Sobre a importância de compreender as relações entre as noções de "contagem, comparação e medição" no ensino de Matemática elementar

Yuriko Yamamoto **Baldin**
Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos
Brasil
yuriko@ufscar.br

Resumo

O objetivo desta conferência é discutir a importância da formação profissional dos professores da educação básica que compreendem as relações entre as noções de "contagem, comparação e medição" na fase inicial da Educação Matemática escolar. O tema se fundamenta no "conhecimento pedagógico de conteúdo - PCK", o conhecimento profissional do professor que ensina conteúdos com métodos adequados e análise do desenvolvimento curricular. Este conhecimento inclui o reconhecimento das origens conceituais dos conteúdos matemáticos do currículo escolar, de modo a sustentar o desenvolvimento da aprendizagem sólida da Matemática básica. A questão investigada foca na alfabetização matemática a partir da linguagem da aritmética como base do pensamento matemático, cujo desenvolvimento se conecta à língua pátria, através da resolução de problemas textuais, pela leitura, interpretação, exploração e análise de estratégias e resultados. A discussão espera contribuir para as investigações sobre a formação de professores para enfrentar a transição entre os níveis da educação básica.

Palavras-chave: Brasil; Conhecimento profissional de professores; Transição na Educação Matemática Básica; Letramento matemático; Alfabetização numérica; Resolução de problemas.

Introdução

Este texto tem o objetivo de desenvolver as colocações apresentadas na conferência paralela durante o IV CEMACYC de 2025. A formação de professores é um eixo temático de investigação importante na Educação Matemática, tendo em vista os desafios das atualizações curriculares exigidas pelas mudanças rápidas do século XXI, atingindo a educação de crianças e jovens em escala global. Para que as desejadas reformas curriculares sejam implementadas de forma eficiente nas salas de aula, as formações iniciais e continuadas de professores se tornam temas de investigação de alta relevância. A educação dos professores, especialmente dos anos iniciais, se torna um tema crucial que impacta a cadeia educativa entre os diversos níveis escolares, do elementar até o superior. Nesta perspectiva, a educação da fase inicial da educação escolar se apoia em dois pilares basilares de alfabetização, a da língua pátria e a Matemática. Dentro das investigações de Educação Matemática, o tema da transição entre as fases escolares mostra rupturas que provocam dificuldades na aprendizagem, em especial entre os anos que compreendem os anos iniciais (1º a 4º anos) e os finais (5º a 9º anos) da educação básica, antes do nível de Ensino Médio. A passagem para o nível de ensino médio e deste para o nível de ensino superior também apresenta problemas específicos de aprendizagem da Matemática, merecendo atenção diferenciada, mas a transição nesses níveis não está no foco de discussão neste texto.

O objetivo do texto é focar no início da educação básica, quando o desenvolvimento do pensamento matemático precisa de técnicas de comunicação específicas para trazer a compreensão integrada da linguagem pátria junto com o vocabulário específico de Matemática escolar. Portanto, consideramos a comunicação da Matemática com linguagem apropriada para docentes e estudantes dos anos iniciais do ensino escolar como importante para que a implementação e a execução de currículos pretendidos ocorram de maneira produtiva. Para alcançar essa finalidade, torna-se evidente a importância dos professores dos anos iniciais compreenderem o significado essencial das atividades de alfabetização numérica que estão a seu cargo na sala de aula.

O foco na fase inicial de educação escolar se deve à evidência levantada por documentos importantes como Gatti (2009) de que os professores dos anos iniciais possuem formação específica de pedagogia integradora, mas não trazem suficientemente o conhecimento especializado da disciplina matemática dos anos finais da educação básica. É certo que o conhecimento de Matemática escolar básico (aritmética, geometria básica, medição e tratamento elementar de dados, resolução de problemas elementares) faz parte da sua formação, mas a insegurança sobre a natureza abstrata da Matemática que permeia a educação até os anos finais provoca problemas notótios de ensino e aprendizagem, com fenômenos de falta de desempenho na transição, especialmente a partir do 4o. ano. No Brasil, a preparação insuficiente de professores que atuam nos anos iniciais no conhecimento de Matemática já é apontada, por exemplo, em (Gatti, 2009, p. 24), refletindo no desempenho dos estudantes em distintos momentos de avaliação de pequena ou larga escala, há décadas.

A importância de uma orientação para os professores sobre os passos essenciais nos anos iniciais que dão sentido ao fluxo curricular dos livros didáticos na sua prática encontra suporte também em " Adding it up: Helping children learn mathematics" (Kilpatrick, Swandell &

Findell, 2001), uma publicação da National Research Council, dos Estados Unidos. Nesta obra, as ideias conceituais básicas de aritmética e suas operações são apresentadas para sustentar o desenvolvimento do pensamento matemático da aprendizagem dos anos iniciais, para além da estrutura curricular escolar. Os autores indicam, já no prefácio da obra, que o currículo escolar inicia com a aritmética e suas operações que permeiam até os anos finais da etapa fundamental da escola, mas a compreensão do desenvolvimento dos conteúdos e as conexões das ideias matemáticas que se inicia com a aritmética e suas operações é necessária para a educação no sentido mais amplo, além do currículo escolar.

Por isso, nesta conferência escolhemos o tema de "contar, comparar, medir" como uma ferramenta para os professores poderem adquirir com segurança o conhecimento do conteúdo que precisam ensinar e dos porquês das metodologias diversas disponibilizadas em materiais didáticos. Os professores devem ser capazes de compreender as ações pedagógicas fundamentadas nesses conhecimentos que permitem conectar os conteúdos curriculares entre si e evoluir ao longo dos anos escolares. Isso faz parte do conhecimento especializado do professor que aprende a ensinar e contribui para mitigar as falhas na transição entre os níveis escolares.

Para reconhecer esses conceitos, os professores devem perceber que se procuram respostas a perguntas como: "O que devo ensinar? O que vem depois e por quê? Como conectar o conhecimento adquirido para dar o passo seguinte? Como saber se os alunos estão aprendendo? Como conciliar os treinamentos de técnicas operatórias dentro do fluxo de pensamento matemático? Como avaliar que a aprendizagem está ocorrendo, ou ainda, qual é o objeto de avaliação, o conceito, a técnica ou ambos?"

Para responder a essas indagações que são naturais para refletir sobre a prática pedagógica, não basta apenas rever os conceitos matemáticos que estão nos documentos curriculares e livros didáticos. O conhecimento do professor que ensina necessita de uma base mais ampla e complexa. Este conhecimento dos professores é a combinação de "conteúdo, metodologias e conexão curricular", isto é, o conhecimento pedagógico do conteúdo (matemático no caso), como preconizado por Shulman (1986, 1987), e presente na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018). O conceito cunhado por Shulman é familiarmente difundido como PCK (*pedagogical content knowledge)* que permitiu a construção de um conceito focado em conteúdo matemático, mais detalhado e dentro da Educação Matemática, o Conhecimento Matemático para o Ensino - MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008). O reconhecimento da necessidade de incluir esse conhecimento para a formação de professores aparece nas publicações e documentos curriculares. Um exemplo no Chile para a formação inicial de professores apresenta explicitamente o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo - PCK como rationale para conectar o conteúdo e a pedagogia com a abordagem do Shulman (1986) para sustentar o desenvolvimento da publicação "Parâmetros de Matemática para a Formação Inicial de Professores no Chile, um livro de recursos para professores e educadores" (Felmer, 2014). Podemos citar outras publicações focadas em estabelecer dimensões ou parâmetros para qualificar a formação de professores na educação básica como SEARS-MTpara a Região do Leste Asiático (SEAMEO-RECSAM, 2013) ou (Takahashi, 2010), e o documento BNC- Formação no Brasil (BRASIL, 2019) que faz menção ao conteúdo e prática como dois dos eixos do documento. As referências SEARS-MT e Takahashi (2010) discutem a formação dos professores que atuam na educação básica, relativas ao conhecimento matemático. Uma publicação sobre as relações do currículo escolar de Matemática com o tema de avaliação que precisa estar no conjunto de conhecimentos de um professor de educação básica é (Ruiz, 2018). As obras citadas são referências importantes que mostram a abrangência internacional das discussões sobre a formação do professor de Matemática, porém, deixamos claro que não é o foco deste texto abordar as questões gerais de estrutura e parâmetros da formação do professor de anos iniciais, na linha dessas obras, embora (Felmer, 2014) inclua em seus capítulos exemplos explícitos de como introduzir conceitos básicos e metodologias para trabalho direto nas salas de aula. O presente texto pretende argumentar, sob a perspectiva da Matemática, esclarecer as noções fundamentais do pensamento matemático subjacente à prática do professor, quando trabalha a pedagogia dos primeiros passos da aprendizagem pela comunicação matemática, apoiado no conhecimento pedagógico de conteúdo.

O objetivo específico deste texto consiste em apresentar uma análise reflexiva das considerações sobre "contagem, comparação, medição" como pensamentos importantes dos professores dos anos iniciais para compreender o significado do conteúdo curricular.

O texto está estruturado nas seguintes seções: A ideia matemática da contagem e a linguagem de representação conceitual; - A ação de contagem e a representação simbólica da linguagem matemática; - O significado de comparação nas atividades matemáticas e a representação simbólica; - A ação de medição no currículo dos anos iniciais e sua relação com a aritmética; - Considerações finais sobre a resolução de problemas e modelagem em linguagem matemática.

A ideia matemática da contagem e a linguagem de representação conceitual

A alfabetização numérica que se inicia nos primeiros anos da educação escolar é uma necessidade do letramento que acompanha o domínio da escrita em língua pátria e forma a base da comunicação de ideias. São inúmeros os livros sobre teoria de números, filosofia da ciência e da Matemática, álgebra, história da Matemática, etc., que podem fazer parte da biblioteca de um professor em formação inicial ou continuada, mas o livro que o professor mais usará na sua prática é o livro didático, acompanhado de obras paradidáticas, e outros materiais que trabalham metodologias diversas e oferecem farto material manipulativo ou sugestões de atividades lúdicas e de tarefas. Porém, quando se questiona "por que o conteúdo está sendo apresentado assim, com que propósito?", a explicação não é usualmente encontrada tampouco o suficente para mostrar a conexão com o conhecimento que virá anos à frente do currículo escolar, e o professor acaba se contentando com os processos repetitivos de procedimentos de ensinar "trabalhando as folhas atividades como tarefas para os alunos", na ordem apresentada nos livros/materiais didáticos. O professor que procura a resposta nos livros especializados de Matemática não a encontra sem que precise compreender um vocabulário abstrato próprio da linguagem matemática. Existe um salto em traduzir a linguagem abstrata da Matemática para a linguagem viva do cotidiano que traduza o conceito matemático sintetizado no livro didático.

Neste sentido, uma literatura que elucide com palavras simples e diretas o significado da essência dos conceitos tem valor fundamental. Uma das formas é conhecer a história da evolução da Matemática ao longo dos tempos, acompanhando a própria história do desenvolvimento da comunidade humana nas suas atividades sociais. Berlinghoff e Gouvea (2004) escreveram uma obra para ser "*um guia fácil e prático para professores e entusiastas*", resultado de uma pesquisa da História da Matemática e seu uso no Ensino, da National Council in Teaching Mathematics, dos Estados Unidos. A obra organizada por Guimarães e Borba (2009), "Reflexões sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais de escolarização" apresenta uma coletânea significativa de artigos por vários autores sobre a importância dos conteúdos matemáticos desde os primeiros passos na contagem a problemas de ensino de operações. A obra (Mandarino & Belfort, 2006) é uma contribuição diretamente destinada para a formação continuada dos professores que atuam na fase da alfabetização numérica, sobre o tema de Números Naturais, Conteúdo e Forma. Não vamos comentar aqui livros especializados de Matemática que tratam da teoria de números, mesmo aqueles voltados para professores, por estarem além do escopo deste texto.

Nas obras citadas, o ato de "contar" objetos, sejam do mundo real ou representados por figuras e também ideias faladas, é o ponto de partida da aprendizagem matemática para introduzir uma representação simbólica que sintetiza a "quantidade" do conjunto de objetos, manipuláveis ou enumeráveis. No primeiro ano escolar, o ato natural de contar, com dedos ou apontados para nomear os objetos, é natural e os alunos aprendem a escrever os numerais correspondentes. É o início da alfabetização numérica.

A ação de contagem e a representação simbólica da linguagem matemática

A escrita do conceito de um "número" que representa uma "quantidade", independente dos objetos ou outras coisas que podem ser "contadas", é o início da abstração matemática, ao introduzir uma simbologia e nomenclatura que não é o objeto em si, mas tem um significado próprio (observamos que, deliberadamente, não vamos desviar para as teorias de representação semiótica). Por isso, surge o conceito de "equivalência" entre classes de objetos que podem ser "comparados" por uma correspondência um a um (biunívoca) entre seus elementos. Estamos dizendo que a abstração da Matemática nasce neste ato de "contar" por meio da "comparação", e cada número, escrito por um numeral (no nosso sistema de numeração), representa a propriedade de um dado conjunto de objetos ter elementos correspondentes um a um com outro conjunto, sem deixar nenhuma exceção, e essa propriedade é invariante em relação a todo conjunto com mesma quantidade do conjunto inicial. É uma relação de equivalência matemática. Um número ganha uma identidade no mundo da Matemática que não é o conjunto de objetos que acabou de contar, mas representa uma propriedade do conjunto. Por isso, nas primeiras páginas de atividade de um livro didático do 1º ano os alunos fazem os exercícios de identificar nas ilustrações os objetos em quantidade que pode ser representada por um número, e aprendem a verbalizar o nome dele em língua pátria, e treinam a sua escrita. É o início da alfabetização numérica em paralelo com a alfabetização da linguagem.

O símbolo de igualdade (=) não deve ser usado para comparar os objetos, mas, sendo um símbolo matemático, é reservado na atividade de "contagem" para representar a igualdade entre os numerais que representam as quantidades iguais de dois conjuntos que foram comparados. Neste processo, após identificar o significado do numeral, como símbolo, surge a relação de "maior que" (>) ou "menor que" (<), estabelecendo uma relação de ordem no conjunto dos números, chamados naturais, ou inteiros.

O significado de comparação nas atividades matemáticas e a representação simbólica

Nos exercícios de comparação de quantidades, é natural trabalhar um número que possa ser decomposto em números menores que ele, por exemplo, 5 como 1 e 4, ou 3 e 2, compreendendo, por "comparação", as quantidades de partes do conjunto de 5 objetos que pode ser separados em dois conjuntos, de 1 e 4 objetos, ou de 3 e 2 objetos. Quando se visualiza a situação com manipulação dos objetos e compreende naturalmente a composição de dois números para constituir um número maior, já se introduz o significado da estrutura de adição nos números inteiros, antes de operar. Na operação de adição se trabalham naturalmente as ações associadas à operação, como juntar ou acrescentar partes.

Introduzindo o símbolo + para somar dois números, podemos representar, usando o símbolo de igualdade (=): $5 = 1 + 4 = 2 + 3$. É claro que podemos escrever $2 + 3 = 3 + 2$, significando que ambos os lados da expressão representam o mesmo número que é 5. Estamos comparando os resultados das operações em cada lado da expressão e deduzindo que podemos usar o símbolo de igualdade (=) entre as duas expressões. Esse raciocínio é um pensamento algébrico da aritmética, sendo desenvolvido desde a fase da alfabetização. Este pensamento prepara o conceito de balanceamento de lados de uma equação em anos subsequentes da educação escolar.

A representação das operações algébricas com os números acompanha a alfabetização em língua pátria. A subtração entre dois números se dá por "comparação" entre os dados, e o resultado é 0 (zero) se forem iguais. Logo, a "diferença" entre dois números diferentes é o número que falta ao menor para compor o número maior, isto é, o número que "somado" ao "menor" resulta no maior. Outra situação surge quando dado um número, "retiramos" (subtraímos) um número menor, "sobrando" um número que, ao somar com o retirado, volta a completar o número dado. Representamos simbolicamente $7 - 3 = 4$, significando que $4 + 3 = 7$. Dependendo do contexto da situação, retiramos ou completamos, sempre por meio da "comparação" num contexto aditivo.

Associar a linguagem falada para descrever as ações dinâmicas das situações com os números leva naturalmente à atividade matemática relevante para a aprendizagem que é Resolução de Problemas, quando a modelagem em linguagem simbólica das operações que surgem da interpretação dos enunciados dos problemas ou do exercício de proposição de problemas, enriquece as atividades na sala de aula e a condução significativa dos professores para mediar o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

As operações de multiplicação e divisão, também encaminhadas com os mesmos princípios, tornam a jornada do ensino e da aprendizagem da Matemática básica menos penosa e mais significativa para ser realizada pelos professores. A obra (Mandarino & Belfort, 2005), produzida como um produto da Rede Nacional de Formação Continuada de Professores de Educação Básica, um projeto do MEC de 2003, é um rico material didático com orientações pedagógicas precisas das atividades de alfabetização numérica nos anos iniciais.

O conceito de agrupamento em unidades de 10 leva ao conceito de representação decimal utilizada de forma padronizada no mundo atual. Muitas estratégias de ensino da representação posicional, que é um caminho para a representação de números cada vez maiores, são trabalhadas também nos anos iniciais, por exemplo, com materiais concretos e manipulativos, uso de tecnologias. Seu princípio consiste em agrupar as unidades de 10 em 10, chamando o grupo formado de 1 dezena. Repetindo a ideia de que um grupo chamado "dezena" pode ser visto como nova unidade de contagem (de dezenas), agrupando as dezenas de 10 em 10, constituímos novo grupo chamado "centena", e assim sucessivamente. A ordenação de direita para esquerda dos numerais que representam respectivamente as quantidades de "unidade", "dezena", "centena", etc. cria um sistema de representação posicional, com enormes vantagens de cálculo e possibilidades de representações. Por exemplo, 387 significa 3 centenas, 8 dezenas e 7 unidades, logo $387 = 300 + 80 + 7$.

A operação de divisão de um número por outro aparece em situações-problema de divisão exata equitativa, como no caso de operação inversa de uma multiplicação de dois números inteiros. Porém, dados dois números inteiros, nem sempre um é divisor do outro. Também nestes casos, o pensamento matemático é de comparação para responder a questões como "quantas vezes o menor dos números cabe como parte do maior?", "Se dividir o maior em um número de partes iguais correspondente a um número menor, qual é o número de cada uma dessas partes? Esse número é sempre um inteiro?" A situação de divisão não exata, quando o maior número não é múltiplo do menor, a situação leva ao conceito de um número que não é inteiro, mas que multiplicado por número menor recupera o maior, isto é, uma nova unidade de contagem, chamada fração unitária que poderá ser contada com o mesmo princípio da aritmética, porém num campo expandido. Em outras palavras, dividir um número inteiro ***a*** por outro número inteiro ***b*,** não nulo, produz um número denotado $\frac{a}{b}$ (*a* vezes a fração unitária *1/b)* que tem a propriedade de $b \times a/b$ resulta o número original *a*.

Quando não se atenta a essa coerência, o ensino fica fragmentado em atividades, estratégias metodológicas ocasionais e sem continuidade, e com predomínio de treinamento de técnicas de cálculo ou exercícios formatados sem flexibilidade que caracteriza o mundo real.

Ainda para enfatizar a versatilidade de modelos de representação nesta fase da alfabetização matemática, apontamos a representação dos números num modelo geométrico de semirreta, onde a escolha de um ponto de partida 0 e aleatoriamente de um ponto 1 permite destacar o segmento como uma representação geométrica da "unidade" de contagem ao longo da semirreta. Essa representação é uma manifestação do pensamento matemático de escolha de um sistema referencial, chamada "reta numérica". Neste modelo de representação, os pontos marcados sobre a semirreta, usando como unidade de contagem o segmento de extremos 0 e 1, reproduzem as propriedades dos números até então estudadas, como *maior, menor*, isto é, a ordem dos números. As operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão também podem ser sistematizadas neste modelo, seguindo a orientação da semirreta, o que possibilita inclusive a introdução conceitual de números fracionários desde o 3º ano, como fazem os livros didáticos dos países da Ásia, enquanto observamos um atraso considerável no Brasil. O modelo de semirreta é uma abstração dos modelos concretos de objetos reais, como fila de alunos, fila de carteiras na sala, organização das linhas e colunas em tabelas, gráficos de dados tabelados para comparação, etc., possibilitando um amadurecimento do pensamento matemático para suavizar a transição entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental.

A ação de medição no currículo dos anos iniciais e sua relação com a aritmética

As atividades de medição são parte importante do currículo dos anos iniciais como elo de ligação entre a Matemática e os problemas aplicados na vida real, em que os objetos nem sempre são unidades discretas de objetos concretos para contagem, como no caso de líquidos, por exemplo. As grandezas iniciais para medição são distância, comprimento, largura, perímetro, área, capacidade, massa, temperatura, abertura (angular), além de ter unidades diversas como xícaras, baldes, fardos e muito mais. Porém, logo surgem outras grandezas como rapidez, tempo, distâncias longas, unidades diversas, incluindo partes fracionárias, ou modelos de padrões para contagem, escalamento de medidas para entender proporcionalidade. Em todos esses problemas a essência da aritmética resolve os problemas de cálculo com números que resultam das medições, quando "medir" significa "comparar" a grandeza em questão do objeto com uma "unidade de medida" própria dessa grandeza, e o resto é fazer a aritmética da contagem dos números que são representados pela medição. Tratar essa diversidade de situação com base no conceito básico de "contagem das unidades do problema medidas com instrumentos adequados" traz a competência necessária no ensino e aprendizagem de Matemática elementar dos problemas e desafios do século XXI com suas tecnologias e interdisciplinaridade.

Considerações finais sobre a resolução de problemas e modelagem em linguagem matemática

Neste pequeno texto, focamos no pensamento fundamental da contagem, ato de comparar como básico na Matemática que distingue as classes de equivalência para simplificar e sintetizar os modelos. Essa simplificação nada mais é do que meio para identificar a essência do que é importante e que permite expandir para novos campos de conhecimento, sem perder a conexão com o conhecimento adquirido. A medição conecta os conceitos para o mundo das aplicações, mesmo dentro da própria matemática ou de outras ciências, sendo a medição nada mais que "comparar" usando ferramentas adequadas com modelos de unidades para atribuir números que permitam dar respostas e interpretar fenômenos aos problemas originais. Neste cenário da Matemática, a linguagem que permite modelar um problema real traduzindo para um modelo matemático, usar a linguagem matemática para executar e testar as estratégias de solução, comunicar matematicamente a resposta para interpretar e analisar dentro do problema real, é o ciclo completo da Metodologia de Resolução de Problemas, em qualquer nível de ensino e aprendizagem.

Professor dos anos iniciais que compreenda e visualize os princípios de "contar, comparar, medir" nos roteiros de ensino e de aprendizagem e seu papel no desenvolvimento do currículo terá potencializado a sua formação.

Referências e bibliografia

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, Vol. 59, N. 5, Dec 2008, 389-407.*

Berlinghoff, W.P., Gouvêa, F. Q. (2004). *A Matemática através dos Tempos- Um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2a edição.* Blucher. São Paulo.

BRASILl (2018) *Base Nacional Comum Curricular-BNCC*, Ministério da Educação, Brasilia DF.

BRASIL (2019) *Base Nacional Comum para Formação de Professores da Educação Básica-BNC-Formação. Ministétrio de Educação. Brasilia DF.*

Felmer, P. (Org.) (2014). *Primary Mathematics Standards for Pre-Service Teachers in Chile- A Resource Book for Teachers and Educators.* Series on Mathematics Education Vol. 9 World Scientific Publishing Co. Singapore.

Gatti, B.A. (2009). Análise dos cursos presenciais de Licenciatura em Pedagogia. Em Gatti, B. A., Muniz, M. & Nunes, R. (Org) *Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas*. Vol. 29. Fundação Carlos Chagas/ Departamento de Pesquisas Educacionais. São Paulo.

Guimarães, G., Borba, R. (Org.) (2009). *Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização.* Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM. Recife.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds) (2001). *Adding it up- Helping Children Learn Mathematics.* National Research Council. National Academy Press. Washington DC

Mandarino, M.C., Belfort, E. (2005). *Matemática nas Séries Iniciais Parte I, Números Naturais - Conteúdo e Forma.* Rede Nacional de Formação Continuada de Professores de Educação Básica, Ministerio de Educação. Rio de Janeiro.

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza Capacidades Superiores* CIAEM. Mexico.

SEAMEO-RECSAM (2013). *Southeast Asia Regional Standards for Mathematics Teachers (SEARS-MT)* Regional Centre for Education in Science and Mathematics. Penang, Malaysia.

Takahashi, A. (2010). Prospective and Practicing Teacher Professional Development with Standards. *APEC Conference on Replicating Exemplary Practices in Mathematics Education. Koh Samui, Thailand*.

Shulman, L.S. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2). 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review,* 57, 1-22.