



Do passado ao presente: contribuições do PROTAD para formação inicial de professores em Trigonometria

Poliana Figueiredo Cardoso **Rodrigues**

Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo
Brasil

polianacar@gmail.com

Maria Alice Veiga Ferreira de **Souza**

Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo
Brasil

alicevfs@gmail.com

Resumo

Esta pesquisa verificou a contribuição do instrumento PROTAD - Proporção Trigonométrica de Altura, Distância e Profundidade - na formação de licenciandos em Matemática, com foco na compreensão do conceito de função seno, a partir da relação entre o triângulo retângulo e o círculo trigonométrico. Desenvolvido como uma adaptação do esquadro móvel de Ottavio Fabri, o PROTAD foi o recurso central das atividades práticas. O embasamento teórico pautou-se nas pesquisas de Nacarato, Nacarato e Santos, que discutem o ensino de Trigonometria, e de Carrillo-Yañez *et al.*, sobre conhecimentos epistemológicos e pedagógicos do professor. Os resultados evidenciaram o potencial do PROTAD como estratégia didático-pedagógica para favorecer a construção de conhecimentos necessários à aprendizagem da função seno. As tarefas pedagógicas integraram a semelhança entre triângulos retângulos, as razões trigonométricas e sua representação no plano cartesiano, promovendo uma abordagem prática para consolidação conceitual da função seno, para além de um estudo singularmente procedimental.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Superior; Ensino Presencial; Formação Inicial de Professores; Pesquisa Qualitativa; Trigonometria; Brasil.

Introdução

No século XVI, a necessidade de medir alturas de grandes estruturas, como torres e morros, por trabalhadores com conhecimento matemático limitado, levou Ottavio Fabri (1615) a criar um instrumento prático: o esquadro móvel. Este artefato histórico, estudado por pesquisadores como Cesana e Saito (2020) e Cesana e Silva (2022), utilizava triângulos retângulos e a relação entre ângulos e lados para realizar medições. Inspirados por Fabri e pelas investigações de Cesana (2013, 2017), desenvolvemos o PROTAD – Proporção Trigonométrica de Altura, Distância e Profundidade –, adaptando o esquadro móvel ao contexto acadêmico para auxiliar na formação inicial de licenciandos em Matemática, enfrentando dificuldades epistemológicas com Trigonometria (Nacarato & Santos, 2004; Feijó, 2018). Nesse sentido, objetivamos compreender as potencialidades do PROTAD para promoção da construção conceitual de noções trigonométricas, superando abordagens mecânicas e priorizando o desenvolvimento de um conhecimento matemático especializado fundamentado (Carrillo-Yañez et al., 2018). Este trabalho é parte de uma tese de doutoramento e está estruturado em: referencial teórico, conceitos trigonométricos fundamentais, metodologia, resultados e considerações finais.

Enquadramento teórico: conhecimento do professor e objetos trigonométricos

De maneira geral, estudos realizados no âmbito da Educação Matemática apontam para compreensões conceituais superficiais por professores, que, por exemplo, referem-se ao seno como uma razão ou uma função, entre outras interpretações limitadas (Feijó, 2018). Essas dificuldades também são observadas entre estudantes do ensino básico e superior (Feijó, 2018; Oliveira, 2021). Ademais, o tratamento pouco criterioso de objetos trigonométricos em livros didáticos brasileiros, nos quais conceitos como de radiano e de seno são apresentados sem distinções Matemáticas adequadas (Oliveira, 2021), intensifica nossas preocupações em relação ao conhecimento dos professores em formação inicial. Quando nos referimos ao conhecimento do professor, o fazemos na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK¹ (Carrillo-Yañez et al., 2018), que consideram os conhecimentos dos professores de forma holística, ou seja, é relevante para o estudo os saberes dos professores e como são colocados em prática. Para isso, Carrillo-Yañez et al. (2018) subdividiram os conhecimentos em dois domínios: *Mathematical Knowledge* – MK e *Pedagogical Content Knowledge* – PCK. Cada domínio foi subdividido em três dentro de uma perspectiva de crenças dos professores sobre a Matemática.

O domínio (1) *Mathematical Knowledge* (MK), tem subdomínios: (1.1) *Knowledge of Topics* (KoT) –se refere aos componentes específicos da Matemática, e está associado aos conhecimentos dos conteúdos, como teoremas e conceitos (e.g., seno, cosseno, equações trigonométricas, função seno) e contempla também o conhecimento relacionado a diferentes formas de representar a Matemática, como gráfico e pictográfico (e.g., relação métrica do triângulo retângulo com círculo trigonométrico, a partir de representações pictóricas na análise das relações da escala altímetra e o gráfico da função seno). O subdomínio (1.2) *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) diz respeito ao conhecimento das conexões que devem ser estabelecidas entre os itens da Matemática (e.g., conexões com os conceitos de semelhança de triângulos, razões trigonométricas e o círculo trigonométrico). Carrillo-Yañez et al. (2018), ao

¹ As siglas e termos serão mantidos originais na língua inglesa por serem conceitos reconhecidos internacionalmente.

descreverem o subdomínio (1.3) *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM), definiram que o objeto da ‘prática’ é a própria Matemática, e, por conseguinte, o cerne do estudo está no processamento da Matemática, e não na maneira como ela será ensinada (e.g., estudo de ângulos suplementares e complementares por meio de definição sem contextualização).

Sobre o domínio (2) - *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) está relacionados mais à prática em sala de aula. Esse domínio foi subdividido em (2.1) *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) – conhecimentos voltados para o conteúdo matemático escolar, reconhecendo como fonte de saber a experiência acumulada pelos professores ao longo de sua trajetória profissional. No KFLM é possível discutir aspectos emocionais da aprendizagem – o que motiva um estudante, quais são seus interesses –, e discussões sobre procedimentos e diferentes estratégias para resolver problemas matemáticos (e.g., variadas compreensões de conceitos e ampliação de possibilidades na atuação profissional dos estudantes). O subdomínio (2.2) *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) se conecta a saberes teóricos relacionados ao ensino de Matemática. Além da discussão sobre a importância da utilização dos recursos e materiais didáticos, esse subdomínio sublinha como eles podem ser potenciais para o ensino, minimizando possíveis dificuldades epistemológicas (e.g., materiais físicos para ensino da função seno). No subdomínio (2.3) *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS), de acordo com Carrillo-Yañez *et al.* (2018, p. 22, tradução nossa), o conhecimento do professor inclui “tudo o que o aluno deve ou é capaz de alcançar em determinado nível, em combinação com o que o estudante tem previamente estudado e as especificações para níveis subsequentes” (e.g., função seno, a partir de conhecimento sobre função).

Conceitos fundamentais para construção da função seno em meio à apresentação do PROTAD

Nesta seção daremos breve relevo aos conceitos trigonométricos fundamentais necessários à aprendizagem da função seno, em meio à apresentação e possibilidades de uso do PROTAD. De início, por meio da medição, é possível estabelecimento da relação de proporção entre triângulo retângulo com o PROTAD. Com isso, é factível a determinação de razões trigonométricas com essas medições. A Figura 1 apresenta um esboço do PROTAD que é composto por um braço móvel, um braço fixo, um quadrante geométrico no qual é marcada a escala altímetra, um meio círculo e quatro miras. Como esse instrumento, a princípio, foi idealizado para medição de grandes alturas, devemos considerar algum erro quando da medição de objetos menores, mas que pode ser considerado baixo, embora sempre deva ser mensurado e declarado.

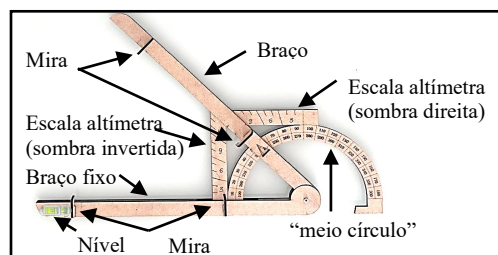


Figura 1. Indicação das partes do PROTAD

O PROTAD possibilita o estabelecimento da relação de semelhança de triângulos que pode ser entendida a partir do triângulo retângulo formado com o objeto a ser medido e o triângulo retângulo formado com a escala altímetra e os braços do instrumento (Figura 2a) determinando os valores das razões trigonométricas.

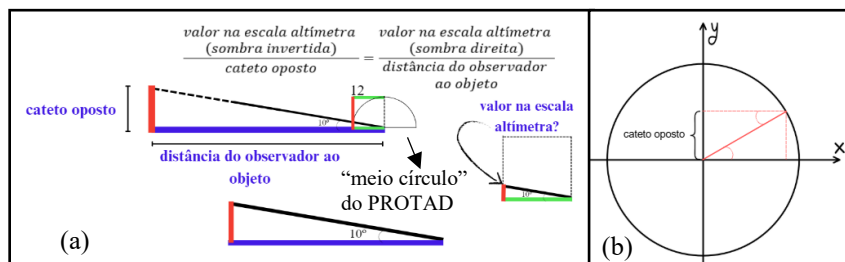


Figura 2. (a) Cateto oposto pelas proporções da escala altímetra; (b) Sen 30° no círculo trigonométrico

Após determinação da razão trigonométrica do seno, é possível registrá-la no eixo do círculo trigonométrico (Figura 2b), considerando não apenas o ângulo, mas também os valores obtidos. No PROTAD, a variação do braço móvel, que altera os ângulos, permite registrar diversas razões trigonométricas no primeiro quadrante. Com o conhecimento das relações entre ângulos suplementares e complementares, esses registros podem ser projetados para os demais quadrantes. Esse processo estabelece uma conexão entre o círculo trigonométrico e o plano cartesiano, possibilitando a plotagem dos valores da função seno e a construção de seu gráfico. Assim, é viável realizar análises e formular conjecturas sobre propriedades e relações inerentes à função seno, ampliando a compreensão conceitual por meio da exploração gráfica.

Metodologia

Esta pesquisa, de abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), apoiou-se no MTSK (Carrillo-Yañez *et al.*, 2018) e envolveu 16 licenciandos em Matemática de uma instituição federal brasileira matriculados no componente curricular Fundamentos de Matemática III. A formação integral foi levada a efeito pela primeira autora e acompanhada pela segunda autora e outros dois professores de Matemática e pesquisadores da Educação Matemática. Foram investidos 4h/aula de um componente curricular do segundo semestre de 2024 para realização dessas tarefas. As tarefas foram preparadas a partir de um Lesson Study sendo: (*Tarefa 1*) medição da altura de um prédio com o PROTAD, variando ângulos (10°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 80°) no primeiro quadrante para determinação do seno; (*Tarefa 2*) registro das razões trigonométricas no círculo trigonométrico sem transferidor; (*Tarefa 3*) plotagem no plano cartesiano para construção da função seno do primeiro quadrante; e (*Tarefa 4*) ampliação dessas relações para os demais quadrantes, abrangendo $[0, 2\pi]$. Os dados, coletados por gravações, discussões grupais e produções escritas, foram triangulados e categorizados segundo o MTSK, permitindo analisar de modo indutivo a potencialidade do PROTAD no desenvolvimento de noções trigonométricas essenciais entre futuros professores.

Resultados e Discussões

O processo formativo dos licenciandos foi conduzido por meio de quatro tarefas. Mais detalhadamente, na *Tarefa 1*, os estudantes foram encaminhados ao pátio da instituição para medirem a distância entre eles e o prédio, utilizando o PROTAD (Figuras 3c e 3d), a partir das

aberturas para ângulos de: 10° , 30° , 40° , 45° , 50° , 60° e 80° . A seleção desses ângulos não foi arbitrária, mas fundamentada na possibilidade de estabelecer relações com a escala altimétrica do PROTAD (exemplificada na Figura 2a). As informações foram organizadas em uma tabela (Tabela 1). (KoT – conceito: com o cálculo da hipotenusa e do seno de cada ângulo).

Tabela 1

Registro das informações e cálculos realizados após as medições

	10°	30°	40°	45°	50°	60°	80°
Ângulo							
Distância							
cateto oposto (determinada pela relação da escala altimétrica)							
Hipotenusa (Teorema de Pitágoras)							
Seno do ângulo							

Notas. Protocolo de pesquisa. 2024.

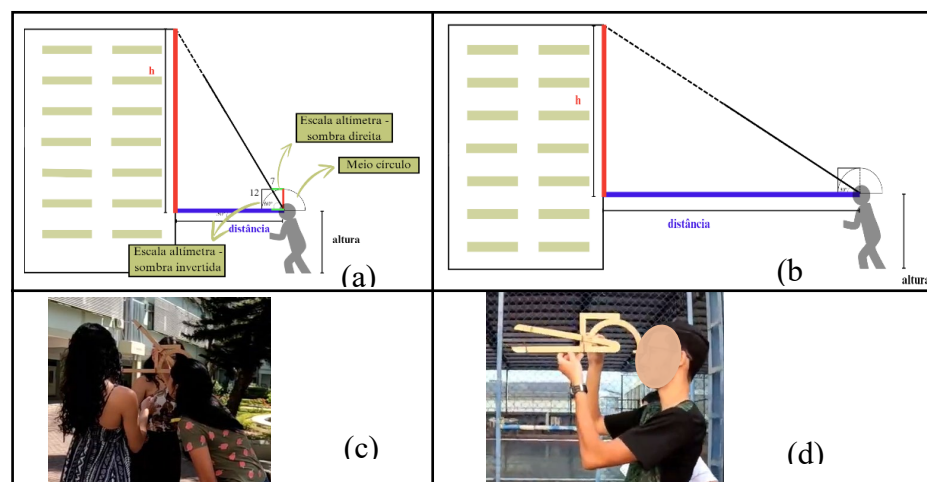


Figura 3. Ilustração da utilização do PROTAD para medição da altura com variação de abertura do braço móvel (a) de 60° , (b) de 10° e demonstração dos alunos utilizando o PROTAD (c) com 45° e (d) com 10°

Após a medição da distância (Figura 3a, b, c e d), como os licenciandos já tinham realizado outras tarefas para familiarização do instrumento, foi possível discutir conjuntamente como determinar o valor do seno do respectivo ângulo a partir de relações da escala altimétrica (KMT – recurso: o uso do PROTAD potencializando o ensino de função seno) (Figura 2a), com os valores da Tabela 1. Essa tarefa possibilitou discussões para além de procedimentos mecânicos para cálculo do seno ou para a determinação dos valores dos catetos, visto que realizamos uma experimentação, uma investigação na determinação do cateto oposto (KoT – representações: a partir de representações pictóricas na análise das relações da escala altimétrica).

Na Tarefa 2, foram finalizados os devidos cálculos e realizamos a marcação dos ângulos no círculo trigonométrico com a determinação do triângulo retângulo para cada ângulo compreendendo as projeções do seno no eixo y em um círculo de raio um (KSM – conexões conceituais: relação entre os conhecimentos de semelhança de triângulo, razão trigonométrica, círculo trigonométrico). Durante o processo de marcação no círculo trigonométrico (Figura 4a e 4b) constatamos como os conceitos relacionados ao estudo de Trigonometria ainda geravam

dúvidas, como observado durante o seguinte questionamento realizado pela professora durante uma das aulas: “No círculo trigonométrico, em qual eixo é realizada a projeção do valor do seno quando consideramos um círculo trigonométrico de raio um?”. Respostas dos estudantes sem maiores explicações: Aluno1: “não sei”; Aluno2: “era em pé” [fazendo referência ao eixo vertical]. Observamos que eles possuíam uma reprodução mecânica do conhecimento, por exemplo, a partir da resposta do Aluno2. O Aluno1 ainda completou “tudo que sei de Trigonometria é “macete”, com essas reflexões o Aluno3 questionou “eu não sei por que o seno é eixo y, quer dizer, eu nem sei se tem um porquê?”. A partir desses questionamentos, a professora aproveitou a oportunidade (KPM – define: a relação dos eixos com o ângulo e o valor do seno) para justificar como é definido, qual é a projeção de cada razão trigonométrica nos eixos e o sinal do seno no primeiro quadrante, dando significado ao conhecimento.

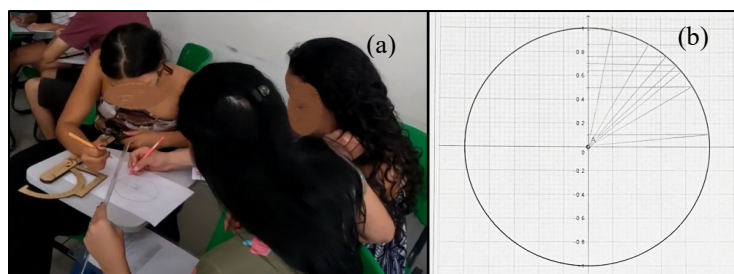


Figura 4. (a) Alunos realizando a tarefa 2; (b) Tarefa realizada pelos alunos de marcação dos ângulos e seno

A Tarefa 3 oportunizou a discussão sobre o que eles entendem do conceito de função, estabelecendo a relação entre o que eles compreendem por variável dependente e variável independente, para compreender e(ou) reafirmar o que foi realizado no círculo trigonométrico na marcação dos ângulos no eixo x e dos valores de seno do ângulo no eixo y (Figura 5a). Foi questionado pelo Aluno3 “pode deixar escala diferente?” e a professora pôde reafirmar que a definição de escala seria definida por cada grupo, em relação aos eixos. A partir da definição da escala, conseguiram realizar a transposição dos pontos do círculo trigonométrico para o plano cartesiano e, posteriormente, compreenderam o comportamento da função seno no 1º quadrante (KoT – conceito: com o entendimento de variável dependente e independente, reflexão sobre escalas em cada eixo). Vale dizer que o Aluno3, após a marcação dos pontos no plano cartesiano, esperava encontrar algo semelhante à função afim. Como estavam realizando a atividade em grupo, o Aluno4 comentou que aqueles pontos descreviam um comportamento similar à do semicírculo obtido no círculo trigonométrico (KSM – conexões conceituais: relacionar o círculo trigonométrico com o gráfico da função seno). Essa tarefa proporcionou uma ampliação dos conceitos, fazendo com que os alunos refletissem sobre características da função.

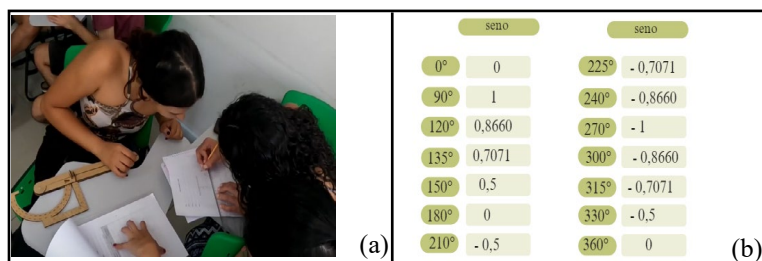


Figura 5. (a) Marcação dos ângulos e seno no plano cartesiano; (b) Ângulos dos quatros quadrantes para serem marcados

Para finalizar, na *Tarefa 4* os alunos possuíam uma tabela (Figura 5b) com valores de ângulos do segundo, terceiro e quarto quadrantes e seus respectivos valores do seno (na representação decimal), que deveriam ser marcados no círculo trigonométrico e no plano cartesiano que já começaram a construir (Figura 6a e 6b). Durante esse processo de marcação o Aluno3 perguntou “estou roubando, pois eu estou copiando do lado de cá [estava fazendo a marcação no segundo quadrante e se referindo ao primeiro quadrante]. É roubar isso?”, e a professora questionou “Por que você está copiando do outro lado?”. O Aluno3 respondeu: “porque é o mesmo seno” e a professora ainda questionou “Por que esses ângulos têm o mesmo seno?”. O Aluno3 refletiu e respondeu “pois são ângulos suplementares”, mostrando que compreendeu as relações dos ângulos nos quadrantes (KFLM – diferentes estratégias de resolução: ao realizar a marcação dos ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes no círculo trigonométrico, alguns alunos relacionaram com os conceitos de ângulos suplementares, ou ângulos complementares ou a partir dos valores obtidos).

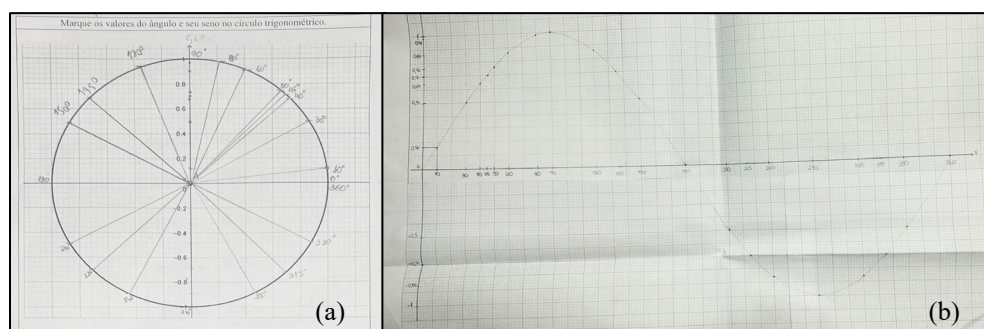


Figura 6. (a) Marcação dos valores do segundo, terceiro e quarto quadrante no círculo trigonométrico; (b) no plano cartesiano

Ao realizarem a transposição dos demais quadrantes para o plano cartesiano, os alunos construíram o percurso da função seno ao longo do eixo x, sendo capazes de identificar o domínio e a imagem da função, além de refletirem sobre outras características como amplitude e período da função trigonométrica (KMLS – conhecimentos relacionados ao currículo: compreensão de função seno a partir de conhecimentos prévios e esse conhecimento ser fundamental para conhecimentos futuros). As quatro tarefas possibilitaram a ampliação dos conceitos relacionados à Trigonometria, em uma abordagem que valorizasse a produção de conhecimentos conceituais, investigação e interpretação, diferente da apresentação procedimental que comumente é realizada com os estudantes quando de discussões sobre Trigonometria. O íterim das tarefas mostrou, assim, a potencialidade do PROTAD como meio prático para construção das ideias conceituais desejadas.

À guisa de conclusão

Esta pesquisa teve como objetivo verificar como o PROTAD pode contribuir para a formação de licenciandos em Matemática, promovendo a compreensão do conceito de função seno a partir da relação entre o triângulo retângulo e o círculo trigonométrico. A aplicação da proposta revelou as potencialidades do PROTAD no processo de aprendizagem e no processo formativo dos licenciandos ao relacionar com a abordagem do MTSK e evidenciando avanços na marcação e interpretação de valores no círculo trigonométrico e na conexão desses estudos com

o plano cartesiano. Os licenciandos foram capazes de construir a função seno, compreendendo as variações nos quatro quadrantes e analisando propriedades como domínio, imagem, amplitude e período, tendo assim maior aquisição de conhecimento matemático.

A investigação também mostrou que conceitos foram mobilizados com o uso do PROTAD, por meio da perspectiva do MTSK, pois foi desenvolvido conexões conceituais, ampliação de definições, utilização de recurso para potencializar o ensino, desenvolvimento de conceito, desenvolvimento de diferentes estratégias de resolução, obtenção de conhecimento relacionado ao currículo, assim desenvolveram novos conhecimentos matemáticos e pedagógicos

Referências e bibliografia

- Bogdan, R. C. e Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto Editora.
- Carrillo-Yanez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... e Munoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Model. *Research in Mathematics Education, Volume* (20), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. Á., Escudero, D. e Medrano, E. F. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Cesana, A., e Saito, F. (2020). Mapeando alguns conhecimentos matemáticos incorporados no “esquadro móvel” de Ottavio Fabri (1544-1612). *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas/RECM, Volume* (16), 89-104. <http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v16i35.8263>
- Cesana, A. e Silva, C. M. S. da. (2022). Uma análise de imagens contidas no tratado L'Uso della Squadra Mobile de Ottavio Fabri. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Volume* (15), 33-53.
- Cesana, A. (2017). Alberti, Finé e Fabri: Contribuições em Problemas de Medição de Alturas no Renascimento. *REMATEC, Volume* (12). 52-69. <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/254>
- Cesana, A. (2013). *Textos e contextos dos problemas de mediação de altura em livros do Renascimento*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo].
- Cunha, M. (2000). Saberes Profissionais de Professores de Matemática: Dilemas e Dificuldades na Realização de Tarefas de Investigação. *Millenium, Volume* (17).
- Espinosa, G. M. e Cortés, G. J. (2014). Significado Trigonométrico en el Profesor [Significado Trigonométrico no Professor]. *Bolema, Volume* (28), 1193-1216. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10>
- Fabri, O. (1615). *L'Uso della squadra mobile*. Pietro Bertelli. <https://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHODOCUView?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/4K>
- Farias, S. A. D. de. (2014). *Ensino-aprendizagem de Triângulos: um estudo de caso no curso de licenciatura em matemática a distância*. [Tese de Doutorado em Educação]. Universidade Federal da Paraíba.
- Feijó, R. S. A. A. (2018). Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. [Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática]. Universidade de Brasília.
- Gomes, S. C. (2011). *Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino da trigonometria numa abordagem histórica*. [Dissertação de mestrado Acadêmico em Ciências Naturais e Matemática]. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/16072>
- Nacarato, A. M. (2003). A definição de seno apresentada nos livros didáticos de matemática no século XX. *V Seminário Nacional de História da Matemática*, Rio Claro.
- Nacarato, A. M. e Santos, R. T. dos. (2004). Espaços alternativos de formação: quando graduandos em matemática e professores em exercício compartilham experiências sobre o ensino de trigonometria. *Educação Matemática Pesquisa, Volume* (6), 63-90. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4687/3257>
- Oliveira, M. S. de. (2021). Dificuldades na Aprendizagem de trigonometria: reflexos da Educação Básica no Ensino Superior. *INTERMATHS, Volume* (2), 140-155.
- Rodrigues, P. F. C., Souza, M. A. V. F. de e Thiengo, E. R. (2022). Trigonometria: Conhecimento de conteúdo e de Ensino fundamentados em uma revisão sistemática de literatura. *REnCiMa. Volume* (13), 1-23.