El problema de la explicación en la filosofía de la práctica matemática y su aporte a la formación inicial de profesores

Luis Carlos **Arboleda**
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen

En una primera parte se dará una visión general del campo de la Filosofía de la Práctica Matemática haciendo énfasis en aquellos temas y líneas en estrecha conexión con la práctica profesional del profesor. En una segunda parte se hará una aproximación a la cuestión de Explicación y Comprensión desde la perspectiva histórica y didáctica. Aplicaremos este enfoque de explicación a la práctica matemática de Fréchet de generalización a los espacios topológicos del Teorema del Valor Extremo del Análisis real. En la tercera parte se plantearán algunas ideas sobre el uso de esta historia filosófica de la práctica matemática en la formación inicial de profesores.

Palabras clave: Filosofía de la Práctica Matemática; Historia de la Matemática; Formación de Profesores; Teorema del Valor Extremo de Weierstrass; Ulisse Dini; Maurice Fréchet.

La explicación matemática en la Filosofía de la Práctica Matemática

En un trabajo dirigido a la comunidad de educadores matemáticos con el fin de defender la tesis de la "fertilización cruzada" existente entre la Filosofía de la Práctica Matemática (FPM) y la Educación Matemática (EM), Hamami (2020) afirma:

> La educación matemática y la filosofía de la práctica matemática son dos campos de investigación cuyos dominios se solapan de forma sorprendente. Sin embargo, las interacciones entre ambos campos han sido muy limitadas hasta la fecha, ya que la investigación se realiza mayoritariamente en paralelo, a veces sobre los mismos temas. En consecuencia, el potencial de interacción y enriquecimiento mutuo entre ambos campos sigue estando poco explorado y explotado.

Comienza haciendo una revisión de la literatura de las últimas décadas para mostrar que las nuevas tendencias en FPM, a diferencia de los estudios tradicionales sobre los fundamentos abstractos de la Matemática, apuntan a las "explicaciones matemáticas que hagan justicia a las múltiples dimensiones del conocimiento y la comprensión, tal y como se producen en la práctica matemática real".

Hamami reconoce seis líneas de interés común y mutuo enriquecimiento entre ambos campos, señalando en cada una sus propósitos y autores que hicieron contribuciones esenciales a su desarrollo en el campo FPM y algunas referencias a trabajos ya realizados sobre posibles interconexiones con EM: 1) razonamiento y prueba, 2) diagramas y visualización, 3) comprensión y explicación, 4) notaciones y sistemas simbólicos, 5) valores matemáticos y 6) agencia matemática.

Los usos posibles de la FPM en la enseñanza de las Matemáticas deberían satisfacer al menos dos criterios: 1) proporcionar recursos conceptuales para la mejor comprensión del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, y 2) develar la pertinencia educativa de aspectos del pensamiento y la práctica matemática que han sido poco o nada analizados.

Así mismo, se refiere a algunas líneas de investigación en EM que contribuyen a la agenda actual de FPM (Weber e Inglis, 2020): 1) conocimientos matemáticos para la enseñanza, 2) trayectorias de aprendizaje, 3) aprendizaje de las Matemáticas por comprensión, 4) identidad del estudiante y del profesor de Matemáticas y 5) andamiaje (*scaffolding*) o "proceso mediante el cual un profesor ayuda, guía, entrena y apoya a un estudiante en la realización de una tarea que el estudiante no podría hacer completamente por su cuenta".

Comprensión y explicación es uno de los temas de investigación con enfoques compartidos que a su juicio ofrece los mayores beneficios. Menciona a este respecto el problema de las pruebas explicativas: ¿qué hace que algunas pruebas sean capaces de explicar *por qué* un teorema es verdadero además de establecer *que* lo es? Mancosu en particular ha hecho contribuciones esenciales en esta línea de investigaciones de FPM (Mancosu, 2001, 2005).

En esta serie de trabajos, particularmente en (Mancosu, 2001), se hacen ciertas consideraciones que nos interesa comentar. Una manera de aproximarse al problema de las pruebas explicativas es tener en cuenta que habitualmente la prueba de un teorema convence, pero no necesariamente explica su razón de ser. La prueba euclidiana del teorema de Pitágoras por el método de comparación de áreas convence. El método de prueba por las relaciones de semejanza de los triángulos determinados por la altura de la hipotenusa explica. La razón última del teorema de Pitágoras es la proporción entre las áreas de estos triángulos y el cuadrado de la relación de semejanza. Pero aun así, no toda prueba explica el porqué, su origen, su motivación, su realización y alcance.

Quisiera poner atención, escribe Mancosu, a las formas de explicación de las Matemáticas en las que la presentación de una teoría proporciona la *explicación natural* de sus resultados. Las ideas de base de estas consideraciones parecen encontrarse en el enfoque de Kitcher de *unificación explicativa*. Según Kitcher (1975):

> El poder explicativo de las teorías científicas se destaca cuando revelan conexiones entre fenómenos que antes se consideraban inconexos. En el ámbito de las matemáticas ocurre lo mismo y es habitual reivindicar el enfoque "abstracto" de las matemáticas apelando a las conexiones que se revelan al estudiar disciplinas familiares como instancias de estructuras algebraicas generales.

Mancosu y otros comentaristas del modelo unificacionista han igualmente destacado la siguiente cita de Kitcher (1989):

> La ciencia hace avanzar nuestra comprensión de la naturaleza al mostrarnos cómo derivar descripciones de muchos fenómenos, utilizando la misma derivación una y otra vez, y, al demostrar esto, nos enseña cómo reducir el número de tipos de hechos que tenemos que aceptar como últimos (o absolutos).

En un momento dado de la historia de la ciencia, continúa Kitcher, habrá un conjunto de enunciados aceptados K. El *acervo explicativo* sobre K especificará un conjunto de patrones argumentales que permiten que algunos miembros de K se deriven de otros miembros de K. Una explicación de E(K) será entonces una instancia de tal patrón argumental. Kitcher añade que una explicación es legítima cuando aparece "en el acervo explicativo en el límite del desarrollo racional de la prácticsa científica" (Kitcher 1989).

En lo que sigue de este trabajo vamos a tratar de aplicar el modelo de Kitcher en la explicación de dos generalizaciones de primer y segundo grado de abstracción, respectivamente agenciadas por Dini y de Fréchet, de un teorema básico del análisis, el *Teorema del Valor Extremo* (TVE). El esquema que utilizaremos, interpretando a Kitcher (1989), es el siguiente: Sean E', E'', E'''… las explicaciones respectivas del principio de TVE en las teorías T', T'', T'''... Estas explicaciones se refieren a las aplicaciones del principio del TVE antes de su demostración formal por Dini. Por ejemplo, en los trabajos de Weierstrass sobre el principio de Dirichlet, de Cantor sobre series trigonométricas y en las demostraciones de Bonnet y Serret de distintos teoremas del análisis real.

Todos estos agentes reconocen en sus prácticas el estatuto de "gran teorema" del TVE. Un agente, Dini, estaba mejor *situado* para conocer estas explicaciones, en el sentido de haber asumido el compromiso de presentar de manera rigurosa, sistemática y unificada —según los ideales de rigor del programa de Weierstrass— los resultados del campo del análisis real en un texto. Este agente comprende que E', E'', E''',..., son instancias de una E más general, y que cada una de ellas debe ser incorporada de cierta manera (posiblemente vía isomorfismos) en el patrón general y unificado de E.

La anterior caracterización del acto de razonamiento que conduce a Dini a la formulación y prueba del TVE, corresponde al modelo causal de la explicación propuesto por Khalifa (2017, 142), el cual incorpora el estudio de la interacción de agentes a través de ciertos mecanismos al modelo unificacionista de Kitcher. Pero sería Fréchet quien habría llevado al límite este modo de razonar, al darle la mayor generalidad explicativa al TVE.

Parafraseando a Khalifa (2017, 142), la generalización del TVE a los espacios abstractos de Fréchet, ofreció una explicación unificadora de las distintas versiones antes aceptadas del teorema en contextos teóricos particulares de la teoría de funciones y el análisis. La versión generalizada redujo las explicaciones anteriores a sus características esenciales, las cuales quedaron imbricadas en la más simple. Al mismo tiempo, aumentó nuestra capacidad de comprensión matemática, en cuanto a la constitución de nuevos objetos y teorías matemáticas que emergieron como consecuencia de esta generalización, en particular, la teoría de la compacidad, la topología general y el análisis funcional.

El Teorema del Valor Extremo (TVE) en las funciones de variable real

Es bien sabido que las bases de la teoría de conjuntos de Cantor se encuentran en sus artículos de 1870 sobre las series trigonométricas. Ver, por ejemplo, (Dugac, 2003). Recordemos que el estudio de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica fue uno de los problemas de mayor interés entre los matemáticos de mediados del siglo XIX (Bottazzini 2018). Nos interesa sobre todo el primero de estos artículos en donde Cantor (1870) se enfrenta a la necesidad de demostrar el TVE para justificar su utilización como argumento o recurso en la demostración del objeto principal de ese trabajo, el llamado *teorema de la unicidad* (Cantor, 1870, 80):

> Sea $F(x)$ una función continua para todo x en $[a, b]$. Si $F(x)$ es representable en serie trigonométrica convergente para todo valor de x, su representación es única.

La emergencia de enunciados relativos al TVE, en tanto recursos auxiliares del teorema de la unicidad de Cantor y de otras proposiciones del análisis matemático, se erigirá como condición de posibilidad para formular y demostrar la proposición unificadora que finalmente obtendrá el consenso de los matemáticos. Vamos a examinar algunos de los aspectos de la práctica matemática de Cantor, Bonnet, Serret y Dini que pueden ayudarnos a comprender la anterior afirmación. Nos apoyamos para ello en Dugac (2003) y Bottazzini (2018) que proveen elementos importantes sobre la función argumentativa del TVE en el artículo de Cantor, como también sobre la búsqueda de legitimidad para su trabajo en sus intercambios epistolares especialmente con H. Schwarz y E. Heine.

Recordemos que Heine incorporó en sus trabajos el enfoque weierstrassiano de formalización rigurosa de los conceptos de límite, continuidad y derivada. Ello le permitió obtener resultados novedosos, por ejemplo, en el estudio de la convergencia de series trigonométricas, en donde formalizó y desarrolló la distinción original de Weierstrass entre convergencia puntual y convergencia uniforme. En la historia de la topología conjuntista su nombre está asociado con el de Borel a una de las proposiciones que explican la constitución del concepto compacto de Fréchet, el llamado Teorema de Heine-Borel-Lebesgue.

Schwarz, por su parte, fue uno de los alumnos más destacados de Weierstrass. A él se debe la publicación de materiales relacionados con los cursos y conferencias del "padre del análisis matemático" en la Universidad de Berlín. Cantor sostuvo una interesante correspondencia fundamentalmente con Schwarz e indirectamente con Heine, buscando su parecer y aceptación del resultado de su investigación sobre el teorema de la unicidad de la representación de F(x).

Entre los intercambios que reporta Bottazzini (2018) sobre la cadena de argumentos inferenciales que aseguraban la prueba del teorema, hay uno que llama la atención para los fines de este trabajo. Se trata de la siguiente observación que Cantor agrega como nota de pie de página a la demostración de cierto lema sobre la condición de linealidad de la función F(x), uno de los argumentos clave para asegurar la cadena de inferencias de la prueba principal (Cantor, 1870, 141):

> Esta demostración se basa esencialmente en el siguiente teorema frecuentemente utilizado y demostrado en las conferencias del Sr. Weierstrass: Dada una función $F(x)$ continua en el intervalo (a, b), extremos incluidos, la función *alcanza* el máximo g de los valores que puede asumir, al menos para un valor u de la variable, de modo que $F(u) = g$.

Años antes O. Bonnet y J. A. Serret también habían reconocido la importancia de este principio en el análisis. Efectivamente, ello se constata en el tomo primero del *Cours de calcul différentiel et intégral* de Serret (1868), en donde este principio se aplica, implícitamente y sin mencionar a Weierstrass, en la prueba del teorema del valor intermedio. En una nota al final de la prueba, Serret reconoce que su autor fue Bonnet.

Desde cuando Dini asistió a los cursos de Serret en 1868 en el *Collège de France* en París empezó a tomar conciencia de la necesidad de generalizar y demostrar el principio como teorema e integrarlo en una exposición rigurosa del análisis de variable real con el enfoque de Weierstrass, en sus cursos de 1871-1872 en la Universidad de Pisa y luego en sus *Fundamentos de la teoría de funciones de variable real* (Dini, 1878).

Desde su aparición, el libro de Dini fue considerado por sus contemporáneos, entre otros por Cantor y Dedekind, como el primer tratado moderno de análisis. Esto es, como la obra que mejor expresaba el estilo epistemológico y el ideal de rigor en la práctica matemática del análisis a finales del siglo XIX y comienzos del XX. Dini reveló a los ojos de la comunidad matemática un sentido nuevo de la importancia del *Teorema principal* de Weierstrass (*Hausptlehsatz)*.

En su contribución a la publicación colectiva en memoria de Weierstrass, Hilbert expresa este consenso en los siguientes términos (citado en (Hairer y Wanner, 1995)):

> Con este teorema, que establece que una función *continua* de variable real alcanza realmente sus límites superior e inferior, es decir, que necesariamente posee un máximo y un mínimo, Weierstrass creó una herramienta que hoy en día es indispensable para todos los matemáticos que realizan las más refinadas investigaciones analíticas o aritméticas.

Hay algo que se debe destacar en la generalización operada por Dini al teorema de Weierstrass teniendo en cuenta el modelo unificacionista de la explicación de Kleiner. Esta generalización no sólo tuvo implicaciones en la teoría de funciones y el análisis en R. También conllevó una cascada de generalizaciones en otros campos teóricos, en los cuales, como recuerda Hilbert, se constituyó en herramienta indispensable de sofisticadas investigaciones. En la continuación de la cita anterior, Hilbert da como ejemplo la aplicación del TVE al cálculo de variaciones.

Recordemos que desde su primera crítica al *Principio de Dirichlet* en 1870, Weierstrass había observado que si bien Riemann sabía que la integral de Dirichlet estaba acotada por debajo, lo que garantiza la existencia de un mínimo, sin embargo, daba por sentada la existencia de una función que alcanza el mínimo. Weierstrass dio un ejemplo de una funcional cuya integral tiene un límite inferior máximo que no es un valor mínimo (ver "Principio de Dirichlet" en: https://academia-lab.com/enciclopedia/principio-de-dirichlet/).

La formulación rigurosa del principio en términos de la versión extendida del TVE a funciones generalizadas (funcionales) contribuyó al desarrollo de los métodos directos del cálculo de variaciones y a la emergencia de un nuevo campo de las Matemáticas, el Análisis funcional. En cuanto a lo primero, se puede consultar el capítulo de la teoría de los máximos en el libro de Hadamard (1910) sobre el cálculo de variaciones, que corresponde a las lecciones de Hadamard en el Collège de France, recopiladas y redactadas por Fréchet.

Mencionemos de paso que en la redacción del capítulo de estas lecciones correspondiente a la extensión de la teoría clásica de valores extremos de una función de una y varias variables, Fréchet destaca la relevancia que le dio Hadamard en sus cursos al estudio de esta teoría, inspirándose en su tratamiento en los textos de análisis de Tannery, Humbert, Goursat y Jordan, así como en el álgebra de Serret.

La segunda referencia es el célebre artículo de Hadamard (1912) sobre el papel del cálculo de variaciones en el desarrollo del Análisis funcional, en el cual el maestro destaca la contribución original en este campo de su alumno, el joven Fréchet, al lado de Volterra, Arzêla, Pincherle, Bourdel y otros. Guerraggio (2015) ha mostrado que la obra de Dini contribuyó a estimular, particularmente en la escuela italiana de Volterra y en la francesa de Hadamard, los estudios de diferentes clases de funciones generalizadas mediante la extensión en ellas de propiedades significativas de las funciones reales.

En este contexto histórico de estímulo al desarrollo de prácticas progresivas de generalización y unificación de propiedades importantes del análisis y la teoría de funciones, se explica la generalización por primera vez del TVE a los espacios abstractos por parte de Fréchet (1904). Este es un caso significativo de que siempre hay un dominio de explicación causal que antecede la explicación deductivo-nomológica. La pregunta por el porqué del fenómeno de esta generalización “al límite” del TVE (aquello que denomina Kitcher la “verdadera generalidad”) nos conduce a indagar por las transformaciones en las prácticas unificadoras precedentes que produjeron el fenómeno, es decir, las interacciones de saberes y técnicas causales (Salmon, 1984, 132).

Tanto en su nota de 1904 como en su tesis de 1906, Fréchet introduce la exposición formal con ciertas narrativas causales con la intención evidente de darle al lector una explicación que justifique la originalidad y pertinencia de su trabajo. Por ejemplo, en (Fréchet, 1904) escribe:

> Sabemos la importancia que tendría en un gran número de problemas saber si una cantidad U que depende de ciertos elementos (puntos, funciones, etc.) alcanza efectivamente un mínimo en el campo considerado. El principio de Dirichlet ofrece una de las justificaciones más llamativas de esta observación…

Lector acucioso de los trabajos de Hadamard, Volterra, Arzèla y Pincherle (Guerraggio, 2015), Fréchet había reconocido que el TVE era aplicado como herramienta en la solución de un “gran número de problemas” que involucraban funciones de curvas, integrales, series, etc., con lo cual se *justificaba* la formulación y demostración del teorema a una clase de funcionales definidas sobre ciertos espacios de naturaleza cualquiera.

Generalización del TVE en la teoría de los espacios abstractos

Antes de explicar los argumentos inferenciales y causales que conducen a Fréchet a extender el teorema a un nivel superior, examinemos el libro de Dini (1878) para reconocer el patrón de generalización restringida al análisis real empleado por él. El TVE aparece formalmente en el capítulo 7 del libro dedicado a la derivada de una función, bajo el siguiente enunciado:

> Si una función de valor real f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a\ , b]$, f debe alcanzar un máximo y un mínimo al menos una vez. Es decir, existen números c, d en $[a\ , b]$, tales que: $f(c) \geq f(x) \geq f(d)$ para todo $x \in [a, b]$.

Este teorema le sirve a Dini como herramienta para formular y demostrar enseguida el Teorema del Valor Intermedio (TVI) con un enunciado que, como veremos, se distingue de la expresión aritmética original de Bolzano:

> Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a\ , b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un punto c dentro de (a, b) en donde la tangente a la curva en ese punto tiene la misma pendiente que la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

En otras palabras, la derivada de la función en ese punto c es igual a la tasa de cambio promedio de la función en el intervalo $[a\ , b]$.

El patrón actual que estructura la cadena inferencial de argumentos de la prueba del Teorema de Weierstrass en el análisis real se encuentra prefigurado en el curso de Dini. Es prácticamente el mismo que utiliza Fréchet en la generalización del TVE:

- Se prueba el teorema de las cotas: una función continua f en el intervalo cerrado $[a\ ,\ b]$ es acotada en ese intervalo.
- Se encuentra una sucesión cuya imagen converge al supremo de f.
- Se muestra que existe una subsucesión que converge a un punto en el dominio.
- Se usa la continuidad para demostrar que la imagen de la subsucesión converge al supremo.

Las propiedades que intervienen en la prueba actual del TVE y que explican su carácter de teorema fundamental (*Hausptlehsatz*) en el análisis, son las siguientes:

1) El Teorema de Bolzano-Weierstrass (TBW): para todo x de un intervalo cerrado y acotado existe una sucesión con una subsucesión que converge a x.
2) La definición de función secuencialmente continua: una función f es continua si para cualquier secuencia $\{x_n\}$ que converge a un punto a, la secuencia $\{f(x_n)\}$ converge a $f(a)$.
3) El teorema del supremo de Bolzano y la técnica de bisección que este introdujo también conocida como propiedad de los intervalos encajonados.

Dini aplica el TBW en la demostración del TVE atribuyendo su autoría a Weierstrass. Ciertamente, fue Weierstrass quien elevó esta propiedad a la categoría de teorema fundamental, con carácter independiente, en sus cursos de análisis de los años 1860. Pero no es menos cierto que, trabajando en relativo aislamiento en Bohemia, Bolzano utilizó este teorema de manera auxiliar, con carácter de *lema*, en la demostración del TVI. Su enunciado en *forma aritmética* era el siguiente:

> Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y k es un número tal que $f(a) < k < f(b)$ o $f(b) < k < f(a)$, entonces existe un número c en el intervalo (a, b) tal que $f(c) = k$.

En su demostración Bolzano utiliza la *técnica de bisección* que emplea en otros casos y que consiste en construir un conjunto de intervalos encajonados cuyas longitudes tienen a cero (Dhombres, 1978, 217-218). Este proceso iterativo es esencialmente el mismo que utiliza Weierstrass en la prueba del TVE y que Dini restablece formalmente en su propia demostración.

Hemos aludido antes a la *forma aritmética* del enunciado del TVI en la memoria original de Bolzano (1817) y a su interpretación geométrica por parte de Dini (1878). Conviene recordar que previamente Cauchy había formulado el TVI en su *Cours d'Analyse* (1821) pero, en contravía del punto de vista predominantemente algebraico de su tratado, en este caso se limitó simplemente a *visualizar* la demostración con un argumento geométrico.

Como recuerda Dhombres (1978), esta práctica se hizo corriente incluso en los más rigurosos tratados de análisis alrededor de los años 1900. Pero ya desde su memoria de 1817, refiriéndose a la visualización de geométrica empleada por Gauss para "demostrar" el Teorema Fundamental del Álgebra, Bolzano había alertado en los siguientes términos sobre la necesidad de no confundir ambos géneros:

> No hay absolutamente nada que objetar, ni contra la exactitud ni contra la evidencia de este teorema geométrico. Pero es igualmente evidente que hay aquí una falta intolerable contra el buen método, falta que consiste en querer deducir las verdades de las matemáticas puras (o generales) (es decir, de la aritmética, el álgebra o el análisis) de consideraciones que pertenecen únicamente a una parte aplicada (o especial), a saber, la geometría.

Baste lo anterior para comprender las interrelaciones causales del TBW con el patrón demostrativo del TVE en el tratado de Dini. Otro tanto podría hacerse con respecto a las propiedades (2) y (3) de este patrón. Hacia finales del siglo los estudios de estas propiedades apuntaban a un mismo objeto que llamamos las *propiedades de la compacidad sobre la recta real*. A él se llegaba, sea por la vía del TBW (todo conjunto infinito acotado de R posee un punto de acumulación), sea bajo la forma del TVE (toda función continua y acotada sobre un compacto, admite un máximo y un mínimo), o bajo la forma del Teorema de Heine-Borel-Lebesgue (se puede extraer un recubrimiento abierto finito de un recubrimiento abierto cualquiera de un compacto) (Dhombres, 1978)(Arboleda, 1984)(Hairer, 1995).

Fue Fréchet quien hizo posible comprender el fondo de esta unificación, al extender el TVE de su origen inicial en la recta real a los espacios euclidianos y a los abstractos dotados de la topología de la convergencia de sucesiones de puntos. Con esta generalización de orden superior se hizo evidente, en particular, que la propiedad de un conjunto de R o R^n de ser acotado y cerrado es equivalente a la de ser compacto. Fréchet define en su tesis (1906) que un conjunto K de R o R^n es compacto si para toda sucesión de elementos en K existe una subsucesión que converge en K. Ahora sabemos que el TVE permite caracterizar los *conjuntos secuencialmente compactos,* también llamados *Fréchet compactos*.

Veamos a grandes rasgos el procedimiento de generalización extendida del TVE que Fréchet llama *Teorema de Weierstrass* en su primera publicación sobre el tema (Fréchet, 1904) (Arboleda, 1984), teniendo en cuenta la apropiación y uso pedagógico que propone Scoville (2024) de esta fuente histórica primaria.

Suponemos dada una colección C de elementos arbitrarios (números, superficies, etc.), en la que sabemos distinguir elementos distintos. Podemos decir que U es una *función uniforme* (u *operador funcional*) de un conjunto E de elementos de C, si a cualquier elemento A de E le corresponde un número bien determinado $U(A)$. Un ejemplo corriente de operador funcional es el siguiente: Sea $C^0[a\,,\,b]$ el conjunto de todas las funciones continuas sobre un intervalo cerrado y acotado $[a\,,\,b]$. Para cada $f \in C$, se define $U(f) \coloneqq max_{x\in[a,b]}\,\{f(x)\}$.

Fréchet pasa enseguida a definir el concepto de límite en un espacio abstracto para estudiar los funcionales continuos. Para obtener el concepto de continuidad de una función de este tipo, supondremos que disponemos de una definición de límite que cumple las siguientes dos condiciones:

i. Si $\mathrm{A_n} = \mathrm{A}$, para $\mathrm{n} = 1, 2, \dots,$ entonces $\{\mathrm{A_n}\}$ tiene como límite A.
ii. Si $\{\mathrm{A_n}\}$ tiene A como límite, entonces $\mathrm{A_{k_n}}$ tiene A como límite para toda subsucesión de $\{\mathrm{A_{k_n}}\}$.

Con base en lo anterior Fréchet utiliza la idea de límite de una sucesión de elementos para definir el límite de conjuntos:

> Así pues, llamaremos *elemento límite* del conjunto E a un elemento A que es el límite de alguna sucesión de elementos distintos tomados en E. Un conjunto E es *cerrado* si no da lugar a ningún elemento límite o si contiene sus elementos límite.

Luego define la continuidad de un operador funcional:

> Ahora podemos decir que un operador funcional U sobre un conjunto cerrado E es *continuo* sobre E si los números $U(A_n)$ tienden siempre a $U(A)$ cuando cualquier sucesión de elementos de E: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiene un límite A, independientemente del elemento límite A de E.

Por último, define el concepto de [*contablemente*] *compacto:*

> Llamaremos *compacto* a cualquier conjunto E para el cual siempre existe al menos un elemento común para cada secuencia infinita de conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ contenidos en E, cuando éstos (que tienen al menos un elemento cada uno) son cerrados y cada conjunto está contenido en el anterior".

Mediante las definiciones anteriores, llega inmediatamente a la generalización:
Teorema. Todo operador funcional U que es continuo en un conjunto contablemente compacto y cerrado E . . . tiene al menos un límite superior.

Obsérvese que la anterior explicación de la generalización del TVE que se encuentra en (Fréchet, 1904) es del tipo deductivo-nomológico. Pero en su tesis (1906) Fréchet agregará a la presentación de 1904 algunos comentarios que en cierta manera apuntan a la explicación causal del porqué de su generalización del teorema. Estas ideas serán desarrolladas en posteriores publicaciones, concretamente en su obra sobre los espacios abstractos (Fréchet, 1928).

La cuestión ha sido estudiada en numerosos trabajos no necesariamente con las categorías filosóficas empleadas en este documento. Por lo que hace relación con nuestras propias investigaciones, el tratamiento del tema se ha hecho desde la perspectiva de utilizar los estudios histórico-filosóficos del análisis y la topología en la formación de profesores. Estos son algunos de los principales resultados: (Arboleda, 1982) sobre el enfoque metodológico de Fréchet en los comienzos de la topología general; (Taylor, 1982) sobre la contribución de Fréchet a la topología conjuntista y el análisis funcional en sus primeros trabajos; (Arboleda y Recalde, 2003) sobre las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general; (Arboleda, 2002) sobre las ideas filosóficas y epistemológicas de Fréchet en cuanto a la *desaxiomatización* de las Matemáticas; (Arboleda, 2017) sobre la constitución de la topología de las vecindades en la práctica matemática de Fréchet y Hausdorff; y la tesis de maestría en EM de la profesora Márquez-García (2018) sobre el concepto de topología en la tesis de Fréchet desde una perspectiva socioepistemológica.

Conclusiones

En este trabajo se ha tratado de aplicar la siguiente tesis del modelo unificacionista de la explicación, mencionada al inicio, al caso del TVG en análisis real y en los espacios abstractos (Kitcher, 1975):

> El poder explicativo de las teorías científicas se destaca cuando revelan conexiones entre fenómenos que antes se consideraban inconexos. En el ámbito de las matemáticas ocurre lo mismo y es habitual reivindicar el enfoque "abstracto" de las matemáticas apelando a las conexiones que se revelan al estudiar disciplinas familiares como instancias de estructuras algebraicas generales.

Hemos examinado la argumentación inferencial de la prueba del TVE en el análisis real para comprobar que Dini unifica propiedades y técnicas que antes eran agenciadas por separado en prácticas matemáticas con distintos objetivos: el estudio del principio de Dirichlet, la unicidad de la representación de una función por series, la convergencia uniforme, etc.

Por su parte, la generalización de Fréchet expresa las características esenciales del teorema; es decir, destaca su valor epistémico y su operatividad (medios efectivos de cálculo) en un nuevo campo teórico, el análisis funcional. Fréchet planteó la "verdadera generalidad" (Kitcher) del teorema, en el sentido de formular una comprensión profunda de su contenido y descubrir la riqueza de nuevos puntos de vista y fenómenos ligados a esta profundidad. Así como el método de *aritmetización del análisis* introducido por Weierstrass, implicó una superación con respecto a la práctica de "razonamiento genérico" prevaleciente hasta entonces en el análisis, de la misma manera la práctica de generalidad de Fréchet se abriría a una nueva cultura o estilo epistemológico.

Mostramos que en la generalización de Fréchet emerge un nuevo objeto matemático: el concepto de compacto. Faltaría mostrar que, a partir de allí, Fréchet introduce el estudio de nuevos objetos, por ejemplo, la clase de las funcionales u operadores compactos. También sienta las bases de un nuevo campo de investigación que se reveló muy promisorio a partir de los años 1920, la teoría de la compacidad en los espacios abstractos especialmente en los espacios métricos (Arboleda, 1984).

Sin ahondar en detalles, nos parece que la explicación de la compacidad a través de una narrativa histórica con estas características tiene sus ventajas aplicada de manera conveniente en cursos de análisis para la formación inicial de profesores. Refiriéndose a la potencialidad de la FPM en la EM, Hamami (2020) asocia esta potencialidad con el propósito compartido de fortalecer el conocimiento matemático del profesor en el MKT (*Mathematics Knowledge for Teaching)*. Esto es, un conocimiento especializado que va más allá del contenido disciplinar, abarcando el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. Este tipo de conocimiento rara vez se enseña en la formación matemática tradicional de los futuros licenciados.

Si se trata de explicar a estos estudiantes el porqué del TVG o la definición de compacto, podemos apelar en particular a los conceptos de "dialéctica herramienta-objeto" y "juego de cuadros" desarrollados por R. Douady (1984) en la didáctica de las Matemáticas. Pensamos que una presentación como la nuestra permitiría comprender la forma dialéctica en que el concepto de compacto funciona primero como una herramienta para resolver problemas y luego se transforma en un objeto de estudio en sí mismo. El "juego de cuadros" sería el correlato cognitivo del concepto anterior en la acción didáctica. Este se refiere a la forma en que los estudiantes se desenvuelven entre distintos marcos de referencia (contextos, representaciones) al resolver problemas sobre la compacidad.

Referencias y bibliografía

Arboleda, L.C. (1982): Consideraciones metodológicas sobre el aporte de M. Fréchet à la topología générale. *Actes du VI Congrès du groupement des mathématiciens d'expression latine*, Gauthier-Villars, Paris.

Arboleda, L. C. (1984). Sobre los fundamentos de la Teoría de los Espacios Compactos. *Asclepio*. *36*, 123–157.

Arboleda, L.C. et L.C. Recalde (1998): Las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general. En Alsina, C., et al. (1998): *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures*. (ICME-8, Sevilla, julio de 1996). Sevilla, SAEM Thales, 1-13.

Arboleda, L. C. (2002). El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*, *3*(6-7), 59-84.

Arboleda, L.C., Recalde, L.C. (2003). Fréchet and the Logic of the Constitution of Abstract Spaces from Concrete Reality. *Synthese*, *134*, 245–272.

Arboleda, L. C. (2017). Introducción de la topología de las vecindades en los trabajos de Fréchet y Hausdorff. *Revista de la Academia Colombiana de ciências exactas, físicas y* naturales, *41*(161), 528-537.

Bottazzini, U. (2018). All'origine della teoria degli insiemi di Cantor. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, *3*, 179-191.

Cantor, G. (1870). Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. *Journal re. Angew. Math*. 72, pp. 130-138. En G. Cantor. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Zermelo, E. (Ed.) Springer, 71-79.

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu: épistémologie et histoire*. Publication de l'IREM de Nantes. Cedic/Nathan, Paris.

Dini, U. (1878). *Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili Reali*. T. Nistri e C. Pisa.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outi-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. Histoire et perspectives sur les mathématiques. Université Paris VII.

Dugac, P. (2003). *Histoire de l'analyse moderne: deux siècles de renouveau des mathématiques*. Vuibert. Paris.

Fréchet, M. (1904). Généralisation d'um théorème de Weierstrass. *C. R. Acad. Sci. Paris*, *139*, 848-850.

Fréchet, M. (1906): Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circulo matematico di Palermo*, *13*, 1-74.

Fréchet, M. (1928): *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse Générale.* Paris, Gauthier-Villars.

Guerraggio, A., Jaeck, F., and Mazliak, L. (2015). *Lines on the Horizon: Hadamard and Fréchet, readers of Volterra.* Sorbonne University. Pré-Publication. Hal-01214243.

Hadamard, J. (1910). *Leçons sur le calcul des* *variations*. Recueillies par M. Fréchet. Hermann, Paris.

Hamami, Y. y Morris, R. L. (2020). Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 1113-1126.

Hairer, E. & Wanner, G. (1995). *Analysis by Its History*. Springer, New York.

Khalifa, K. (2017). Understanding, Explanation, and Scientific Knowledge. Cambridge University Press.

Kitcher. P. (1975). Bolzano's Ideal of Algebraic Analysis'. *Studies In History and Philosophy of Science*, *6*, 229–269.

Kitcher, P. (1989). Explanatory Unification and the Causal Structure of the World. En P. Kitcher y W. C. Salmon (Eds.), *Scientific Explanation.* University of Minnesota Press, Minessota, 410-505.

Mancosu, P., Jorgensen, K. F. & Pedersen, S. S. (Eds.) (2005). *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics.* Springer.

Márquez-García, Gabriela. (2018). Topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet. Tesis de maestría en Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México. https://www.academia.edu/48912300/Una_problematizaci%C3%B3n_del_concepto_de_topolog%C3%ADa_en_los_inicios_de_la_teor%C3%ADa_de_conjuntos_abstractos_de_Fr%C3%A9chet

Serret, J.-A. (1868). *Cours de calcul différentiel et intégral*. Vol. 1. Gauthiers-Villars, Paris.

Scoville, N. A. (2024). A Compact Introduction to a Generalized Extreme Value Theorem. *MAA Convergence*. https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/a-compact-introduction-to-a-generalized-extreme-value-theorem-a-mini-primary-source-project-for.

Taylor, A. E. (1982): A study of Maurice Fréchet I: His early works on point set theory and the theory of functionales. *Archive for History of Exact Sciences, 27*, 233 – 295.

Weber, K. & Inglis. M. (2024). Mathematics Education Research on Mathematical Practice. En B. Sriraman (Ed.). *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*. Springer, 2637-2663.