
# Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral: Elementos teórico-prácticos desde un modelo de Enseñanza Exploratoria

Luis Fabián **Gutiérrez-Fallas**
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
luisfabian.gutierrez@ucr.ac.cr

**Resumen**

En esta conferencia paralela se abordarán tres ejes temáticos principales de la Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral (CDI): (i) *la naturaleza epistemológica* de los contenidos en el CDI y la noción de procept, (ii) *el pensamiento matemático avanzado* y sus procesos de razonamiento, y (iii) *las tareas matemáticas fenomenológicas* y sus principios de diseño. Estos ejes temáticos serán articulados con una metodología de clase basada en la *Enseñanza Exploratoria*, dentro de un contexto de enseñanza superior universitaria. Será tomado como referencia un estudio de desarrollo profesional en el que participaron profesores de Matemática de CDI que se llevó a cabo durante dos años en una universidad pública de Costa Rica.

*Palabras clave*: Costa Rica; Tareas matemáticas fenomenológicas; Razonamiento matemático; Enseñanza exploratoria; Cálculo Diferencial e Integral.

## Introducción

La enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral (CDI) ha representado históricamente un desafío central en la Educación Matemática universitaria. Su complejidad conceptual y alto nivel de abstracción han generado, en muchos contextos, persistentes dificultades de aprendizaje entre el estudiantado, así como elevados índices de reprobación y deserción. Estos indicadores, aún vigentes a pesar de los avances en la Didáctica de la Matemática, señalan la necesidad de replantear los enfoques tradicionales de enseñanza del CDI y de promover propuestas didácticas que propicien aprendizajes más significativos para los estudiantes que cursan carreras afines a las ingenierías, a la economía, la salud, entre otras.

En las últimas dos décadas, la investigación en Educación Matemática ha prestado especial atención al CDI, no solo para analizar las dificultades que enfrentan los estudiantes, sino también para diseñar estrategias de enseñanza innovadoras que integren componentes epistemológicos, cognitivos, tecnológicos y didácticos (Fonseca & Henriques, 2019; Trevisan & Araman, 2021). Entre estas propuestas emergen con fuerza aquellas orientadas a favorecer una comprensión relacional del conocimiento matemático (Skemp, 1976), es decir, un aprendizaje que articule de forma coherente los significados, procedimientos y representaciones de los conceptos, y que se fundamente en procesos de razonamiento matemático (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017; Trevisan et. al, 2023).

El razonamiento matemático es esencial para el desarrollo de aprendizajes con sentido en el CDI, en particular por el carácter avanzado de sus conceptos, como el límite, la continuidad, la derivada o la integral. Estos requieren que el estudiantado transite desde formas elementales de pensamiento, basadas en experiencias concretas, hacia procesos propios del pensamiento matemático avanzado, tales como la definición formal, la demostración y la abstracción (Jaffar & Dindyal, 2011; Fernández-Plaza et al., 2013). Como lo indican estos autores, el paso de una concepción empírica a una formalizada implica una transformación profunda en la forma de entender y construir el conocimiento matemático, especialmente en momentos de transición como el primer encuentro con los conceptos fundamentales del análisis.

Las formas en que las personas docentes abordan estos conceptos varían considerablemente: algunas optan por una introducción intuitiva, otras adoptan una presentación basada estrictamente en el análisis formal, y otras combinan ambas perspectivas (Fonseca & Alfaro, 2018). Sin embargo, independientemente del enfoque, muchas veces se elude el trabajo con contextos reales o significados personales, lo que dificulta la apropiación profunda del contenido por parte del estudiantado (Fernández-Plaza et al., 2013; Trevisan et al., 2023).

En este escenario, la integración de tecnologías digitales, como GeoGebra, ha mostrado potencial para transformar la experiencia de aprendizaje en el CDI. Estas herramientas permiten representar de forma dinámica y visual conceptos complejos, abren posibilidades para la experimentación matemática y favorecen la interacción activa con los objetos de estudio (Fonseca & Henriques, 2019).

No obstante, los enfoques de enseñanza del CDI que articulen tareas exploratorias, integración tecnológica y desarrollo del pensamiento matemático avanzado han sido poco sistematizados en la literatura. En particular, resulta aún incipiente la investigación sobre propuestas basadas en un modelo de *Enseñanza Exploratoria*, el cual plantea tres principios didácticos fundamentales: (i) iniciar el trabajo con nociones intuitivas y con práctica de cálculo antes de introducir definiciones formales, (ii) diseñar tareas matemáticas de carácter exploratorio que incorporen tecnologías digitales, y (iii) promover el desarrollo de significados correctos y articulados de los conceptos del CDI a través del uso de múltiples representaciones y procesos de razonamiento (Canavarro, 2011; Muñoz-Ortiz et. al, 2025).

A partir de estas ideas, este trabajo presenta una propuesta didáctica teórico-práctica para la enseñanza del CDI en la educación superior, fundamentada en un modelo de Enseñanza Exploratoria. La propuesta se construye a partir de una revisión bibliográfica sobre la temática y en articulación con una experiencia de desarrollo profesional docente llevada a cabo en una universidad pública costarricense, en la que participaron profesores de CDI durante dos años.

## Fundamentos teóricos para un didáctica del cálculo centrada en la enseñanza exploratoria

### Comprensión de conceptos en el Cálculo: una mirada epistemológica y didáctica

La enseñanza del CDI ha sido históricamente un campo de tensiones entre la formalización matemática y los procesos de comprensión por parte del estudiantado. Una revisión de la literatura especializada evidencia que las dificultades de aprendizaje en esta área están asociadas, en gran medida, a concepciones instrumentales del conocimiento, centradas en el dominio de técnicas y algoritmos, y alejadas de una comprensión relacional y significativa de los conceptos involucrados (Skemp, 1976).

Autores como Gray y Tall (1991, 1994) proponen la noción de *procept* para explicar la flexibilidad cognitiva que se requiere al abordar objetos matemáticos que pueden ser entendidos tanto como procesos como productos. Por ejemplo, el símbolo "$f'(x)$" puede representar tanto la operación de derivar – *aplicar un procedimiento* – como el objeto "la derivada" – *aplicar un concepto* –. Esta ambigüedad, lejos de ser un obstáculo, constituye una oportunidad para promover un pensamiento matemático más rico, en el que el simbolismo adquiera significados interconectados. En este sentido, el *pensamiento proceptual*, según estos autores, es una capacidad clave para la comprensión relacional de los conceptos del CDI.

Las investigaciones en el campo de la Educación Matemática también han dado cuenta de la complejidad que representa el tránsito desde una comprensión intuitiva de los conceptos hacia una formalización rigurosa. Tall y Vinner (1981) introducen las nociones de *concepto-imagen* y *concepto-definición*, así como el *factor de conflicto potencial*, para dar cuenta de las tensiones cognitivas que se producen cuando el conocimiento informal del estudiante entra en contradicción con la definición formal del concepto.

Complementariamente, Tall (2004) propone la teoría de los tres mundos del pensamiento matemático: *el mundo personalizado-empírico* (basado en la experiencia sensorial y visual del sujeto cuanto interactúa con las nociones desde contextos iniciantes), *el mundo simbólico-proceptual* (vinculado a la manipulación de símbolos y reglas en la ejecución de procedimientos matemáticos), y *el mundo formal* (centrado en definiciones, teoremas y demostraciones matemáticas). Según esta teoría, el aprendizaje de los conceptos del CDI ocurre en el tránsito entre estos mundos, siendo deseable que los procesos de enseñanza puedan orientar a los estudiantes a navegar entre ellos de manera consciente y articulada.

### Representaciones, visualización y pensamiento matemático avanzado

Un elemento fundamental para potenciar el aprendizaje en el CDI es el uso articulado de múltiples *representaciones*: gráficas, numéricas, simbólicas y verbales. Según Duval (2006), la comprensión matemática depende en gran medida de la capacidad de los estudiantes para realizar conversiones entre distintos registros de representación, proceso que constituye una puerta de entrada a la comprensión relacional de los conceptos.

Tall (2002) y Karatas et. al (2011) argumentan que la enseñanza del CDI debe fomentar la coordinación intuitiva entre representaciones gráficas y algebraicas. La *visualización*, en este sentido, no es un recurso auxiliar, sino una herramienta cognitiva de primer orden para el razonamiento matemático (Arcavi, 2003; Rivera, 2011). No obstante, el potencial de la visualización suele ser subutilizado en la enseñanza tradicional del CDI, la cual privilegia el tratamiento simbólico en detrimento de las representaciones visuales (Fonseca & Henriques, 2019).

Desde esta perspectiva, el *pensamiento matemático avanzado* (Fernández-Plaza et. al, 2013) se concibe como una capacidad para integrar y transitar entre representaciones, formular conjeturas, justificar resultados y construir conexiones entre conceptos. La comprensión de los conceptos fundamentales del CDI —como el límite, la continuidad, la derivación y la integración— requiere de procesos de razonamiento que vayan más allá de la simple manipulación algebraica, como la visualización, la abstracción reflexiva y la autorregulación del aprendizaje (Tall, 2002).

La promoción del razonamiento matemático es una de las claves para una didáctica del CDI orientada a la comprensión relacional. El razonamiento deductivo, inductivo y abductivo permite a las personas estudiantes formular conjeturas, argumentar soluciones y validar resultados (Mata-Pereira & Ponte, 2017; Trevisan & Araman, 2021). En el contexto del CDI, estos tipos de razonamiento se articulan con tareas que demandan exploración, inferencia y justificación.

Una enseñanza orientada al razonamiento debe incluir tareas que movilicen procesos de generalización, validación y justificación, permitiendo que los estudiantes exploren, manipulen e interioricen los conceptos matemáticos abordados. Tal como señalan Trevisan et al. (2023), el diseño de tareas exploratorias, centradas en fenómenos y con múltiples representaciones, es fundamental para fomentar el razonamiento covariacional y estructural, tan necesarios en el estudio del CDI.

En este sentido, la labor docente no consiste únicamente en presentar técnicas y algoritmos, sino en diseñar situaciones didácticas que permitan a las personas estudiantes construir sus propias conjeturas y validarlas en un entorno dialógico y reflexivo (Muñoz-Ortiz et. al, 2025, Trevisan & Araman, 2021).

## Enseñanza Exploratoria y escenarios de aprendizaje: principios metodológicos

La Enseñanza Exploratoria, tal como ha sido conceptualizada por Canavarro (2011), Oliveira et al. (2013) ofrece un marco metodológico que permite articular las dimensiones antes mencionadas. Este enfoque promueve un aprendizaje activo y autónomo, centrado en la exploración de fenómenos, la formulación de conjeturas, el uso de múltiples representaciones y la reflexión colectiva.

En el marco del proyecto de desarrollo profesional docente que se realizó durante dos años, 2023 y 2024, en una universidad pública de Costa Rica, las propuestas didácticas fueron orientadas desde escenarios de aprendizaje que responden a los principios de esta metodología de Enseñanza Exporatoria, articulando tareas fenomenológicas, tecnología digital y momentos de discusión colectiva. Entre los elementos metodológicos más destacados se encuentran: (i) la presentación de una situación o fenómeno significativo; (ii) el trabajo autónomo y colaborativo con apoyo de recursos tecnológicos como GeoGebra; y (iii) la sistematización colectiva de resultados y la formalización de los conceptos matemáticos emergentes.

## Propuestas didácticas articuladas con un modelo de enseñanza exploratoria

Como parte del proyecto de desarrollo profesional docente, en el cual participaron 20 docentes universitarios, se diseñaron e implementaron **cuatro propuestas didácticas**, cada una estructurada en torno a un escenario de aprendizaje específico. Estas propuestas buscaron operacionalizar los principios de la Enseñanza Exploratoria mediante el diseño de tareas matemáticas fenomenológicas, el uso de múltiples representaciones y la integración de tecnologías digitales como GeoGebra. A continuación, se sintetizan brevemente las propuestas y se establece su articulación con los fundamentos teóricos discutidos.

### Propuesta 1: Exploración del concepto de límite

- **Eje temático:** Límite de una función real de variable real
- **Duración:** 3 horas
- **Herramienta principal:** Libro digital interactivo en GeoGebra

Esta propuesta introdujo el concepto de límite a través de tareas organizadas en cinco capítulos progresivos, que integraron representaciones numéricas, gráficas y simbólicas. Se trabajó con aproximaciones de funciones y sucesiones, el uso de polígonos inscritos y circunscritos, y situaciones contextualizadas en distintas disciplinas.

La propuesta favoreció la transición desde el mundo conceptual-personalizado hacia el mundo formal del conocimiento matemático (Tall, 2004). Además, la tarea permitió movilizar el pensamiento proceptual mediante el trabajo simultáneo con símbolos que representaban procesos (aproximaciones) y objetos (límites) (Gray & Tall, 1994). La visualización dinámica de GeoGebra apoyó procesos de conversión y tratamiento entre representaciones (Duval, 2006), fortaleciendo así la comprensión relacional del concepto (Skemp, 1976).

### Propuesta 2: Deducción de la Regla de L'Hôpital

- **Eje temático:** Derivación en una variable
- **Duración:** 2 horas
- **Herramienta principal:** Exploración gráfica y numérica en GeoGebra

A partir de funciones construidas específicamente para generar una forma indeterminada tipo 0/0 se propuso una tarea que condujo al estudiantado a inferir empíricamente la Regla de L'Hôpital. La actividad promovió el análisis del comportamiento de cocientes de funciones y sus derivadas en torno a un punto crítico, combinando representaciones gráficas, algebraicas y numéricas.

Esta propuesta promovió el razonamiento abductivo e inductivo, al invitar al estudiantado a construir conjeturas a partir de evidencias numéricas y visuales (Mata-Pereira & Ponte, 2017). La tarea también favoreció la justificación informal y el tránsito entre diferentes registros, apuntando a una comprensión flexible del concepto de derivada. La estructura de la clase, dividida en fases de exploración, trabajo autónomo y discusión colectiva, reflejó los principios metodológicos de la Enseñanza Exploratoria (Canavarro, 2011; Oliveira et al., 2013).

**Propuesta 3: Deducción del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)**

- **Eje temático:** Integración en una variable
- **Duración:** 3 horas
- **Herramienta principal:** Modelización de un fenómeno físico (aceleración) y GeoGebra

Esta propuesta se centró en el vínculo entre derivación e integración, a partir de un contexto fenomenológico de cambio de velocidad en una partícula. Se utilizó la visualización del área bajo la curva como construcción progresiva y acumulativa, que dio lugar a la definición operativa de la función integral y su derivada.

La tarea propició el tránsito entre los mundos conceptual y simbólico-formal, según Tall (2004), y movilizó procesos de razonamiento covariacional (Trevisan & Araman, 2021). El diseño apoyó la explo93ración de significados dinámicos del área bajo la curva y permitió una construcción inductiva de la noción de antiderivada. La articulación entre contexto, representación gráfica y formulación simbólica potenció una comprensión relacional del TFC.

**Propuesta 4: Regla de la cadena en funciones multivariables**

- **Eje temático:** Derivación en varias variables
- **Duración:** 3 horas
- **Contexto fenomenológico:** Modelo de utilidades de una empresa ficticia

Mediante el análisis de la utilidad total en función del precio de dos productos (pollo frito y pizza), se diseñó una tarea orientada a la deducción de la Regla de la Cadena mediante el uso del diagrama de árbol. Las personas estudiantes debían identificar las dependencias funcionales entre variables, calcular derivadas parciales y realizar inferencias sobre la tasa de cambio compuesta.

Esta propuesta integró pensamiento proceptual (Gray & Tall, 1994) y razonamiento estructural para analizar relaciones entre variables. El contexto permitió significar los objetos matemáticos desde una perspectiva aplicada, promoviendo el razonamiento avanzado a partir de un modelo contextualizado (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017). La estructura de la clase respetó las tres fases de la Enseñanza Exploratoria: tarea significativa, trabajo autónomo, discusión colectiva.

Estas propuestas permiten evidenciar cómo un enfoque teórico-práctico, sustentado en la Enseñanza Exploratoria y la movilización de principios de la Didáctica del CDI, puede transformar la enseñanza de conceptos matemáticos desde una lógica instrumental hacia una lógica comprensiva, visual, exploratoria y argumentativa. En conjunto, ofrecen un marco replicable para el diseño de experiencias de aprendizaje que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático avanzado en contextos de educación superior.

## Conclusiones

La enseñanza del CDI continúa siendo un terreno fértil para la reflexión didáctica y la innovación pedagógica. Las persistentes dificultades en su aprendizaje, lejos de ser una debilidad, deben entenderse como una invitación a repensar nuestras prácticas docentes y los marcos teóricos que las sustentan. Esta conferencia busca precisamente que ese diálogo continúe, articulando aportes epistemológicos, cognitivos y didácticos con experiencias prácticas desarrolladas en el marco de un proyecto de desarrollo profesional con docentes universitarios.

El modelo de Enseñanza Exploratoria se posiciona como una alternativa metodológica potente, que desafía la lógica tradicional de la enseñanza del Cálculo, al situar al estudiantado como protagonista activo de su aprendizaje. A través de tareas fenomenológicas, el uso de tecnologías digitales, la movilización de representaciones múltiples y el fomento del razonamiento matemático, es posible construir ambientes de aprendizaje que promuevan una comprensión relacional de los conceptos, más allá de su simple manipulación algorítmica.

Desde una perspectiva profesional, el trabajo conjunto entre docentes-investigadores ha mostrado que la transformación de las prácticas no ocurre de forma espontánea, sino que requiere espacios formativos sostenidos, colaborativos y reflexivos. Las propuestas didácticas presentadas son el resultado de un proceso colectivo de diseño, implementación, análisis y mejora, que da cuenta de una didáctica del CDI situada, contextualizada y abierta a la complejidad de las aulas universitarias.

Finalmente, esta experiencia reafirma que es posible enseñar CDI de manera comprensiva, significativa y formativa. Para ello, se requiere una mirada crítica sobre los modelos heredados, apertura a la exploración didáctica y un compromiso ético con el aprendizaje profundo de las personas estudiantes. El CDI, lejos de ser una barrera para los estudiantes, puede ser una puerta hacia el desarrollo de su pensamiento matemático avanzado, si sabemos cómo construir el camino que lleva hasta ella.

## Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), 9*(1), 143-168.

Fernández-Plaza, J., Ruiz-Hidalgo, J., & Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos: Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), 16*(1), 131-146.

Fonseca, J. y Alfaro, C. (2018). El Cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. *Revista Educación, 42*(2), 1-22. https://doi.org/10.15517/revedu.v42i2.25844

Fonseca, V., & Henriques, A. C. C. B. (2019). Aprendizagem do teorema do valor intermediário numa abordagem exploratória com o GeoGebra. Revista Intersaberes, 14(31), 129-144. https://doi.org/10.22169/ri.v14i31.1511

Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (vol. 2, pp. 72-79). Assis, Itália: PME.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 115- 141.

Gutiérrez-Fallas, L. F., & Henriques, A. (2017). A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função. Quadrante, 26(1), 25-49. https://doi.org/10.48489/quadrante.22945

Jaffar, S. M., & Dindyal, J. (2011). Language-related misconceptions in the study of limits. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the AAMT-MERGA Conference* (pp. 390-397). Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.

Karatas, I., Guven, B., & Cekmez, E. (2011). A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concept. *Bolema, 24*(38), 245-264.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

Muñoz Ortiz, E. E., Angulo Chaves, P., Robles Padilla, C., & Picado Piedra, A. (2025). Diseño de una tarea fenomenológica para la exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 18(1), 277–290. https://archivo.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/62394

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. New York, NY: Springer.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Tall, D. (2002). Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2004). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 23*(3), 29–33.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Trevisan, A. L., & Araman, E. M. O. (2021). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema*, 35(69), 158-178. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a08

Trevisan, A. L., Negrini, M. V., Falchi, B., & Araman, E. M. O. (2023). Ações do professor para a promoção do raciocínio matemático em aulas de cálculo diferencial e integral. *Educação e Pesquisa*, 49, e251659. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349251659