



Covariación exponencial continua: una razón de cambio directamente proporcional al valor de la magnitud variable de interés

Luis Miguel **Amador** Silva

Departamento de Matemáticas, Posgrado en Matemática Educativa, Universidad de Sonora
México

amador.luism6@gmail.com

José Ramón **Jiménez** Rodríguez

Departamento de Matemáticas, Posgrado en Matemática Educativa, Universidad de Sonora
México

joseramon.jimenez@unison.mx

Resumen

Este trabajo presenta los avances¹ de un proyecto de intervención cuyo propósito es desarrollar una secuencia de actividades didácticas que promueva el pensamiento variacional en estudiantes de ingeniería. Metodológicamente, se realizó una revisión crítica a la literatura especializada en el área, en busca de hipótesis teóricas que fundamentaran nuestras decisiones didácticas, entre ellas; el diseño de las actividades, su implementación y valoración. Se espera proporcionar a los estudiantes herramientas para comprender la variación continua y el cambio en progreso, desde la perspectiva de un enfoque dinámico con el uso de cantidades infinitesimales, ofreciendo una alternativa a la enseñanza actual que se basa en nociones estáticas como función numérica, límites y la interpretación discreta de la variación. El desarrollo didáctico se centrará en el estudio de fenómenos de comportamiento exponencial, favoreciendo así la comprensión y aplicación del Cálculo Diferencial en situaciones prácticas.

Palabras clave: Covariación exponencial continua; Enseñanza del Cálculo Diferencial; Pensamiento variacional; Proyecto de intervención; Magnitud variable.

¹ *Nota:* Al momento de la redacción de este reporte, el trabajo se encuentra en desarrollo. Actualmente se ubica en la etapa de diseño de las actividades didácticas que conformarán la propuesta de enseñanza.

Definición y relevancia del problema

El estudio del Cálculo como herramienta para entender y cuantificar fenómenos y procesos del entorno se constituye como uno de los pilares de aprendizaje en la educación de los futuros ingenieros. Por tanto, resultará crucial que ellos logren desarrollar habilidades para innovar y argumentar de forma adecuada, a fin de solventar las dificultades dentro de sus campos de estudio. Estos jóvenes necesitarán adquirir competencias matemáticas que les posibiliten comprender, interpretar y reflexionar sobre los fenómenos del mundo real, y plasmarlos en un lenguaje matemático (Capote et al., 2016; Sharhorodska et al., 2018).

Una crítica fundamental a la enseñanza tradicional y formal del Cálculo es que el enfoque en el cálculo de límites y derivadas no permite a los estudiantes comprender cómo estos conceptos se aplican en situaciones reales (Loachamín et al., 2023; Cruz y Herrera, 2024). La idea de límite en sí misma no está vinculada a la representación de una realidad física, y es una abstracción pura sin conexión directa con ella. Como consecuencia, los estudiantes tienden a percibir esta disciplina matemática como una tarea mecánica, donde se abordan problemas de forma abstracta, sin comprender el entorno en el cual los fenómenos tienen lugar.

De acuerdo con Artigue (2009), las estrategias didácticas que se centran demasiado en la formalización y la rigurosidad matemática pueden confundir a los estudiantes cuando intentan aplicar esos conocimientos en situaciones reales. Al no vincular los conceptos matemáticos a escenarios del mundo real o laboral, los estudiantes tienden a memorizar en lugar de comprender a conciencia los problemas, lo que les dificulta adaptarse y resolver problemas reales en el campo de la ingeniería. Kaput (1994) sugiere que “la enseñanza del Cálculo Diferencial debe ir más allá de algoritmos estáticos, permitiendo que los estudiantes exploren la dinámica de los sistemas a través de la experimentación y la simulación” (p. 110).

Específicamente, en el tratamiento didáctico de fenómenos de comportamiento exponencial, Khanh et al. (2020), quienes analizaron el enfoque de enseñanza de las nociones exponenciales en libros de texto, mencionan que éstos tienden a seguir un patrón: primero se define el concepto, luego se presentan ejemplos prácticos, y finalmente se plantean problemas de aplicación. En esta organización ha habido una transformación pedagógica en el proceso de desarrollo de las nociones exponenciales, en comparación con su surgimiento y evolución histórico-epistemológica. Esta transformación pasa por alto la secuencia temporal del desarrollo del Cálculo y sus objetos de estudio (Khanh et al., 2020, Jiménez et al., 2022).

Dificultades en la enseñanza y aprendizaje de nociones relacionadas con la covariación exponencial continua

En la Matemática del cambio, la comprensión de la covariación y la continuidad en procesos dinámicos es esencial para diversas disciplinas, desde las ciencias naturales hasta las ciencias sociales, la economía y la ingeniería (Thompson y Carlson, 2017; Hodañová y Nocar, 2016). Estos conceptos son fundamentales no solo para la predicción de fenómenos naturales y científicos, sino también para el desarrollo de habilidades cognitivas y analíticas en los estudiantes.

Particularmente, los procesos de covariación exponencial, matematizados mediante modelos exponenciales, son de gran importancia en muchos campos. Se utilizan para resolver problemas en ciencia y tecnología, como en arqueología, finanzas y fenómenos de crecimiento y decrecimiento natural (Khanh et al., 2020). Estos modelos se basan en la noción de que las magnitudes variables en ciertos fenómenos muestran un comportamiento continuo y suave a lo largo del tiempo o el espacio, sin saltos abruptos ni interrupciones (Castillo-Garsow et al., 2013), donde la variación infinitesimal de la magnitud variable de interés es directamente proporcional a su valor actual, $dy = kydx$, y por lo tanto, la razón instantánea de cambio es directamente proporcional al valor de la magnitud, $\frac{dy}{dx} = ky$. Sin embargo, para muchos estudiantes acostumbrados a pensar en cambios lineales, la naturaleza exponencial del crecimiento y decrecimiento resulta confusa (Davis, 2009). La idea de que las cantidades aumenten o disminuyan de manera exponencial, es decir, en proporción a su valor actual resulta difícil de asimilar, ya que los estudiantes tienden a simplificar relaciones y buscar patrones lineales o discretos (Sureda y Otero, 2013; Campo-Meneses y García-García, 2020).

La representación gráfica de procesos covariacionales también es de gran importancia en el desarrollo de conceptos relacionados con la noción exponencial, entre ellos la razón instantánea de cambio. Sin embargo, para Saldanha y Thompson (1998), así como para Johnson y McClintock (2018), la comprensión e interpretación de gráficos como representaciones de un continuo plantea desafíos para los estudiantes. Esta dificultad se manifiesta con mayor claridad cuando los estudiantes recurren a la técnica de punteo para analizar las gráficas, es decir, trazar algunos puntos para inferir un comportamiento general, y luego conectar estos puntos para formar una curva. Si bien esta técnica es comúnmente empleada para graficar funciones numéricas, puede llevar a los estudiantes a percibir la gráfica covariacional como una representación estática de una relación entre cantidades, pasando por alto su naturaleza dinámica y continua.

Varios estudios (Bressoud et al., 2016; Larsen et al., 2017; Thompson y Harel, 2021) han recurrido al trabajo pionero de Orton (1983) para resaltar las dificultades de los estudiantes en la comprensión del significado cuantitativo, tanto de la razón promedio de cambio, como de la razón instantánea de cambio. Orton señala que estas dificultades surgen de una comprensión deficiente del concepto de razón como relación multiplicativa. Estas investigaciones subrayan la importancia de fortalecer la comprensión temprana de conceptos fundamentales como la razón de cambio, ya que sientan las bases para el éxito en Cálculo y otras áreas de las Matemáticas.

Thompson y Harel (2021) señalan que una fuente más elemental de las dificultades de los estudiantes con el concepto de razón instantánea de cambio se relaciona con la poca coordinación de las relaciones entre covariaciones. En lugar de concentrarse en las relaciones cuantitativas entre las magnitudes, usualmente se presta más atención a la pendiente de las rectas secante y tangente, así como a los valores de entrada de la función. Este enfoque hace que los estudiantes no comprendan la fenomenología dinámica de la razón de cambio, en particular, su vinculación con procesos exponenciales debido a la desconexión entre los conceptos matemáticos y las aplicaciones reales (Khanh et al., 2020; Presmeg y Nenduradu, 2005).

Objetivo

La intención principal de nuestro trabajo es fundamentar y desarrollar un acercamiento didáctico para la enseñanza del Cálculo Diferencial dirigido a estudiantes de ingeniería, desde una perspectiva variacional y dinámica mediante el uso de cantidades infinitesimales. En particular, nos centraremos en abordar las dificultades de enseñanza y aprendizaje relacionadas con la covariación exponencial continua, buscando superar la visión formal (estática y algorítmica) que predomina en la enseñanza tradicional de estos conceptos matemáticos en el salón de clase.

Fundamentos contextuales sobre el pensamiento variacional

En la literatura de investigación en Matemática Educativa no es difícil detectar que el pensamiento variacional ha sido explorado desde diversas perspectivas, las cuales se pueden clasificar en dos categorías. En la primera categoría se encuentran las posturas que relacionan el pensamiento variacional con el estudio de variables y funciones como entidades abstractas, enfocándose en el análisis de las funciones numéricas y sus propiedades a partir de definiciones formales, en el espíritu del Análisis Matemático. Según este enfoque, los fenómenos de la realidad, junto con las magnitudes asociadas, se consideran ejemplos ilustrativos o aplicaciones secundarias de las funciones. Por otro lado, en la segunda categoría se encuentran aquellos que lo ven como un tipo de pensamiento matemático que se centra en el análisis y la matematización de magnitudes variables presentes en fenómenos y procesos, ya sean físicos o sociales, en el espíritu del Cálculo primigenio. Estas interpretaciones enfocan sus realizaciones didácticas en la introducción del concepto de magnitud física y en la representación matemática de su comportamiento, utilizando el concepto de magnitud variable como modelo.

Particularmente, en este proyecto se pretende abordar didácticamente las dificultades de enseñanza y aprendizaje relacionadas con las nociones dinámicas de la covariación exponencial continua desde la perspectiva del pensamiento variacional. Dicho esto, nos alineamos con la postura que considera al pensamiento variacional como un tipo de pensamiento matemático que requiere una manera dinámica de pensar, lo que nos lleva a situarnos en la segunda categoría mencionado anteriormente.

Enfoque del pensamiento variacional

A partir del análisis crítico de la literatura especializada sobre el tema, hemos llegado a concebir que el pensamiento variacional exige una manera dinámica de pensar (Vasco, 2003), y que está directamente relacionado con el estudio de las magnitudes variables. Concebimos a las *magnitudes variables* como aquellas propiedades o cualidades perceptibles y cuantificables en los fenómenos y procesos de la realidad, que por su naturaleza intrínseca son dinámicos. Las magnitudes variables realmente varían. Están por doquier presentes en los así llamados fenómenos o procesos de variación y cambio. En el pensamiento variacional el papel protagónico lo desempeñan las magnitudes variables, que son objetos matemáticos de una naturaleza esencialmente distinta a la de las funciones numéricas, mientras que éstas figuran sólo como actores secundarios, como una de las herramientas emergentes para la matematización de las magnitudes variables y de los procesos en que ellas intervienen (Jiménez et al., 2022).

En el estudio presentado por Thompson y Carlson (2017), así como por Jiménez et al. (2022), los autores conciben que el pensamiento variacional está constituido por dos componentes: el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional, ambos tienen que ver con la conceptualización matemática de las magnitudes variables. En el primer caso, se despliega el razonamiento y trabajo matemático sobre una sola magnitud variable en la recta numérica, y en el segundo, el razonamiento simultáneo y el trabajo matemático sobre dos magnitudes variables en el plano cartesiano.

En coherencia con esta postura, se proponen constructos teóricos sustentados en la visión del pensamiento matemático según Harel (2008), para establecer un marco teórico y explicativo orientado al desarrollo del pensamiento variacional, recuperando el dinamismo exigido por este tipo de pensamiento matemático. El propósito es ofrecer herramientas conceptuales y metodológicas para diseñar tareas de aprendizaje que fomenten el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional, alejándose del análisis de objetos matemáticos estáticos.

Marco teórico y explicativo

Nuestro marco teórico y explicativo se sustenta bajo la concepción de Harel (2008) quien afirma que el objetivo principal de la Educación Matemática consiste en desarrollar en el estudiante el pensamiento matemático, y que éste se compone de un conjunto de maneras matemáticas de entender y maneras matemáticas de pensar. El autor define a las maneras de entender como el producto cognitivo particular de un acto mental realizado por una persona, y a las maneras de pensar como las características cognitivas de un acto mental, reveladas de las acciones repetidas de sus maneras de entender.

Esta profunda reflexión realizada por Harel en torno a la caracterización del conocimiento matemático y del propósito fundamental de la enseñanza de las Matemáticas, y promovida por él activamente durante los años recientes, le ha llevado a formular un esquema metodológico para alcanzar tal propósito. Dicho esquema lo ha denominado “la enseñanza basada en DNR”. El acrónimo en la denominación proviene de los tres principios fundamentales en los que se sustenta dicho esquema; el principio de Dualidad (D), el principio de Necesidad intelectual (N), y el principio del Razonamiento repetido (R). De especial interés en esta comunicación es el principio de Dualidad.

El principio de Dualidad establece que los estudiantes desarrollan maneras de pensar solo mediante la construcción de maneras de entender, y las maneras de entender que producen están determinadas por las maneras de pensar que ya poseen (Harel, 2008, p. 19). Este principio afirma que las maneras de entender y las maneras de pensar son interdependientes: entre ellas existe una relación bidireccional.

Propuesta teórica: una estructura operativa para el desarrollo del pensamiento variacional

Tomando como base el enfoque del pensamiento variacional, y la visión de pensamiento matemático según Harel (2008), proponemos que, para desarrollar el pensamiento variacional en

los estudiantes, se deben diseñar estrategias de aprendizaje que les permitan generar maneras variacionales de entender y maneras variacionales de pensar. A las *Maneras Variacionales de Entender* las definimos como el producto cognitivo particular del acto mental de producir imágenes dinámicas relacionadas con las características o propiedades esenciales de las magnitudes variables, presentes en los fenómenos de variación y cambio en progreso, y a las *Maneras Variacionales de Pensar* las describimos como las características cognitivas del acto mental de producir imágenes dinámicas realizadas por el estudiante, reveladas de las acciones repetidas de sus maneras variacionales de entender.

Por ejemplo, si un estudiante formula una interpretación, similar o igual, argumentando que “los valores numéricos que toma la literal que representa a una magnitud variable están asociados con una unidad de medida”, está evidenciando una manera variacional de entender, porque es un producto cognitivo particular de su acto mental de interpretar una característica importante de las magnitudes variables. Y si sostiene más de una manera variacional de entender es probable que posea, además, la manera variacional de pensar que “las magnitudes variables toman progresivamente valores numéricos que podemos dividir en tres grupos: el valor actual, los valores previos y los valores posteriores”.

Para la organización, diseño y análisis de las estrategias o actividades didácticas se establece una estructura operativa de las implicaciones metodológico-didácticas resumidas en tres etapas esenciales.

1. Prediseño de las estrategias didácticas: el profesor deberá identificar y caracterizar las *Maneras Variacionales de Entender (MVdE)* que espera promover en los estudiantes, y especificar los actos particulares de interés.
2. Diseño de las estrategias didácticas: para la elaboración y organización de las actividades didácticas, esbozar una secuencia cognitivamente lógica de obtención de los productos cognitivos que involucran los actos mentales presentes en los estudiantes en forma de declaraciones y acciones.
3. Análisis de las estrategias didácticas desarrolladas por los estudiantes: el profesor deberá inferir de forma indirecta las características cognitivas comunes entre los productos cognitivos de los actos mentales presentes en las actividades desarrolladas por los estudiantes, estas son las *Maneras Variacionales de Pensar (MVdP)* de los estudiantes.

En nuestro trabajo, hemos identificado y caracterizado un conjunto de *MVdE* y *MVdP*, a nivel general, referidas a cualquier proceso de variación. A partir de ellas, se han identificado y caracterizado *MVdE* más específicas asociadas a los procesos de covariación exponencial continua, las cuales son fundamentales para orientar el diseño de nuestra secuencia de actividades. Lamentablemente, no hay espacio aquí para analizar con detalle este punto. Más adelante en este documento, en la Tabla 1, se presentan de manera resumida algunas de dichas *Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial Continua (MVdE-CExpC)*.

Consideraciones y resultados preliminares

A partir de la concepción del pensamiento variacional como el tipo de pensamiento matemático centrado en el razonamiento dinámico de magnitudes variables, y considerando los

principios del modelo DNR de Harel (2008), se establecen las siguientes pautas para orientar el diseño de nuestra propuesta de enseñanza:

1. Priorizar el análisis de fenómenos reales e identificar las magnitudes variables de interés: Las tareas deben partir de contextos reales en los que los estudiantes puedan identificar y razonar sobre magnitudes cuya variación sea observable y cuantificable. Esto permite anclar el conocimiento matemático en experiencias significativas, en lugar de comenzar con funciones como objetos abstractos. Particularmente en este trabajo interesan los fenómenos de comportamiento exponencial, dicho esto, en la Tabla 1, se muestran de manera resumida algunas *MVdE-CExpC* que se promoverán en nuestra secuencia de actividades didácticas, recurriendo a la etapa de prediseño de las estrategias didácticas.

Tabla 1

Algunas Maneras Variacionales de Entender la Covariación exponencial Continua.

<i>MVdE-CExpC1</i>	La razón promedio de cambio de una magnitud covariante de comportamiento exponencial, para incrementos iguales de la magnitud variable independiente, es igual a una constante numérica positiva.
<i>MVdE-CExpC2</i>	Una magnitud covariante de comportamiento exponencial con cambios aritméticos iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales iguales en la magnitud variable dependiente.
<i>MVdE-CExpC3</i>	Una magnitud covariante de comportamiento exponencial $N(\Delta h)$ con cambios aritméticos iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales en la magnitud variable dependiente de la forma $N(a^{\Delta h} - 1)$.
<i>MVdE-CExpC4</i>	Una magnitud covariante cuya razón instantánea de cambio es proporcional al valor actual de dicha magnitud variable.

2. Diseñar tareas que promuevan la construcción de significados desde la necesidad intelectual: en coherencia con el principio de Necesidad del modelo DNR, es fundamental que las tareas presenten desafíos cognitivos que despierten en los estudiantes la necesidad de matematizar la variación, en lugar de imponer definiciones, gráficas o fórmulas desde el inicio.
3. Utilizar representaciones gráficas dinámicas y herramientas tecnológicas: la incorporación de entornos como GeoGebra posibilita la visualización continua del comportamiento de magnitudes. Esto permite a los estudiantes experimentar el carácter dinámico de la covariación, superando la percepción estática asociada a gráficas trazadas con la técnica de punteo.

La intención primaria de nuestro trabajo es presentar un acercamiento didáctico basada en el tratamiento dinámico de la covariación exponencial continua, superando las visiones estáticas y algorítmicas que eventualmente dominan el tratamiento de las ideas matemáticas en el salón de clase. En virtud de ello, el resultado más importante que se espera consiste en obtener evidencia sólida que permita valorar si nuestra propuesta contribuye o no a promover en el estudiante el desarrollo de maneras variacionales de pensar en un contexto centrado en el estudio de la covariación exponencial continua.

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (2009). Didactical Design in Mathematics Education. Nordic Studies in Mathematics Education, Grupo Editorial Brill, 7-18, 14(3). DOI:10.1163/9789087907839_003
- Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). Teaching and Learning of Calculus. Springer Nature. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32975-8>
- Campo-Meneses, K. G., y García-García, J. (2020). Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. *Educación Matemática*, 32(3), 209-240.
- Capote León, G. E., Rizo Rabelo, N., y Bravo López, G. (2016). La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria. *Revista Universidad y Sociedad*, 8(1), 21-28.
- Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. For the Learning of Mathematics, 33(3), 31-37.
- Cruz L., S. L. y Herrera C., C. J. (2024). Desafíos en la enseñanza del Cálculo en contextos universitarios en un enfoque por competencias. *Plumilla Educativa*, 33 (1) 1-27p. <https://doi.org/10.30554/p.e.1.5099.2024>
- Davis, J. D. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 365-389.
- Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. En B. Gold & R. Simons (Eds.), Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy, Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 265 – 290. <https://mathweb.ucsd.edu/~harel/What%20Is%20Mathematics.pdf>
- Hodaňová, J., & Nocar, D. (2016). Mathematics importance in our life. In INTED2016 Proceedings (pp. 3086-3092). IATED. DOI: 10.21125/inted.2016.0172
- Jiménez R., J. R., Grijalva M., A., Milner, F. A., Dávila A., M. T., y Romero F., C. F. (2022). Reconceptualización didáctica del Cálculo. Editorial de la Universidad de Sonora. México. <https://doi.org/10.47807/UNISON.201>
- Johnson, H. L., & McClintock, E. (2018). A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 97, 299-316.
- Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. En A. H. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 77-156). Lawrence Erlbaum Associates.
- Khanh, T., L. C., Tien, L. V., & Loi, N. H. (2020). An analysis of the concept of exponential functions in history and textbooks in Vietnam. *The International Journal of Engineering and Science*, 9(11), 23-28.
- Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., & Graham, K. (2017). Understanding the concepts of calculus: Frameworks and roadmaps emerging from educational research. *Compendium for Research in Mathematics Education*, 526-550.
- Loachamín Iza, H. D., Vargas Chavarrea, Álvaro P., Andrade Villarreal, J. V., y Puente Ponce, P. F. (2023). Enseñanza, aprendizaje y enfoque de la matemática en la ingeniería. *Alfa Publicaciones*, 5(3.2), 6–20. <https://doi.org/10.33262/ap.v5i3.2.400>
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics*, 14(3), 235-250.
- Presmeg, N., & Nenduradu, R. (2005). An Investigation of a Preservice Teacher's Use of Representations in Solving Algebraic Problems Involving Exponential Relationships. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 105-112. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-94-6300-561-6.pdf>
- Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Sharhorodska, O., Álvarez, A. P., y Alpaca, N. B. (2018). Las matemáticas y la formación del ingeniero, como una relación simbiótica. *Revista Referencia Pedagógica*, 6(2), 175-189.
- Sureda, P., y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Revista Educación matemática*, 25(2), 89-118. DOI: 10.24844/EM
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). Ideas foundational to Calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM—Mathematics education*, 53(3), 507-519.
- Vasco U., C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In Anais eletrônicos do CIAEM—Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau (Vol. 9, pp. 2009-2010).