología, los resultados y las conclusiones considerados en la investigación.

Aproximación teórica

Al considerar los elementos teóricos, resulta pertinente explicitar el sentido en el cual se conceptualiza la prueba y los sentidos en los cuales se define la explicación matemática, lo cual lleva a reconocer la prueba explicativa.

En primer lugar, se reconoce en educación superior la línea del Pensamiento Matemático Avanzado, en la que se inscribe el marco conceptual de Dualidad, Necesidad y Razonamiento

Repetido (DNR), surgido a partir de estudios que prestaron atención a las prácticas matemáticas de profesores de álgebra con el fin de mejorar su conocimiento matemático. En dicho marco se pretende estipular las condiciones para permitir que los estudiantes adquieran ideas y prácticas matemáticas mediante la interiorización, la organización y la retención de las Matemáticas que aprenden (Harel et al., 2017).

El DNR permite conceptualizar la prueba y las manifestaciones que tiene en los sujetos, concibiéndola como el proceso empleado por un individuo para eliminar o crear dudas sobre la verdad de una proposición (Harel y Sowder, 1998). Y reconociendo que la prueba se puede expresar mediante la relación entre productos y procesos en la resolución de problemas matemáticos por parte de un sujeto.

En segundo lugar, para la conceptualización de la explicación matemática existen diversos "modelos" que permiten establecer algunos acercamientos a su noción. Particularmente, vale la pena resaltar dos de estos modelos debido a su acercamiento a discusiones de la comprensión matemática.

La explicación según Cellucci

La primera de las propuestas de la explicación es aportada por Cellucci (2008), quien propone el método analítico como estrategia fundamental para la construcción de pruebas explicativas, destacando la relación entre explicación y descubrimiento. Concretamente, para Cellucci es indispensable ver el teorema como un problema, el cual requiere de una hipótesis plausible y que esté estrechamente relacionada con el objeto matemático abordado.

Para ejemplificar lo anterior, note el siguiente caso en el que se requiere probar que se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{1}{3}$$

La cual, se puede representar por el siguiente diagrama (como hipótesis):

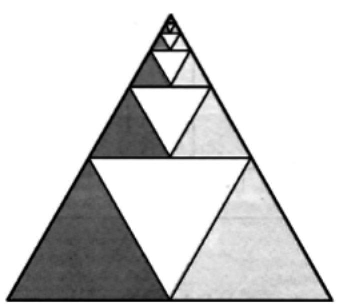


Figura 1. Diagrama de serie geométrica. Tomado de Cellucci (2008)

Aquí se puede notar que el triángulo blanco más grande es igual a $\frac{1}{4}$ del triángulo completo, el triángulo inmediatamente más pequeño es igual $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4^2}$, el triángulo inmediatamente más pequeño es igual a $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4^3}$ del triángulo completo, por lo que en el infinito la serie de triángulos blancos representan la serie $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots$, además, por la construcción, la serie de triángulos blancos es $\frac{1}{3}$ del triángulo total. Lo cual garantiza que se cumple la igualdad inicial.

En este sentido, la hipótesis (el diagrama) es factible porque representa la igualdad y es capaz de solucionar el problema. Por tanto, la prueba es explicativa según Cellucci.

La explicación según Lange

La segunda de las propuestas de la explicación es aportada por Lange (2014), quien propone, fundamentalmente, ver el teorema como un resultado y una configuración (se refiere a la cadena de argumentos), dentro de los cuales debe de destacarse una propiedad esencial del objeto matemático. La condición importante consiste en que la propiedad esencial de la configuración tenga coherencia con la propiedad esencial del resultado y viceversa, si esto se cumple, entonces la prueba es explicativa. Para ejemplificar lo anterior, note el siguiente caso asociado a la organización que tienen los números de calculadora (omitiendo al cero):

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Figura 2. Organización de números de calculadora. Tomado de Lange (2014)

Con esta organización se puede formar un número de seis dígitos tomando tres dígitos de cualquier fila, columna o diagonal principal del teclado en orden hacia adelante y luego en orden inverso; teniendo, por ejemplo, al 123321 (o al 147741, 159951, 753357, etc.). Estos números conservan la propiedad de ser divisibles entre 37, pero note que una prueba que verifique cada uno de los números por separado no explica por qué cada número es divisible por 37. En este sentido, Lange propone una prueba que es capaz de mostrar que los números tienen una propiedad que les permite trabajarse como una unidad, explicitándola de la siguiente manera:

Los tres dígitos a partir de los cuales se forma un número son tres números enteros a, $a+d$ y $a+2d$ en progresión aritmética. Si se toma cualquier número a partir de tres de estos números enteros a la manera de un número de calculadora, es decir, cualquier número de la forma $10^5a+10^4(a+d)+10^3(a+2d)+10^2(a+2d)+10(a+d)+a$. Reagrupando, se encuentra que esto es igual a $a(10^5+10^4+10^3+10^2+10+1)+d(10^4+2\cdot 10^3+2\cdot 10^2+10)=111111a+12210d=1221(91a+10d)=(3\times 11\times 37)(91a+10d)$.

La anterior prueba muestra una coherencia entre el resultado y la configuración de la prueba debido a que en ambas instancias se resalta que los números de calculadora conservan propiedades que los permiten ver como una unidad. Por tanto, la prueba es explicativa según Lange.

Conceptualización de prueba explicativa

Las anteriores aproximaciones permitieron hacer una conceptualización general de lo que se considera por prueba explicativa, concibiéndola como la producción que hace un sujeto que, desde su conocimiento actual, destaca una característica fundamental del objeto al que se refiere la proposición, evidenciando por qué se cumple y dando certeza sobre su validez.

Metodología

En la investigación se optó por una aproximación cualitativa con un enfoque hermenéutico de las producciones de los futuros profesores. Y la estrategia de investigación que se adoptó fue un estudio de caso. En cuanto al contexto y los participantes, la investigación se realizó con cuatro futuros profesores de Matemáticas de la Universidad del Valle, distribuidos en dos grupos de dos integrantes (Grupo 01: Diana y María, Grupo 02: Carlos y José), que se seleccionaron con el criterio de que hayan cursado -y aprobado- la asignatura de Álgebra Moderna en un periodo de no mayor a un año y que estuvieran dispuestos a participar de manera voluntaria.

Referente a la asignatura de Álgebra Moderna, esta corresponde a un curso de segundo año del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en dicha asignatura se propone un espacio de reflexión referido al desarrollo de las estructuras algebraicas en el contexto de las Matemáticas modernas y contemporáneas.

En cuanto a la recolección de los datos, se optó por tomar registros de vídeo, audio y escritos de las soluciones de los futuros profesores a problemas del Álgebra Moderna. En concreto, se registraron tres intervenciones con los futuros profesores, en cada intervención se tomaron audios y producciones escritas correspondientes al desarrollo de las resoluciones y se tomó un registro de vídeo en cada intervención correspondiente a la socialización de sus resoluciones.

Los problemas propuestos a los futuros profesores fueron seleccionados con base en los contenidos fundamentales del curso, y ajustados de tal manera que propiciara el uso de características esenciales de objetos matemáticos para la generación de explicaciones. La selección y redacción de los problemas fue validada mediante una prueba piloto con futuros profesores que estaban cursando la asignatura de Álgebra Moderna.

En cuanto al análisis de la información, se optó por considerar la transcripción de lo encontrado en cada una de las socializaciones, así como las producciones escritas y los registros de audio de las discusiones en la construcción de pruebas. Los datos obtenidos estuvieron asociados a las estrategias de solución que los futuros profesores movilizaron al resolver problemas del Álgebra Moderna.

El método concreto se compuso de tres fases intencionadas a identificar pruebas con valor explicativo. En la primera fase se codificó la intervención usando los principios de la teoría fundamentada (Teppo, 2015), lo cual permitió identificar líneas que podían ser relevantes en la intervención. En la segunda fase, se identificaron instancias en las que los futuros profesores explotaron alguna característica esencial del objeto matemático, debido a su potencial explicativo. Y en la tercera fase, se estudiaron las instancias de la segunda fase con relación a la conceptualización general y específica (Cellucci, 2008; Lange, 2014) de la explicación.

Resultados

A continuación, se presentan los resultados, evidenciando dos instancias de pruebas con valor explicativo de futuros profesores de Matemáticas.

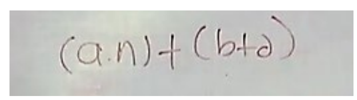
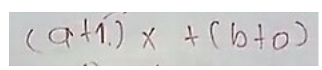
Propuesta de operación para relacionar polinomios

El segmento centrado en la "propuesta de operación para relacionar polinomios" dio cuenta de la resolución del primer punto de la segunda intervención por parte de Diana y María, en este momento, las futuras profesoras propusieron una operación en el conjunto determinado por los polinomios de primer grado ($ax + b$ con $a \neq 0$), de manera que permitiera caracterizar un grupo.

Inicialmente, las futuras profesoras plantearon la operación de suma usual entre polinomios ($(ax + b) + (cx + d)$ si y solo si $(a + c)x + (b + d)$), la cual permitió garantizar ciertas propiedades (como la asociatividad); sin embargo, las futuras profesoras encontraron dificultades al probar la existencia del neutro, principalmente por la condición que tenía el conjunto.

En este sentido y luego de explorar otras opciones en la operatividad, propusieron modificar la operación inicial, la cual permitió solucionar el problema. Note el siguiente segmento en el que se modificó la operación:

Tabla 1
Modificación de una operación inicial.

	Turno:	Modificación de la operación inicial
46	Diana:	sí, ahorita sí… Ah pero yo podría definir la suma de otra forma, porque ahí no me la dan
47	María:	sí, porque yo te dije que podíamos inventar la suma.
48	Diana:	porque la suma podría yo definirla como los dos coeficientes multiplicados más y los otros dos sí con la suma sin ningún problema  y en la primera (creo que se refiere a la operación entre los coeficientes que acompañan a la X) no  me afecta nada, porque cae en N, entonces el neutro tiene que ser igual a uno.
50	Investigador:	ya.. sí, pero en este caso ya toca mirar las otras, es decir, que sea asociativa…
51	Diana:	no, claro que sí, obvio, si quieres yo retrocedo.

Fuente: elaboración propia.

La modificación de la propuesta inicial permitió solucionar el problema, teniendo coherencia con la explicación planteada por Cellucci (2008), concretamente porque Diana y María plantean una hipótesis que está relacionada estrechamente con el objeto matemático abordado (polinomios de primer grado en condición de grupo). Al estudiar las limitaciones que tiene su hipótesis inicial, pudieron desarrollar una modificación (la nueva hipótesis) que permitió garantizar el grupo. En este sentido, el valor explicativo de la prueba se da en la medida en que se explora la naturaleza de la hipótesis, la cual, está estrechamente relacionada con el objeto matemático.

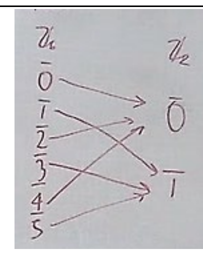
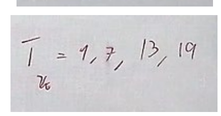
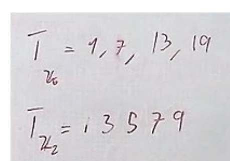
Reconocimiento de una partición de $\mathbb{Z}_2$

El segmento referente al "Reconocimiento de una partición de $\mathbb{Z}_2$" dio cuenta de una resolución en la segunda intervención por parte de Carlos y José. Concretamente, Carlos y José pretendieron estudiar la condición del homomorfismo para determinada aplicación que iba desde el conjunto $\mathbb{Z}_6$ (clases de residuales de los números enteros al ser divididos entre seis) al conjunto $\mathbb{Z}_2$, considerando la suma de clases en ambos conjuntos. Particularmente, la aplicación consistió en el residuo que queda luego de dividir entre dos elementos de alguna clase de $\mathbb{Z}_6$.

Carlos y José, inicialmente, hicieron una verificación por casos particulares de la condición del homomorfismo, a saber, que se satisfaga la igualdad $\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ siendo $*$ y $\cdot$ las operaciones correspondientes a cada estructura. Esta manera de actuar permitió ver que la aplicación satisfizo la condición del homomorfismo, pero no explicó el porqué.

No obstante, posterior a la verificación caso por caso, Carlos y José se propusieron exponer la naturaleza de la aplicación, lo cual los llevó a reconocer la relación que se establece entre los conjuntos (un aspecto llamativo en la formulación del problema). Esta exposición se logró gracias a una representación diagramática. El siguiente segmento expone sus acciones:

Tabla 2
Diagramación de la aplicación entre $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_2$.

	Turno:	Diagramación de la aplicación entre $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_2$	
125		Yo como para explicarlo mejor hice como de esta forma, tenemos la clase del cero, la clase del uno, la clase del dos, la clase del tres, la clase del cuatro y la clase del cinco. Y van hacia la clase cero y la clase del uno. Esto es $\mathbb{Z}_6$ y esto es $\mathbb{Z}_2$. entonces todos los que nos dan residuo cero van a ir a la clase del cero, y los que dan residuo uno a la clase del uno.	
126	Carlos:	Entonces la clase del 1 en $\mathbb{Z}_6$ se va a ver como 1 7 13 19 y así sucesivamente.	
127		Entonces van a ser estos elementos y siempre van a ser números impares, y de la misma forma el 1 en $\mathbb{Z}_2$ también va a tener todos los números impares, 1 3 5 7 9	
128		Entonces vemos que todos los elementos de la clase del 1 en $\mathbb{Z}_6$ van hacia la clase del 1 en $\mathbb{Z}_2$.	

Fuente: elaboración propia.

Las acciones de Carlos y José estuvieron relacionadas con la propuesta de Lange (2014), debido a que los futuros profesores tuvieron la capacidad de exponer la naturaleza de los conjuntos propuestos en el problema, que claramente era un aspecto esencial para lograr la comprensión de la aplicación. Esto permitió entender que la aplicación sugería una partición entre los conjuntos, lo cual podría ser un paso importante para estudiar la operatividad de sus elementos y así garantizar el homomorfismo. En concreto, Carlos y José expusieron elementos esenciales del resultado dentro de la configuración de su prueba lo cual destaca el valor explicativo de esta última.

Conclusiones

Fue posible reconocer momentos de las intervenciones en los cuales se construyeron pruebas con valor explicativo, esto mediante la identificación de segmentos en los cuales se explotaron las características de un objeto matemático. Esto permitió estudiar la naturaleza de la explicación y poder reportar instancias que fundamenten sus particularidades.

También fue posible reconocer otros aspectos, como lo fueron las tendencias en las maneras de probar de los futuros profesores, evidenciando el método analítico en el primer momento y la prueba caso por caso del segundo momento. Así como el rol que pueden jugar las representaciones para la generación de explicaciones, nótese que en el segundo momento la explicación y entendimiento de la aplicación se dio en la medida en que se esquematizó su comportamiento.

Si bien se reconoce que los datos no pretenden ser exhaustivos referentes al estudio de la explicación en educación superior, esta investigación aporta con relación al establecimiento de conexiones teóricas y metodológicas, que pueden sugerir otras investigaciones asociadas al vínculo entre Filosofía de las Matemáticas y Educación Matemática.

Referencias y bibliografía

Carter, J. (2019). Philosophy of mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, 27(1), 1-32.

Cellucci, C. (2008). The nature of mathematical explanation. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 39(2), 202-210. https://doi.org/10.1016/j.shpsa.2008.03.006

Frans, J., & François, K. (2023, July). Explanatory proofs in mathematics classroom practices: An investigation in empirical philosophy of mathematics. In Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) (No. 10). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME.

Hamami, Y., & Morris, R. L. (2020). Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators. *ZDM Mathematics Education*, 52(6), 1113-1126. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01159-5

Harel, G., Soto, O. D., & Olszewski, B. (2017). DNR-based professional development: Factors that afford or constrain implementation. In A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro, & S. Brown (Eds.). *Proceedings of the 20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp.1238–1242).

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), Research on Collegiate Mathematics Education (Vol. III, pp. 234–283). Providence: AMS.

Lange, M. (2014). Aspects of mathematical explanation: Symmetry, unity, and salience. *Philosophical Review*, 123(4). 485–531. https://doi.org/10.1215/00318108-2749730

CMC. (13 de junio de 2023). *Mathematics Education meets the Philosophy of Mathematical Practice - Day 2* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=bsqOkKk4CVs

Mancosu, P. (2016). Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática. Disputatio Philosophical Research Bulletin, 5(6), 131-156. https://doi.org/10.5281/zenodo.3551818

Mancosu, P. (2018). Explanation in mathematics. In E. N. Zalta (Ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy (summer 2018 edition). https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/mathematics-explanation/.

Teppo, A.R. (2015). Grounded Theory Methods. En: Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N. (eds) Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_1