El enigma de la quíntica: Historia y trascendencia

Carlos **Sánchez** Fernández
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

El objetivo de esta conferencia es mostrar cómo el uso de la Historia de la Matemática puede ayudar a comprender mejor la esencia y el significado actual de un tema no siempre bien comprendido: el llamado “enigma de la quíntica”. La ecuación general quíntica o de quinto grado de x en R, tiene la forma

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0, \text{ donde } a, b, c, d, e, f$$

son coeficientes en Q, y a no puede ser cero. A diferencia de las ecuaciones de grado inferior (primer, segundo, tercer y cuarto), no existe una fórmula general para resolver todas las ecuaciones quínticas mediante radicales, un resultado demostrado primero por el matemático noruego Niels Abel y en caso más general por la teoría del francés Évariste Galois. El problema es que se habla de “imposibilidad de resolución” y, no obstante, se conocen infinitas quínticas que son solubles por radicales. En nuestras clases no siempre queda claro ¿por qué unas ecuaciones de quinto grado son solubles y otras no? Y ¿por qué es imposible encontrar una fórmula general para las que son solubles?

Hacemos un paseo por la historia del esclarecimiento del “enigma”, y concluimos mencionando la trascendencia epistemológica que tuvo y mantiene este asunto. Nos interesa estimular la reflexión sobre el uso de la Historia de la Matemática en nuestra práctica docente.

Palabras clave: Ecuación de quinto grado; Enseñanza del Álgebra; Epistemología; Historia de la Matemática; Teoría de Galois.

Introducción

El asunto que nos ocupa es un tema de la enseñanza del Álgebra, concretamente sobre la solubilidad de las ecuaciones algebraicas de quinto grado y la teoría que lo esclarece es la "Teoría de Galois" surgida en el siglo XIX,. En la Edad Moderna occidental, a partir del siglo XVI, se creó un misterio alrededor de la búsqueda de un algoritmo de solución para cualquier tipo de quíntica. Este "enigma" tiene una atractiva historia y tuvo un impacto significativo en la Epistemología de la Matemática que trasciende hasta llegar a nuestra época de revoluciones tecnológicas y científicas. (Ver p.e. [Mei, 2020] o [Tang, 2012]). Resulta interesante notar que en 1963 el talentoso matemático soviético V. Arnold encontró una solución topológica al "enigma de la quíntica" y abrió una nueva rama la "Teoría de Galois Topológica"[1]

Primero se sucedieron muchos intentos por encontrar una expresión del polinomio de quinto grado más simple, una forma más cómoda, manipulable, que diera idea de qué se debía hacer para resolver por radicales estas ecuaciones. Una de las primeras transformaciones, que todavía hoy se sigue utilizando, es la de un polaco-alemán: Walter von Tschirnhaus y por eso se les llaman *transformaciones de Tschirnhaus* que permiten llevar la ecuación general

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

a la forma principal reducida

$$x^5 + px^2 + qx + r = 0 \; en \; \mathbb{Q}[X]$$

Eso fue a finales del siglo XVII (1683) y así se eliminan los términos de x^3 y x^4.. A finales del siglo XVIII, se realizó una simplificación mayor que lleva la quíntica a una forma muy simple, que se llama *forma normal*

$$z^5 - d_1 z + d_0 = 0,\; d_1 \text{ y } d_0 \in \mathbb{Q}.$$

Vean lo reducida que queda la quíntica, solamente le queda el término de 5^0 grado y el de 1^0 grado, además del término independiente. Se pretende encontrar una solución algebraica, es decir, una fórmula donde solo aparezcan sumas y restas, multiplicaciones y cocientes, potencias y radicales, en expresiones algebraicas con los coeficientes de la quíntica. Aparentemente, la forma normal nos facilita resolver el problema, pero ¿cuáles son los valores de $d_1 \; y \; d_0$? ¿cómo se obtienen en función racional de los coeficientes? ¿es siempre posible? Y después, ¿es fácil invertir el proceso y encontrar las raíces de la ecuación original? No siempre es fácil responder estas cuestiones, aunque es el tipo reducido de quíntica más socorrido[2].

Pero vayamos por partes: primero, conversaremos un poco sobre la esencia del enigma de la quíntica y hablaremos brevemente de quienes y cómo contribuyeron a su

[1] Esta noticia aparece en el "Tribute to Vladimir Arnold" publicado en los *Notices of the American Mathematical Society* **59** (3): 393. March 2012. doi:10.1090/noti810.

[2] A partir de la introducción de los medios de cómputo se volvió a investigar sobre los algoritmos para resolver ecuaciones de grado mayor que 4. Sobre la quíntica existen resultados muy eficientes, un algoritmo completo aparece en [King, 2009]. Recomendamos el artículo de [Spearman y Williams, 1994] que trae una clasificación de las quínticas solubles.

esclarecimiento; segundo, estableceremos las diferencias en las contribuciones de Abel y Galois, las figuras que nosotros consideramos protagonistas principales. Y, tercero, mencionaremos sin detalles, el impacto inmediato y posterior a la introducción de las máquinas computadoras electrónicas

Parte I. La esencia del "enigma de la quíntica" y su esclarecimiento.

Hagamos un resumen rápido sobre la cuádrica, la cúbica y la cuártica. La cuádrica se dominaba en casos aislados desde la antigüedad y en el medioevo oriental; tanto en la India, como en el Imperio Islámico se usó el algoritmo con una formulación retórica o sincopada, con pocos símbolos. Parece ser que el flamenco Simón Stevin, en el s. XVI, fue el primero que en Occidente expuso la fórmula para la cuádrica. En el renacimiento italiano Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari y, algo más tarde, Bombelli, cerraron el problema de la cúbica y la cuártica. Es en el *Ars Magna* de Cardano en 1545, donde se publica por primera vez la fórmula para resolver la cúbica y la forma para reducir la cuártica a una cúbica[3].

Así el siguiente paso era encontrar una fórmula similar para la quíntica. Entonces aparece el "enigma de la quíntica". En esencia, ¿en qué consiste este enigma? A partir de 1545 cuando ya se resuelven las ecuaciones de grados inferiores al quinto, mucha gente, matemáticos y no matemáticos, se interesan por casos particulares de quínticas (astrónomos sobre todo, porque en astronomía aparecen ecuaciones de quinto grado para la solución de distintos problemas), algunas se resolvían y otras no. La cuestión es que pronto se dieron cuenta de que hay infinitas quínticas que son solubles y hay infinitas que no son solubles por radicales y el "enigma" entonces era saber por qué eran de un tipo o de otro y si no existía una fórmula general con radicales para las solubles. Por otra parte, todas las que podían ser reducibles a un producto de dos polinomios de grado menor, eran solubles ya que todos los polinomios de grado menor eran solubles. El problema reside en que no es fácil determinar que un polinomio sea reducible o irreducible -tanto como determinar si un número es primo o es compuesto-. No existen muchos criterios ni algoritmo siempre eficiente. Uno de los más usados es el *criterio de Eisenstein* (del s. XIX) "Sea el polinomio de grado n: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ con coeficientes enteros. Si existe un número primo p tal que se cumplen las tres condiciones siguientes:

- p divide cada coeficiente $a_{i\,;}\ i \neq n$
- p no divide $a_{n\,;}\, y$
- p^2 no divide $a_{0\,;}$

Entonces el polinomio es irreducible". Cómo se observa es una condición suficiente muy particular, que deja muchos casos indeterminados.

Hasta finales del s. XVIII se pensaba que todo polinomio de grado n, tenía n raíces, se sabía que algunas podían ser no racionales e incluso complejas, no se hablaba del campo de descomposición del polinomio, si las raíces estaban en C, o en R, o en Q. Lo único que interesaba era "resolver" la ecuación, es decir, encontrar la forma de hallar sus raíces. Fue

[3] Para ampliar detalles de Historia del Álgebra recomendamos el documentado texto [Katz, V. y Parshall, K. H., 2014], dónde los interesados pueden encontrar jugosos temas de investigación.

Gauss, con su obra, quién cambió el paradigma del álgebra: lo esencial no es encontrar el "algoritmo de cálculo", sino encontrar un "algoritmo de conceptos" que permita probar la existencia de una descomposición en un campo numérico determinado. Gauss destaca el papel de C, el cuerpo de los números complejos, dónde todo polinomio con coeficientes reales posee todas sus raíces; esta propiedad se expresa diciendo que C es *algebraicamente cerrado*. Pero el problema más acuciante era saber cuáles ecuaciones con coeficientes racionales tenían todas sus soluciones en el campo de los racionales, ampliado con los irracionales algebraicos, dados por radicales, como se conocía de las ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas. Después de los logros de Gauss se tiene certeza de que siempre se puede descomponer un polinomio en monomios de primer o segundo grado. La cuestión es saber en cada campo numérico cómo es esta descomposición, sean los ceros del polinomio enteros, racionales, reales o complejos. Por ejemplo:

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 3 = (x^2 - 3)(x + 1)(x^2 - x + 1) \text{en } \mathbb{Q}[X]$$
$$= \left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)(x + 1)(x^2 - x + 1) \text{ en } \mathbb{R}[X] \text{ y}$$
$$= \left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)(x + 1)\left(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \mathbb{C}[X]$$

Basta la primera descomposición para asegurar que es soluble, porque todos los factores son solubles, aunque dos raíces son complejas y 2 son irracionales. Hicimos las tres descomposiciones para señalar que precisamente el problema no reside en la existencia de la factorización, sino en la imposibilidad de hacerla en un campo numérico dado.

El problema está en las quínticas irreducibles, por ejemplo, consideremos $g(x) = x^5 - 5p\,x + p = 0$ con p primo estrictamente mayor que 5

Este es un caso, en la forma normal, que es irreducible, porque se le puede aplicar el criterio de Eisenstein. Es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, pero puede que sea soluble. Probemos que no es soluble en radicales aplicando otro criterio también del s. XIX.

Los polinomios de quinto grado con coeficientes reales, siempre tienen al menos una raíz real, aunque también pueden tener 3 o 5 raíces reales, ya que las complejas, si tienen, vienen en parejas, el número complejo x+iy, junto con su conjugado x-iy. El criterio de insolubilidad que aplicaremos es una variante del original atribuido al alemán Leopold Kronecker que se aplica a polinomios de grado primo en general. A esta variante la denominaremos *Criterio K*: *"Si un polinomio de quinto grado irreducible en* $\mathbb{Q}[X]$ *tiene exactamente tres raíces reales y dos complejas conjugadas, entonces no es soluble por radicales".*

Por tanto, para saber que nuestro ejemplo no es soluble, basta probar la existencia de exactamente 3 raíces reales, es decir, no tiene solo 1 raíz real, ni tampoco las 5 son reales, sino que dos de las 5 raíces son complejas.

El teorema de Rolle, estudiado en Análisis, nos indica que las raíces reales son *a lo más 3*. En efecto, el teorema de Rolle plantea que, entre dos ceros de la función, continua y derivable, hay un cero de la derivada. En este caso $g'(x) = 5x^4 - 5p$ tiene solo dos raíces reales $x = \pm\sqrt[4]{p}$, pues las otras dos son complejas conjugadas $x = \pm i\sqrt[4]{p}$.

El teorema de Bolzano se puede usar para determinar que hay *por lo menos tres raíces reales, porque hay al menos tres cambios de signo*:

- $g(\ll 0) \ll 0, g\,(-1) = -1 + 6p > 29, g(0) = \mathrm{p} > 5,$
- $g(1) = 1 - 4p < -20,\ g(3) = 243 - 14p > 140, g(\gg 0) \gg 0$[4]

Por tanto, Rolle y Bolzano juntos nos dicen que hay exactamente 3 raíces reales.

Obsérvese que también se pudiera aplicar el teorema de Sturm[5] u otro criterio algebraico. Pero por motivos pedagógicos, preferimos combinar los métodos analíticos con los algebraicos, así a la vez que resolvemos el problema, integramos conocimientos.

¿Cómo se resolvió el enigma de la quíntica?

Los ocho personajes que se muestran en la Figura 1, entre los años finales del siglo XVII y mediados del s. XIX, se preocuparon en resolver este misterio y transformarlo en un asunto matemático transparente. ¿Son los únicos atrevidos? No, no son los únicos. Estos son los que consideramos que su labor fue significativa en la búsqueda del esclarecimiento de este misterio.

Figura 1: Principales personajes relacionados con la solución del enigma de la quíntica entre 1683 y 1846

El primero, arriba de izquierda a derecha, ya hablamos de él, es el polaco Tschirnhaus (en 1683 hizo su publicación). El segundo, Lagrange es más conocido. Algunos lo conocen como francés, pero es italiano, nació en Italia y vivió allí por más de 30 años, después trabajó casi 20 años en Berlín, antes de pasar a la Academia de Ciencias de París. En un trabajo de 1770 Lagrange dio importancia a las funciones racionales simétricas obtenidas con los coeficientes racionales del polinomio. Lagrange fue el primero en asociar la solución de una ecuación con las permutaciones de las raíces, aunque no

[4] Aclaramos que la notación << 0 significa número negativo muy lejos del 0, mientras que >> 0 , indica que el número es positivo muy lejos de 0.

[5] El interesado puede consultar el ensayo de D.G. Hook y P.R. McAree, (1990) "Using Sturm Sequences To Bracket Real Roots of Polynomial Equations" aparecido en *Graphic Gems I* (A. Glassner ed.), Academic Press, p. 416–422.

usaba la terminología de la teoría de grupos que se desarrolla en el s. XIX. Observó que conocer las propiedades de las relaciones simétricas de las raíces en función de sus coeficientes y cómo cambiaban al actuar el grupo simétrico de las permutaciones, daba información útil para dilucidar si podía o no transformarse la quíntica en una ecuación de grado menor, en una ecuación "resolvente". Pero siempre encontraba una ecuación de grado seis o superior, que para Lagrange no era "resolvente". A Lagrange le sigue Bring, un sueco, (hemos seleccionado los personajes significativos de distintas nacionalidades: polaco, italiano, sueco, etc. porque de esta forma destacamos la relación de la evolución de la Matemática con la diversidad cultural y social). Bring precisó un método para llevar la quíntica a la *forma normal* $x^5 + ax + b = 0$ usando la idea de Tschirnhaus. A continuación, el médico italiano Ruffini, que según historiadores[6], es el primero que hace pública su aceptación de la no existencia de solución general por radicales y expone una "demostración" del caso de la quíntica. Pero ¿qué pasa con Ruffini? Él tenía poco crédito como matemático en la comunidad científica de entonces, porque su formación era de médico, no tenía prestigio como matemático. La mayoría puso en duda su método, muy pocos le dieron crédito. Realmente después cuando se revisó bien, se encontró que había errores. Uno de los que encontró errores fue Abel, pero antes de Abel, ya otros que lo estudiaron bien, llegaron a que las argumentaciones no siempre eran rigurosas. Partiendo de que existen las raíces, utilizaba el Teorema Fundamental del Álgebra y otros recursos algebraicos, mostrando su cultura matemática, pero con poco rigor. Este artículo de 1799 no se lo llegaron a publicar por la Academia de Ciencias de París aunque volvió a presentarlo en 1810. Cauchy le dio crédito. Cauchy, que ha pasado a la historia por no darles crédito a tantos buenos matemáticos, le dio crédito a Ruffini. Aunque tampoco pudo demostrar que todo lo que hacía Ruffini estaba completamente bien. Ruffini utilizaba resultados de Cauchy sobre grupos de permutaciones de las raíces, y parece que eso incitó al gran ego de Cauchy.

Vamos a la fila inferior de derecha a izquierda. Gauss no necesita presentación. Una de las primeras cosas que hace, cuando tenía solo 18 años, es encontrar cómo hallar los polígonos regulares, construibles solo con regla y compás. Entonces Gauss estudia las raíces de la unidad y los polinomios ciclotómicos[7] asociados. Todo parece indicar que ya Gauss pensaba que resolver el misterio de la quíntica de manera general, como se hizo con la cúbica, no era factible. Pero Gauss se cuidaba mucho de no perder su credibilidad (igual pasó con la geometría no euclidiana, que no se lanzó a presentar sus ideas). En fin, que Gauss no resolvió el enigma, pero con sus ideas alumbró algo el camino.

Llegamos al noruego Abel en 1824, -hace muy poco más de 200 años-, quien comenzó a abrir el camino de la solución del enigma, exponiendo un teorema que

[6] Para aclarar y ampliar esta síntesis histórica sugerimos, por ejemplo, la lectura de [Bashmakova y Smirnova, 2000} pp. 100-108, dónde se trata, muy sucintamente, la evolución del problema de la solución de ecuaciones por radicales o también Katz y Parshall (2014) muy documentado y más actualizado.

[7] El polinomio ciclotómico de grado n es el único polinomio irreducible divisor del polinomio $x^n - 1$ que no divide a ninguno de los polinomios $x^k - 1 \; para \; k < n$. Sus raíces son las raíces primitivas de la unidad y está relacionado con la construcción del polígono regular de n lados. Por ejemplo, si n = p un número primo, entonces $C_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ y $C_{2p}(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + x^{p-1}$. En particular, $C_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \; y \; C_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. Obsérvese que el polinomio divisor es del mínimo grado de irreducibilidad.

demuestra la imposibilidad de formular un algoritmo general algebraico para resolver toda ecuación de grado mayor o igual a 5. Posteriormente el francésGalois dio la idea más completa para dilucidar cuáles quinticas tienen solución y cuáles no. Abel murió en el 1829 y en ese mismo año Galois entregó a la Academia de París su primer trabajo que fue rechazado por Cauchy. Luego presentó una versión más amplia en 1831 que tampoco se aprobó, -Galois redactó, en total, 3 trabajos ninguno publicado en su corta vida-. La evaluación general completa de toda la problemática, como hoy se presenta por la denominada *Teoría de Galois*, no la hizo Galois, porque sus primeros manuscritos eran de pocas páginas, con una serie de borrones y tachaduras, que los hacían poco entendibles y se perdieron. El asunto es que Galois murió, en 1832, en un duelo, con 21 años; su manuscrito principal lo envió antes del duelo a un amigo, al parecer se extravió y varios años después, en 1846, Joseph Liouville encuentra otro manuscrito corregido por Galois y lo publica en su revista de Matemáticas puras y aplicadas. Otros matemáticos, durante la segunda mitad del s. XIX y primera mitad del s. XX, le dieron la forma más rigurosa con que aparece en los textos de álgebra avanzada, de forma que el original de Galois no se parece casi nada a la presentación actual[8].

Cerremos esta primera parte aclarando que, aunque en los textos de álgebra se presenta el teorema de insolubilidad de Abel -o de Abel-Ruffini- usando los grupos de Galois, Abel no usó absolutamente nada de Galois y el mismo Galois va a señalar que Abel le sirvió de estímulo, de motivación, aunque sus ideas son diferentes. Pero ambos tienen un tronco en común, que es la obra de Lagrange, Ruffini, Gauss y todos los que antes allanaron el camino que tomaron Abel y Galois.[9]

Parte II: Trascendencia del enigma de la quíntica

Vamos a concretar, en síntesis apretada, lo que ocurrió después de las publicaciones de Abel y Galois que abrieron el camino del esclarecimiento del enigma de las ecuaciones algebraicas de grado mayor que cuatro. Se puede resumir en tres grandes líneas de investigación:

I. Encontrar otras formas, no obligatoriamente algebraicas, que permitan resolver las ecuaciones de grado mayor o igual a 5 no solubles algebraicamente.
II. Dada una clase específica de polinomios de grado mayor o igual a 5, dilucidar cuáles ecuaciones correspondientes, son solubles y cuáles no.
III. Determinar un procedimiento, un algoritmo, para localizar con suficiente precisión y, si es posible, con valor exacto, las raíces de las ecuaciones tanto solubles, como no solubles.

Con relación al primer problema I, digamos que consciente Abel de que para $n \geq 5$ no hay una fórmula general algebraica, pensaba que una forma analítica posible se

[8] Sobre la "Teoría de Galois" uno de los textos más asequibles es el de [Stewart, 2022] en su 5ª ed. revisada y con notas muy esclarecedoras.

[9] Sobre los logros de Abel, independientes de Galois, y sobre su sufrida vida romántica, recomendamos [Sánchez y Noriega, 2005]. La segunda parte del libro se dedica especialmente al enigma de la quíntica.

encontraba usando las funciones elípticas[10]. Este fue el tema predilecto de Abel, pues le dedicó 14 artículos a las funciones elípticas y solo 4 a las ecuaciones algebraicas. Y esto sirvió para que otros, como el francés Hermite (1858) y un poco después el italiano Brioschi, encontraran una *fórmula general analítica* de resolución de la quíntica.

Después que varios científicos se afanaran en perfeccionar la teoría de Galois, como Kronecker (1859) en Alemania y Cayley (1861) en Inglaterra, era natural que otros se afanaran procurando la síntesis dialéctica que explicara con mayor precisión la relación entre las ideas de Abel y Galois ylas ideas de Hermite y Brioschi. El talento geométrico y analítico del alemán Félix Klein (1888) pudo demostrar que la estructura simétrica del icosaedro regular servía para ligar los grupos solubles de Galois con las funciones elípticas usadas por Hermite. Klein no solo se refirió a la quíntica sino que encontró la explicación geométrica del caso de las séptima y la onceava ecuaciones.

La atención a las líneas II y III de investigación fue cultivada también por investigadores de la Matemática numérica, cuyos esfuerzos se vieron frenados por la inexistencia de métodos de cómputo y falta de desarrollo algorítmico. No obstante, en la literatura del siglo XIX se recogen resultados ingeniosos, algunos de los cuales, posteriormente, al aparecer las computadoras electrónicas digitales, fueron puestos a punto y verificados. Destaquemos la obra del estadounidense Bruce King que aparece por primera vez completa en su libro *Beyond quartic equation (1996)*, que tuvo una segunda edición [King, 2009]. La historia de la investigación de King es ilustrativa de otras similares y la resumimos aquí: En el año 1990 King, que buscaba un algoritmo para solucionar unas ecuaciones de grado mayor que cuatro aparecidas en sus investigaciones químicas, encontró un artículo del alemán Kieper (1878) con un método práctico para resolver un tipo de quíntica. El trabajo de Kieper se había archivado y olvidado por su engorroso procedimiento de cálculo. A King le pareció que con los conocimientos computacionales del momento quizás se podría facilitar su aplicación. Buscó la colaboración de un especialista en Ciencias de la Computación y en labor conjunta después de empaparse en la teoría desarrollada por Galois, Hermite y Klein, con las novedosas herramientas de la Computación encontraron un algoritmo general.

Conclusiones

En esta última sección pretendemos resumir algunas ideas y a la vez tratar una última cuestión: ¿Qué hacer para lograr una mejor comprensión del *“enigma de la quíntica”* en nuestra labor educativa?

Para estimular la reflexión en esta dirección, me atrevo a señalar tres acciones que implícitamente he tratado de comunicar:

1. Ante todo, aprender la esencia matemática del “enigma”
2. Enseguida, conocer la historia del esclarecimiento del “enigma”
3. Por último, ubicar el momento del curso de Álgebra más propicio para motivar y exponer el “enigma”

[10] Las funciones elípticas son funciones de variable compleja doblemente periódicas, es decir, que a diferencia de las funciones circulares que se repiten periódicamente solo en el eje real, las elípticas se repiten periódicamente en dos direcciones, por ejemplo, en el eje real y el eje imaginario.

En general, los hechos históricos, relatados anteriormente, muestran que la adopción de un patrón de rigor en la solución de un problema matemático robusto como la solubilidad algebraica de la quíntica, fue el resultado de profundas transformaciones en la práctica matemática, las cuales tuvieron que ver obviamente con factores lógicos y epistemológicos, pero también con factores del contexto de la época como los ideales y valores dominantes sobre la Matemática, los modos de zanjar disputas y establecer consensos en la comunidad de practicantes, los criterios para determinar las competencias profesionales, el trabajo en el marco de instituciones, entre otros.

Desde el punto de vista epistemológico, conocer el "enigma" y su evolución histórica, enseña al profesor, que el canon de rigor es un constructo histórico, producto de una práctica matemática compleja, en otras palabras, nos indica la importancia de dar mayor preeminencia al rigor lógico en la argumentación, atender la necesidad de teoremas de existencia, de búsqueda de excepciones a reglas intuitivas no rigurosas, favorece el desarrollo del enfoque de Gauss en el Álgebra, que es la búsqueda de "algoritmos de conceptos", no solo "algoritmos de cálculo" -buscar la manera de comprender el problema matemático y argumentar por qué es de esa forma y no de otra-. Influye directamente en interesar tanto por el problema de la ecuación en sentido algebraico como por su relación con otras ramas de la Matemática. Todo esto se va haciendo más transparente a medida que conocemos la historia del esclarecimiento del enigma.

Destaquemos, por ser sorprendente, el aporte de Félix Klein, quien hace una síntesis metodológica, utilizando sus vastos conocimientos de geometría. Klein mostró que este problema algebraico, sobre todo el trabajo con las funciones simétricas y los grupos finitos de la Teoría de Galois, junto con la solución analítica dada con el uso de funciones elípticas, se podía entender de mejor manera utilizando los poliedros regulares, el trabajo con la simetría del poliedro y en particular, para la quíntica, el icosaedro. Es decir, que la síntesis de álgebra y análisis se hace explotando la esencia geométrica de los poliedros regulares estudiados desde la antigüedad helenística.

Aquí apreciamos, una vez más, por qué consideramos el conocimiento de la Historia de la Matemática tan significativo: porque así destacamos que la Matemática es una sola y no debemos limitarnos a buscar soluciones con métodos de uno u otro tipo, sino que debemos mantener una visión holística, flexible y amplia, en la investigación matemática y, por supuesto, en su enseñanza a futuros científicos, ingenieros o pedagogos.[11]

Quiero terminar con una frase de Sophus Lie (1842-1899), un noruego que trató de hacer lo que hicieron Abel y Galois, pero para las ecuaciones diferenciales, introduciendo herramientas que hoy se denominan "*Teoría de los grupos y álgebras de Lie*". Lie decía que el estilo de las Matemáticas del siglo XIX fue trazado por 4 hombres: Gauss y Cauchy (nadie lo pone en duda) y los otros dos, estos dos jóvenes-gigantes que esclarecieron el enigma de la quíntica introduciendo una visión innovadora y fresca: Abel y Galois.

[11]Para ampliación sobre la historia del problema de solución de ecuaciones algebraicas por radicales recomendamos [Bashmakova y Smirnova, 2000] y [Katz y Parshall, 2014], para el uso de la Historia en estos problemas de "imposibilidad" es reciente el trabajo de [McAllister, 2018].

Referencias y bibliografía

Bashmakova, I. G. y Smirnova, G. S. (2000) *The beginnings and evolution of algebra*. MAA, Washington D. C.

Katz, V. y Parshall, K. H. (2014) *Taming the Unknow. A History of Algebra*. Princeton University Press. Princeton, N. J.

King, R. B. (2009) *Beyond the Quartic Equation*. 2da. Ed. Birkhauser. Berlín.

McAllister, A. M. (2018) Mathematical Impossibilities. En Gellash, A. S. y Jardins, D. (eds.) *The Course of History: Ideas for developing an History of Mathematics course*. M.A.A. Press. Washington DC.

Mei, X. (2020) A new understanding of the problem that the quintic has no rational solution. *Advances in Pure Mathematics*. 10, 508-539.

Morris, S., Jones, A. y Pearson, K. (2022) *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*. 2da. Ed. Springer Verlag. N. Y.

Sánchez Fernández, C. y Noriega Sánchez, T. (2005) *Abel, el romántico nórdico*. Ed. Nivola. Madrid.

Spearman, B. y Williams, K. S. (1994) Characterization of solvable quintics. *American Mathematical Monthly,* 101, 986-992

Stewart, I. (2022) *Galois Theory.* 5ta. Ed. Chapman & Hall. CRC Mathematics Texts. London.

Tang, J.E. (2012) Several Quintic Equations Which Can Be Solved by Root's Forms. *Advanced Mathematics Research*, 15, 58-61.