Funciones y funcionales en la teoría del cálculo

Carlos **Sánchez** Fernández
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

En este minicurso pretendemos estimular la reflexión sobre las bondades de una perspectiva historicista en el estudio del tema funciones. Nuestro principal objetivo es mostrar la evolución de las ideas sobre el concepto función como asunto fundamental en la Teoría del Cálculo y argumentar la introducción en la práctica docente de los avances obtenidos en los siglos XIX y XX.

Durante el siglo XIX el concepto función ganó en precisión y amplió su alcance y variedad. Para tratar las ecuaciones diferenciales y otros problemas de cálculo avanzado, en el s. XX fue imprescindible introducir las “funciones de funciones” y en particular, las “funcionales” definidas en espacios de funciones y con valores numéricos. Ha pasado más de un siglo de estos avances y este concepto ha probado su valor. Entonces, ¿podremos introducir estas ideas en nuestras clases? ¿Cuándo, cómo y dónde? Queremos compartir ideas sobre las mejores decisiones.

Palabras clave: Educación Media Superior; Educación Universitaria; Epistemología; Funciones; Historia de la Matemática; Teoría del Cálculo.

Introducción

Con este minicurso nos proponemos dar al interesado una visión sintética panorámica de la evolución del concepto función. Desde la antigüedad las relaciones funcionales se expresaban de diferentes formas muy rústicas. Sin embargo, no es hasta la Revolución Comercial en la Edad Media Tardía, que el estudio del movimiento y la variabilidad se tornó imprescindible para lograr el avance socioeconómico. En el s. XVII aparece la palabra “función” y con la transformación analítica de la geometría, pasó a tener una expresión gráfica más manejable. La temporada alta para las investigaciones en el campo de la mecánica, sin lugar a dudas, motivó la introducción de *funciones elementales trascendentes*. Desde los albores del s. XIX, estimulados por el ímpetu de la Escuela Politécnica de París, las ideas sobre "*función continua*" y "*función analítica*" alcanzan una claridad adecuada para enfrentar los nuevos problemas de representación por medio de funciones trigonométricas. En las universidades germanas de la segunda mitad del siglo XIX se gestaron los primeros "*monstruos funcionales*": curvas continuas sin tangente, funciones integrables con infinitas discontinuidades y curvas que llenan un área. No fueron pocos los que vieron en estos nuevos *monstruos* una amenaza a la visión ortodoxa, pero afortunadamente surgieron otros audaces que se dedicaron a explotar estas extravagancias y convertir lo monstruoso en algo bello como los fractales y en algo útil como la descripción del movimiento browniano. Ya en la primera mitad del s. XX, la búsqueda de una explicación plausible para la modelación física del mundo atómico alcanzada por la mecánica cuántica llevó a la necesidad de introducir las "*funciones generalizadas*" o "*distribuciones*", ilustradas con la simple y asombrosa "Delta de Dirac". El espectro funcional se ha ampliado considerablemente, tanto para el matemático teórico que busca la argumentación y justificación de los nuevos modelos, como para el investigador aplicado que precisa de una herramienta confiable de amplio dominio[1].

Pero, ¿qué se hace en la enseñanza media superior? ¿cómo se introducen las nuevas ideas para la formación de nuevos profesionales? ¿Se mencionan los nuevos contenidos y los procedimientos que necesita tanto el futuro profesional de la Matemática, como el ingeniero y el científico no matemático? Nuestro fin principal es proporcionar la información imprescindible sobre las motivaciones y las circunstancias en que los significados del concepto "función" evolucionaron y alcanzaron la forma aceptable actualmente. Cada educador, responsable e interesado, decidirá que usar en su práctica docente.

Génesis del concepto "función"

Los documentos analizados por los historiadores indican que el término "función" apareció por vez primera en el trabajo de Gottfried von Leibniz *Consideraciones sobre la diferencia que hay entre el análisis ordinario y el nuevo cálculo de los trascendentes*:

> … Llamo función a toda porción de una recta que parte de un punto de la curva, y termina en algún otro lugar. Tales son la abscisa y ordenada del punto, las porciones de la tangente y la normal que terminan en uno de los ejes, …

Observemos que Leibniz da al término función un significado diferente al actual, muy geométrico. La noción de *función* será inmediatamente adoptada por los hermanos Bernoulli, lo cual satisfizo mucho a Leibniz. De forma bastante rápida la noción de función se transformó, perdiendo su carácter geométrico tan directo y pasó a ser lo que hoy denominamos *expresión analítica*.

Así en 1718 Johann Bernoulli (1667-1748) escribe: *"Se llama función de una magnitud variable a una cantidad, que se compone de cualquier forma de esta magnitud variable y de constantes".*

[1] Una visión panorámica de este proceso histórico puede observarse, por ejemplo, en los libros [Jahnke, 2003], [Pier, 2001] y el nuestro [Sánchez Fernández, 2023]. Los dos volúmenes recientes de Análisis I y II, escritos por uno de los matemáticos vivos más prestigioso Terence Tao [Tao, 2016] permiten conocer el estado del arte.

Bernoulli no aclara qué entiende por cantidad, pero del contexto en que la utiliza puede deducirse que se trata de lo que más tarde Euler denominó "expresión analítica".

Durante el siglo XVIII, el análisis se desarrolló íntimamente vinculado a los problemas de la mecánica, para los cuales el concepto de *variable* resulta muy natural. De este modo el análisis fue ante todo el cálculo con las variables y sus relaciones. Sin embargo, este concepto no resulta totalmente adecuado cuando lo que se quiere es estructurar una teoría abstracta, puramente matemática; en este caso el concepto de *función* resulta mucho más adecuado.

El paso decisivo para considerar a las funciones, no solo como herramientas de resolución de problemas, sino como un ente matemático por sí mismo digno de estudio, lo dio el suizo Leonhard Euler (1707-1783) en la primera parte del libro *Introductio in analysin infinitorum* (1748)[2]. En esta elegante y original obra, Euler sienta la pauta para el nacimiento de una nueva rama de la Matemática, que más tarde será la *Teoría del Cálculo,* o de la forma más usual, el *Análisis Matemático*, basado en el concepto de función y el uso de los procesos infinitos, tales como la sumación de series, para la representación de las funciones. En particular, aquí aparece un tratamiento sistemático de las propiedades de las *funciones trascendentes elementales* por medio de sus desarrollos en series de potencias.

En esta obra, Euler se adhiere esencialmente a la definición de función dada por Johann Bernoulli, pero introduce el término más adecuado de *expresión analítica*: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier forma de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes".

A diferencia de Bernoulli, Euler aclara cuáles son las operaciones admisibles para la formación de las expresiones analíticas: las operaciones algebraicas usuales y varios procedimientos trascendentes que enumera y que incluyen el paso al límite[3]. A continuación, realiza varias clasificaciones de las funciones: en algebraicas y trascendentes, las primeras formadas solo por operaciones algebraicas y en las segundas incluye aquellas en que la variable se ve afectada por alguna operación trascendente, es decir que *trasciende* las operaciones algebraicas. También las divide en explícitas e implícitas, uniformes y multiformes, etc. Dentro de las funciones trascendentes incluye tanto las funciones trigonométricas y aquéllas definidas por exponenciales y logaritmos. Encuentra las propiedades y relaciones básicas entre estas funciones, en particular, sus desarrollos en serie de potencias. En resumen, las presenta con tanta claridad que se convierten simplemente en *funciones elementales*, aunque *trascendentes*.

En el prefacio a esta obra Euler señala: "en el primer libro me he extendido sobre todo en las funciones de variables, porque ellas son el objeto del Análisis infinitesimal".

De esta forma sitúa a las funciones en el centro del Análisis. Para poner de manifiesto más claramente su distanciamiento de la base geométrica originaria de esta rama de la Matemática no incluirá ninguna figura en todo el primer tomo de esta obra, como tampoco más tarde lo hará en sus enjundiosos tratados *Intitutiones Calculi Differentialis* e *Intitutiones Calculi Integralis*. El

[2] En las referencias al final colocamos la nueva edición en español [Euler, 2001]

[3] Valga la aclaración de que en toda la obra de Euler publicada, nunca aparece una definición del concepto" límite".

estudio de las curvas lo agrupa en el segundo tomo de la *Introductio* y en este aplica las ideas desarrolladas en la primera parte de esta misma obra.

Es necesario aclarar que el concepto *continuidad* en Euler referencia una propiedad totalmente diferente a la que con tal denominación concebimos actualmente. Para Euler y sus contemporáneos todas las funciones imaginables son continuas (en nuestro sentido), salvo en algunos puntos aislados donde la variable dependiente podía hacerse infinitamente grande. Incluso eran concebidas, además, como derivables a trozos. Esta situación es totalmente natural y perfectamente explicable conocida la forma en que emergió el concepto de función: a partir del modelo de aquellas relaciones funcionales con las que se tenía que tratar en la mecánica.

Ampliación de la noción de "representación analítica

Entre los problemas célebres del siglo XVIII, que estimularon la búsqueda de una comprensión más amplia de la idea de función, está sin duda el problema de la cuerda vibrante.

Al parecer fue uno de los brillantes partidarios de Newton, el inglés Brook Taylor (1685-1731), en su obra más conocida *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715) quién planteó el problema: *Determinar el movimiento de una cuerda flexible fija en sus dos extremos*[4].

Para Taylor este problema tenía el atractivo de su asociación con su afición predilecta, la música. Taylor obtiene en el lenguaje propio de las fluxiones, que el movimiento de un punto arbitrario de la cuerda es como el de un péndulo simple. Asimismo, estableció que la forma de la curva que toma la cuerda en un instante dado es sinusoidal y determinó el período de oscilación de la cuerda. Sin embargo, no consideró el problema de hallar la ecuación diferencial del movimiento.

En 1727, doce años después de la publicación de Taylor, Johann Bernoulli en dos cartas enviadas a San Petersburgo, llama la atención de su hijo Daniel sobre los resultados de Taylor, le comunica sus propios avances y lo desafía para que se ocupe del problema de la cuerda vibrante.

Enseguida que Daniel Bernoulli (1700-1782) recibió las cartas de su padre se empeñó en encontrar una solución plausible. A partir de las ideas de Taylor y apoyándose en las investigaciones de su padre, infirió que cualquier movimiento general se puede obtener como combinación de todas las oscilaciones fundamentales.

Daniel había llegado a la convicción de que la superposición de soluciones sinusoidales daba la solución más general del problema, lo que implicaba la posibilidad de expresar una función arbitraria como suma de senos.

Los trabajos que en la primera mitad del siglo XVIII se dedicaron al asunto, como los de Brook Taylor (1715), Johann Bernoulli (1728) y Daniel Bernoulli (1738), consideraban por separado los desplazamientos de la cuerda musical como función del tiempo t y como función de

[4] En la exposición de este problema hemos sintetizado las ideas expuestas en nuestro libro [Sánchez y Valdés. 2004, pp. 53-60] dónde el interesado puede encontrar un análisis más amplio y detallado.

la distancia x de un punto de la cuerda a uno de sus extremos, lo que los llevaba a considerar sólo ecuaciones diferenciales ordinarias y a soluciones de tipo sinusoidal $y = \operatorname{sen} \pi x/l \cdot \operatorname{sen} c\pi t/l$. Un modelo más cercano a la realidad exigía la consideración simultánea de las dos variables (t, x). En esta dirección avanzaron las investigaciones posteriores.

El tema de la cuerda musical, va a adquirir una nueva y polémica connotación con la incorporación de Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) quien pronto fue considerado entre los más prestigiosos geómetras de Francia en el *siglo de las luces.* El trabajo de D'Alembert *Investigaciones sobre la curvatura que forma una cuerda extendida puesta a vibrar* (1749) desata la polémica. Aquí, el ya célebre sabio encontró la ecuación en derivadas parciales que rige el movimiento ondulatorio de la cuerda y expone su solución de una manera sumamente ingeniosa. Obviemos el agudo razonamiento de D'Alembert y planteemos la solución encontrada por él y que tiene la forma siguiente:

$$y(t,x) = \frac{1}{2}\phi(at + x) - \frac{1}{2}\phi(at - x),$$

donde ϕ es una *función arbitraria*, pero que ha de ser periódica, representa a una onda viajera considerada tanto en su pasado como en su futuro y, además, en el instante inicial, $y(0,x)$ debe coincidir en el intervalo $0 \le x \le l$ con la función $f(x)$ que describe la forma inicial de la cuerda.

No obstante, D'Alembert no estaba seguro que esta *expresión analítica* contuviera todas las formas posibles de una cuerda en movimiento. Pocos meses después de leer los artículos de D'Alembert, Euler escribió por su parte el artículo *Sobre la oscilación de cuerdas.* Aunque en el método de solución siguió a D'Alembert, Euler tenía por ese tiempo una idea completamente distinta en cuanto a qué funciones se podían admitir como curvas iniciales. Fueron, al parecer, argumentos de naturaleza física en relación con el problema de la cuerda musical los que le impulsaron a anteponer su nuevo concepto de función. Euler acepta cualquier posición inicial de la cuerda, definida por una fórmula $f(x)$ en $-l \le x \le l$.

Así pues, el principal punto de desacuerdo de Euler con D'Alembert es que el primero admitía toda clase de curvas iniciales y, por tanto, soluciones no suaves, mientras que D'Alembert aceptaba solamente soluciones y curvas iniciales suaves.

Cuando Daniel Bernoulli leyó los primeros artículos de D'Alembert y de Euler sobre la cuerda vibrante, se apresuró a enviar a las Academias de San Petersburgo y de Berlín varios trabajos enfatizando su prioridad y las características más generales de sus resultados. En uno de estos artículos, publicado en 1753, Daniel Bernoulli subraya un aparente conflicto entre las consideraciones de Taylor, con sus soluciones sinusoidales, y la infinita variedad de soluciones, distintas de las sinusoidales, que aparecen en los trabajos de D'Alembert y Euler. Daniel trata de reconciliar las dos consideraciones mediante una visión sintética de la naturaleza musical de las vibraciones.

Después de permitirse sarcasmos sobre el carácter abstracto de los trabajos de D'Alembert y Euler, reitera que pueden existir simultáneamente muchos modos de oscilación en la cuerda vibrante (ésta responde entonces a la superposición de todos los armónicos). Insiste en que todas las posibles curvas iniciales se pueden representar en la forma:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

porque *existen suficientes constantes a_n como para que la serie se ajuste a cualquier curva*.

En consecuencia, afirma, que todos los correspondientes movimientos vendrán dados por la serie infinita:

$$y(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}$$

Así pues, cualquier movimiento, correspondiente a una curva inicial, no es más que una suma de armónicos periódicos sinusoidales, y la combinación tiene la frecuencia del armónico fundamental. Sin embargo, Bernoulli no dio argumentos matemáticos para apoyar sus afirmaciones; se apoyó solamente en argumentos físicos.

En su réplica, Euler afirma que la cuestión principal radica en preguntarse si todas las curvas del conjunto de la cuerda en movimiento están contenidas o no en esta expresión analítica. Euler opina que la respuesta es negativa y que la determinación de los coeficientes “es sin duda muy difícil, por no decir imposible”.

Podemos observar como en esta polémica se enfrentan diferentes concepciones relacionadas con la idea de “*función analítica”.* En primer lugar, una función debe ser una expresión analítica, entendida en su sentido más amplio; en segundo, toda curva debe ser posible expresarla mediante una función y finalmente, una expresión analítica representa a una única función para todos los valores posibles de la variable.

La posición de Bernoulli tiende a conciliar estas tres ideas cuando afirma que una función arbitraria puede ser representada mediante una serie trigonométrica, es decir una *expresión analítica,* aunque de una forma no adoptada en trabajos matemáticos anteriores. Según Euler, Daniel no ha logrado la conciliación, sino al contrario ha abierto nuevas incertidumbres.

Euler y D’Alembert dieron sus soluciones de la ecuación de ondas en forma cerrada, utilizando un par de funciones arbitrarias, mientras que Daniel había encontrado una solución en términos de una suma infinita de funciones trigonométricas. Y como esta última solución parecía implicar claramente el carácter periódico de la función, mientras que las funciones arbitrarias de D’Alembert y Euler no eran periódicas necesariamente, parecía que la solución de Bernoulli era menos general. Lo que no podía comprenderse entonces era que una superposición de "funciones tan buenas" como las trigonométricas pudieran representar una *función arbitraria.* Los medios técnicos del Análisis Matemático en esta época eran insuficientes para abordar con rigor conceptos básicos como el de función.

En resumen, el debate sobre la ecuación de la cuerda sometida a una vibración en un mismo plano, es importante desde el punto de vista matemático, porque la discusión llevó al cuestionamiento de las nociones establecidas de función y de representación de funciones arbitrarias por medio de series infinitas de funciones trigonométricas. Pero una explicación satisfactoria a esta polémica solo aparecerá en el siglo XIX, en los trabajos de Fourier, Cauchy, Dirichlet, Riemann y otros; cuando las concepciones de *representación, función continua* y *función arbitraria* se amplíen y, a la vez, se precisen.

Corrección de la idea de continuidad funcional

El estándar de rigor lógico, formado en el análisis matemático en la segunda mitad del siglo XVIII se quedó muy atrás de lo conquistado en las aplicaciones. En las postrimerías del siglo el problema de la reconsideración crítica del sistema de definiciones y procedimientos lógicos en las demostraciones adquirió novedad singular. Efectivamente, las investigaciones sobre la fundamentación del análisis matemático ocuparon en la Matemática del siglo XIX un lugar significativo.

Es innegable que un paso decisivo es el que da Joseph Fourier (1768-1830) en 1807 cuando presenta a la Academia de Paris, por primera vez, su *Memoria sobre la propagación del calor*.

A comienzos del siglo, muchos físicos e ingenieros se interesaban por la problemática de la propagación del calor en cuerpos sólidos, dada su importancia como una forma de energía que podía usarse para ayudar a la producción fabril. La memoria de Fourier fue recibida con interés, pero, debido a su falta de rigor matemático, no fue publicada. Fourier presentó una nueva variante a fines de 1811, que ganó un Premio de la Academia de París, pero no se publicó hasta 1822. Tras el conocimiento de esta obra, los sabios de la época consideraron a Fourier como precursor de la teoría de las series trigonométricas y además como original introductor de nuevos métodos en el tratamiento de los problemas de la física matemática.

En relación con el cálculo de los coeficientes, Fourier realiza la observación importante de que para permitir el cálculo de los coeficientes en el desarrollo de una función $f(x)$ es suficiente que, para cada valor de n, la región bajo la curva $y = f(x)\operatorname{sen} nx$ tenga un área, que pueda ser interpretada como el valor de la integral. De modo que Fourier no exige que la función sea continua y por consiguiente que la expresión tenga una integral que pueda ser calculada con su primitiva. Más aún, Fourier notó que, aunque la función sea continua en $[-\pi/2, \pi/2]$, la función extendida, a la cual converge la serie en la recta real completa, es necesariamente discontinua en los puntos x que sean múltiplos impares de $\pi/2$.

Así que las series de Fourier atrajeron la atención al estudio de las funciones discontinuas, otorgándoles los mismos derechos que a las continuas, como herramientas en la solución de problemas físicos. Fourier observa que su análisis puede ser aplicado al problema de la cuerda vibrante y justifica el punto de vista de Daniel Bernoulli. Un resultado esencial es el desarrollo en serie trigonométrica de una función dada en un intervalo por diferentes fórmulas (una función discontinua según la terminología del siglo XVIII). Fourier probó que una curva constituida por una combinación de arcos de curvas diferentes puede considerarse en una sola expresión analítica: su serie trigonométrica asociada.

Estas nuevas concepciones provocaron un alud de interrogantes: ¿qué debe entenderse por función continua?, ¿cómo definir la integral de una función y cuáles han de ser las funciones integrables?, ¿cuáles funciones pueden ser expresadas mediante series trigonométricas?, etc.

En realidad, Fourier solo trató funciones con un número finito de discontinuidades en un intervalo finito, pero su obra revolucionó la convicción tradicional de que las funciones algebraicas y las trascendentes elementales eran el prototipo de "*funciones arbitrarias*".

El personaje menos valorado y, no obstante, con ideas muy claras sobre el concepto función y su continuidad fue el sacerdote checo Bernardo Bolzano (1781-1848). Para Bolzano decir que una función f(x) varía de acuerdo a una ley de continuidad para todos los valores de x que están dentro o fuera de ciertos límites, no es otra cosa que esto: si x es cualquiera de tales valores, la diferencia $f(x+\omega)-f(x)$ puede ser hecha menor que cualquier cantidad dada, si uno hace ω tan pequeño como se desee.

A principios del s. XIX la mayoría consideraba evidente que una función era continua porque tomaba todos los valores entre dos valores dados. Para Bolzano esta evidencia había de ser probada. El llamado *Teorema de los valores intermedios* Bolzano lo demostró rigurosamente. Y, además, se interesó por probar que también las funciones discontinuas podían gozar de la propiedad de los valores intermedios. En este sentido construyó una función que toma todos los valores entre −1 y 1 en el intervalo [−1,1], y sin embargo, es discontinua en todo punto de dicho intervalo.

Lamentablemente la obra de Bolzano no fue difundida y menos aún reconocida por sus contemporáneos, incluso su monografía más importante: *Estudio sobre las funciones*, fue encontrada en 1920 y publicada solo en 1930, 100 años después de ser escrita.

A Bolzano, en su esfuerzo por precisar el concepto función continua, le sigue Augustin Cauchy (1789-1857). En su obra más completa escrita para el curso de *Análisis Algebraico* de la Escuela Politécnica de Paría, con el uso de las ideas básicas sobre límite, Cauchy plantea una definición de función continua muy semejante a la que hoy se encuentra en los textos.

No obstante, la aclaración completa de la diferencia entre la continuidad euleriana y la de Bolzano-Cauchy, aparece en 1844 cuando Cauchy da el ejemplo de la función

$$y=\begin{cases} x\,, & x\geq 0 \\ -x\,, & x<0 \end{cases},$$

que con esta forma de expresión resulta *discontinua* en el sentido de Euler, pero que también puede ser dada por una sola expresión analítica $y=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^2dt}{t^2+x^2}=|x|$, y entonces sería *continua* en el mismo sentido Euleriano. Así muestra Cauchy que la definición dada por Euler resulta insostenible lógicamente.

Cauchy definió la integral de una función continua (que extendió a funciones que tienen un número finito de discontinuidades) basándose en el recién definido concepto límite y sin apelar a un algoritmo de cálculo de difícil o imposible ejecución. De esta manera, amplió las posibilidades en la representación de funciones, tanto mediante una expresión en forma de integral, como a través de las series trigonométricas cuyos coeficientes podrían ser obtenidos por una integral definida.

Las nuevas ideas y las potentes herramientas surgidas en la primera mitad del siglo XIX aumentaron el arsenal de funciones disponibles, pero también ampliaron considerablemente el contenido de esta noción, brindando así la posibilidad de estudiar profundamente las funciones y clasificarlas de acuerdo a sus propiedades. Por otra parte, la teoría del cálculo había penetrado profundamente en la física, donde la variedad de tipos de movimientos estudiados (principalmente los procesos ondulatorios, electromagnéticos y termodinámicos) se había acrecentado considerablemente. Las funciones analíticas, no eran suficientes, era necesario considerar procesos no analíticos y, en ocasiones, incluso discontinuos.

La feliz aparición de los "monstruos"

La introducción en la enseñanza universitaria de los logros más recientes de las Ciencias Matemáticas, primero en los Institutos Superiores Politécnicos, promovidos en Francia al calor de la Revolución Burguesa y, algo después, en el tipo de Universidad neo-humanista concebido en el pujante reino de Prusia, provocó un inusitado interés por la fundamentación de la Matemática. Se realizaron esfuerzos por definir cada vez con mayor precisión los conceptos, por determinar con toda exactitud el campo de validez de los resultados, por no aceptar nociones y afirmaciones apoyadas solamente en la intuición geométrica o mecánica. En la demanda de solidez, belleza y elegancia, los más entusiastas promotores de estas nuevas ideas, van a engendrar ejemplos de funciones muy sofisticadas, que serán posteriormente apodadas *monstruos*.

Durante los años 1822-1825 Lejeune Dirichlet (1805-1859) visita París donde conoce a Fourier y su trabajo sobre el desarrollo de las funciones en series trigonométricas. Pero a Dirichlet no le satisface plenamente el rigor con que se analiza la convergencia de este tipo de series y se decide a suplir esta insuficiencia. De esta manera, surge el trabajo de Dirichlet, publicado en 1829, *Sobre la convergencia de series trigonométricas*. En este artículo, Dirichlet trabaja con funciones que satisfacen dos condiciones: son continuas en el intervalo $[-\pi,\pi]$, salvo posiblemente en un número finito de puntos y poseen a lo sumo un número finito de máximos y mínimos en dicho intervalo. Sin embargo, el único objetivo que tiene la hipótesis de continuidad sobre la función es garantizar la integrabilidad, en el sentido definido por Cauchy, de las funciones $f(x)\cos mx$ y $f(x)\operatorname{sen} mx$ que aparecen en las expresiones de los coeficientes de Fourier. Por esta razón, Dirichlet estaba convencido de que su resultado era válido para funciones más generales, sólo era necesario tener una definición de integral que fuera adecuada para funciones discontinuas. Incluso dejó constancia de su confianza en que la integral podía ser definida para funciones f con un conjunto infinito de puntos de discontinuidad que fuera *pequeño*. Con el objetivo de mostrar que no todas las funciones imaginables satisfacen esta condición presenta su famoso ejemplo de una función que toma un valor constante c en los puntos racionales de un intervalo y otro valor distinto d en los irracionales, señalando que esta función *no podría sustituirse* en la integral.

El doctorando de Gauss y alumno de Dirichlet, Bernhard Riemann (1826-1866), será quien desarrolle las ideas de su maestro y dé un paso decisivo en la clarificación del concepto función. En 1854, Riemann escribió la memoria *Sobre la posibilidad de representar una función por serie trigonométrica*. En la primera parte realiza un recuento histórico de la vieja polémica acerca de la representación por serie trigonométrica de una función arbitraria. En la segunda parte de esta memoria Riemann precisa su objetivo que es someter "… la representación de una función por serie trigonométrica a un examen que abarca los casos que no han sido tratados hasta ahora".

Y para iniciar la aclaración "Ha sido necesario hacer preceder este estudio de una corta Nota sobre la noción de integral definida, y sobre el dominio en el que esta noción es aplicable".

Con la integral de Riemann, la Matemática entró en el mundo de las funciones discontinuas y en este encontró muchos hechos inusitados y asombrosos. La entrada a este mundo fascinante se mantuvo cerrada hasta tanto la memoria de Riemann no se publicó *post morten* en 1867 en alemán y su traducción al francés en 1873.

Motivado por el trabajo de Riemann el francés Gastón Darboux (1842-1917) publica su *Memoire sur la théorie des fonctions discontinues*, todo un trabajo de más de 60 páginas dedicado a las funciones discontinuas, funciones a las cuales 30 años antes ningún matemático prestaba la menor atención. La memoria de Darboux desata un interés inusitado por las "funciones defectuosas"

La significación histórica del descubrimiento de que la continuidad en un intervalo no implica la diferenciabilidad en casi todos los puntos y de que las funciones pueden tener todo tipo de comportamiento anormal fue grandiosa. Los ejemplos de Riemann, Darboux y otros, fueron retomados, reanalizados, se generalizaron y se idearon otros. La nueva luz arrojada sobre las funciones discontinuas o continuas sin derivadas provocó que los matemáticos se dieran cuenta de que el estudio riguroso de las funciones no se limita a aquellas que se usan en el cálculo y las ramas tradicionales del análisis, donde el requerimiento de la diferenciabilidad restringe generalmente la clase de funciones tratadas.

Las funciones y las curvas con comportamiento extraordinario, poco a poco se fueron haciendo más ordinarias. Impactaban al intelecto modelado según cánones clásicos y estimulaban la generación de nuevas concepciones alrededor de los objetos asociados.

Pero no siempre existió unanimidad dentro de la comunidad matemática en la aceptación de estos nuevos entes. Sobre todo en Francia varias personalidades relevantes expresaron sus reservas a finales del siglo XIX. Citemos solo al catedrático de teoría del cálculo en la Sorbonne, el honorable Charles Hermite (1822-1901). Hermite en una carta fechada el 20 de mayo de 1893 expresa: *Me aparto con miedo y horror de esta lamentable plaga de funciones que no tienen derivadas*.

Abstracción teórico conjuntista del concepto función

Con el surgimiento de la teoría de conjuntos en la década de los 70 en el siglo XIX se abrió la posibilidad de expresar la relación funcional entre dos conjuntos abstractos no necesariamente numéricos.

El mismo George Cantor (1845-1918), creador de la teoría de conjuntos, no se vio precisado a dar una definición abstracta de función en sus primeras investigaciones de la década del 70, ya que trabajaba en general con subconjuntos numéricos del espacio euclidiano y no es hasta su monografía de 1895-1897 sobre los conjuntos transfinitos cuando necesitó de una definición abstracta de función.

La definición de Cantor, junto a otras similares, fueron criticadas por los rigoristas lógicos porque en ellas aparecían dos nociones indefinidas *conjunto* o sistema y *aplicación* o representación.

En 1911 Giuseppe Peano en una nota *Sobre la definición de función* aparecida en las actas de la Academia Nacional de Ciencias italiana trata de eliminar esta dificultad con una nueva definición donde la única noción primitiva indefinida es la de conjunto.

Para llegar a la definición abstracta de función Peano define primero el *producto cartesiano* de conjuntos

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

después el de *relación* como un subconjunto determinado del producto cartesiano $R \subset X \times Y$ y entonces el de *función* como una relación especial: si dos pares ordenados (x,y) y (x,z) con el mismo primer elemento están en la relación funcional f entonces necesariamente $y=z$.

Esta definición abstracta se repite en varios textos y en particular en los *Elementos de Matemática* que publica el grupo Bourbaki en 1939 y desde entonces ha sido legitimada:

> Sean X y Y dos conjuntos, diferentes o no. Una relación entre una variable x de E y una variable y de F se dice relación funcional de E hacia F, si, cualquiera sea $x \in E$, existe un elemento y de F, y uno solo, que esté en la relación considerada con x.
> Se da el nombre de función a la operación que asocia así a todo elemento de $x \in E$ el elemento $y \in F$ que se encuentra en la relación dada con x; se dice que y es el valor de la función para el elemento x, y que la función esta determinada por la relación funcional considerada.

Generalizaciones del concepto función en el Análisis

Una de las primeras generalizaciones de la idea de función numérica es la *función de conjunto* que aparece principalmente en la teoría de medida de conjuntos de puntos, en la encrucijada de los siglos XIX y XX, por ejemplo, Peano en 1887 introduce la diferenciación de una función que toma valores numéricos, pero está definida en una familia de conjuntos. La obra de Peano es extendida por otros especialistas en teoría de funciones, aunque es precisamente Henri Lebesgue (1875-1941) en 1910 quién promueve un estudio sistemático de este tipo de funciones en su monografía *Sobre la integración de funciones discontinuas* aparecida en el *Anuario de la Escuela Normal Superior*.

Por otra parte, el análisis clásico no solo se transformó en teoría de funciones, sino que también dio lugar a otra rama que surgió en el siglo XX como necesidad, sobre todo, de la modelación matemática de los fenómenos explicados por la emergente *Mecánica Cuántica*. Después de la introducción de los espacios de dimensión arbitraria (no solo de tres dimensiones como modelo del espacio físico, sino también con *n* grados de libertad como en muchos problemas de la mecánica racional y hasta con infinitas componentes como en los espacios de la mecánica cuántica) aparecieron las *funcionales* definidas sobre estos espacios, aunque con valores numéricos.

Quizás una de las generalizaciones que más ha beneficiado el intercambio con las ramas de la física moderna es la *teoría de las distribuciones*. En cierta forma las *funciones generalizadas,* como también se les llama a estos entes matemáticos, respondieron a la necesidad de aceptar soluciones de ecuaciones diferenciales que no fueran "suaves", como las que en el siglo XVIII Euler consideraba, sin preocuparse en absoluto por el rigor lógico y ocupado en encontrar una modelación matemática plausible para el problema de la cuerda vibrante. Tales ideas, como suele suceder, estuvieron latentes en muchos físicos que las aplicaban por necesidad sin tener un fundamento matemático para hacerlo, como es el caso de Paul Dirac (1902-1984), el físico inglés que es considerado uno de los fundadores de la mecánica cuántica.

Fue el ruso Serguei Sobolev (1908-1989) en la década de los años 30, con sus estudios sobre las ecuaciones de onda (como la que dio origen a la polémica de la cuerda vibrante), quién sistematizó el estudio de las *funciones generalizadas* y abrió las oportunidades prácticas a la teoría. Sin embargo, la obra que resultó significativa en el mundo occidental fue la de Laurent Schwartz (1915-2002) quién precisó los conceptos y con su *estilo bourbakista* le dio la estructura y el sabor abstracto que la colocó dentro de la disciplina general del Análisis Funcional[5].

Es interesante notar que ambos matemáticos, Sobolev y Schwartz, llegaron a las funciones generalizadas por vías totalmente diferentes, aunque, uno y otro, son herederos del estilo de pensamiento desarrollado a comienzos del s. XX.

Sobolev hizo su primera ponencia pública en el Segundo Congreso de los matemáticos soviéticos el 29 de junio de 1934 con la conferencia "*Soluciones generalizadas de la ecuación de ondas*". Citemos un fragmento ilustrativo de esta conferencia:

> La clase de las funciones que se pueden considerar como soluciones de la ecuación de ondas desde el punto de vista clásico está formada de funciones dos veces diferenciables. Pero en diversas aplicaciones prácticas parece cómodo considerar unas funciones que tienen singularidades de un tipo bien definido. Se introduce un espacio de funciones integrables en el sentido de Lebesgue, en el cual se pueden definir las soluciones generalizadas de la ecuación de las ondas como límite de soluciones dos veces diferenciables. Con la ayuda de un criterio simple de integrabilidad, se da una condición necesaria y suficiente para que una función sea una solución generalizada, y se establece la relación entre las soluciones ordinarias y las soluciones generalizadas.

Por su parte, en 1946, Schwartz publicó su artículo sobre *La generalización de la noción de función* donde expone sin demostraciones el nuevo lenguaje de las distribuciones. Fue en su tratado en dos tomos, de 1950, sobre la *Teoría de las distribuciones* donde Schwartz introduce todos los elementos necesarios para estructurar esta teoría con las definiciones, teoremas y demostraciones completas que explican la generalidad de las distribuciones. En la amplia clase de las *distribuciones* quedan incluidas las medidas como funciones de conjunto, muchos de los funcionales lineales entre espacios de dimensión infinita y por supuesto, también las funciones *auténticas* del análisis clásico.[6]

[5] Recomendamos la lectura de los artículos {Kantor, 2005] y [Youschkevitch, 2005] aparecidos en el *Boletín de los Matemáticos* franceses, dónde se aclara la discutida paternidad de las funciones generalizadas.

[6] Una exposición bastante amplia de la historia del concepto función desde la antigüedad hasta nuestros días, puede encontrarse p.e. en [Sánchez y Valdés. 2007]

Conclusiones con una exhortación

Hemos visto cómo en el siglo XX se entrelazan dos vertientes en la consagración del concepto función. Una de las vías parte de la idea euleriana de función como expresión analítica y la otra vía, a través de la generalización y formalización del concepto función, desemboca en la *teoría de las distribuciones.* No debe sorprender a quien conoce la historia de la Matemática que estos conceptos en su expresión más amplia y abstracta alcanzaran una gran aplicación en la física moderna y otros campos de la ciencia.

Con nuestro paseo por la Historia y la Epistemología de la Teoría del Cálculo, en los tres siglos de la Edad Moderna Tardía: XVIII, XIX y XX, pretendimos estimular la reflexión sobre la manera en que los conceptos asociados fueron forjados y los obstáculos fueron vencidos en su perfeccionamiento. Consideramos que ahora, a través de un trabajo didáctico adaptativo, pudiera hacerse compatible con un curriculum moderno y, en última instancia, facilitar su cabal comprensión. Por supuesto, no es lo mismo adaptarlo para un curso de Educación Media Superior, que para la enseñanza universitaria y dentro de esta, para la formación de profesionales de la Matemática o de la Física o de las Ciencias Técnicas o de la Computación.

Además, por supuesto, se deben tomar en cuenta las directivas vigentes en cada país. Pero nos parece útil que en el nivel medio se enfatice sobre el concepto función en sus primeros estadios y se muestre su evolución en su interrelación con otras materias, siempre presentando la resolución de los problemas típicos de cada época, hasta el s. XIX, inclusive. Saltando los detalles, pero sin perder el rumbo y la coherencia del discurso.[7]

En una carrera de Matemática o Física los avances del s. XX, incluyendo las representaciones analíticas y las funciones generalizadas, pueden, en nuestra opinión, servir para una mejor comprensión no solo de la Teoría del Cálculo sino de muchas de las aplicaciones actuales.

Para las Ciencias de la Computación, no solo la representación analítica, también un mayor énfasis en los aspectos lógicos, teórico conjuntistas, podrán ayudar a convencer al alumno de las bondades del pensamiento matemático. Sin olvidar que los algoritmos de aproximación juegan un papel singular en la asimilación de los conceptos de la Teoría del Cálculo.

Estas son algunas simples sugerencias, cada docente, según los objetivos concretos de su práctica profesional, debe seleccionar el asunto conveniente y adaptarlo.

Referencias y bibliografía

Bressoud, D. M., Ghedanisi, I., Martinez-Luaces, V., Torner, G. (2016) *Teaching and Learning of Calculus*. ICMI 13. Topical Surveys. Springer Nature. Switzerland.

Euler, L. (2001) Introducción al análisis de los infinitos. Edición con notas de Antonio Durán. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. THALES. Sevilla.

Jahnke, H. N. (Ed) (2003) *A History of Analysis*. American Math. Soc. New York.

[7] El resumen del ICME 13 de las discusiones sobre la Temática del Cálculo editado por [Bressoud, Ghedanisi, Martinez-Luaces y Torner, 2016] y el artículo [Michelsen, 2006] pueden ayudar a la toma de decisiones. Una visión más reciente se encuentra en el artículo [McLarty, 2023]

Kantor, J-M. (2005) Mathématiques d'Est en Ouest. Théorie et pratique: l'exemple des distributions. *Bulletin des Mathématiciens*, pp. 33-43.

McLarty, C. (2023) Current and Classical Notions of Function. In Chemla, K. et al. *The Richness of the History of Mathematics.* Springer Verlag. N. Y.

Michelsen, C. (2006) Functions: a modelling tool in mathematics and science. ZDM. Vol. 38 (3) 269-280

Pier, J. P. (2001) *Mathematical Analysis during the 20th. century.* Oxford Univ. Press.

Sánchez Fernández, C. (2023*) Prácticas Matemáticas en la Edad Moderna*. Editorial Universitaria "Félix Varela" La Habana.

Sánchez Fernández, C. y Valdés Castro, C. (2007). *Un Paseo por la Historia de las Funciones.* Editorial Nivola. Madrid.

Sánchez Fernández, C. y Valdés Castro, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo.* Editorial Nivola. Madrid.

Tao, T. (2016*) Analysis I y II*. New Delhi. Hindustan Books Agency

Youschkevitch, A. P. (2005) Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions géneralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions géréralisées*. (*Traducción de J-M. Kantor del artículo aparecido en 1991 en la revista rusa Istoriko-matematicheskie issledovanie) *Bulletin des Mathématiciens*, pp. 44-50.