



IA generativa para la formulación y resolución de problemas

Aitana **Martín-Ferraz**

Universidad de La Laguna

España

amartife@ull.edu.es

Alexánder **Hernández**

Universidad de La Laguna

España

alexander.hernandez@ull.edu.es

Matías **Camacho-Machín**

España

Universidad de La Laguna

mcamacho@ull.edu.es

Resumen

Este estudio explora el uso de la inteligencia artificial generativa en una actividad de indagación matemática a través de la formulación y resolución de problemas, que involucra los mosaicos regulares y semirregulares. A partir de interacciones con ChatGPT-4o y o1, se analizaron sus capacidades se identificaron fortalezas y limitaciones en sus respuestas. Los resultados muestran que la IA puede apoyar la indagación matemática, pero sus respuestas requieren validación crítica. Para ello, el uso coordinado de herramientas digitales como GeoGebra o Google Colab y los conocimientos matemáticos del usuario son dos aspectos relevantes. El estudio concluye que la IA es un recurso valioso para la enseñanza de las Matemáticas, pero debe ser integrada con herramientas digitales y la supervisión docente para garantizar un aprendizaje fundamentado en la validación y el análisis crítico.

Palabras clave: Educación Matemática; Resolución de problemas; Formulación de problemas; Inteligencia artificial; Herramientas digitales.

Definición y relevancia del problema

La creciente integración de herramientas digitales en la enseñanza de las Matemáticas ha transformado la manera en que se aborda el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos. Un ejemplo de ello es la aparición de herramientas digitales, como GeoGebra, WolframAlpha o DESMOS y en los últimos años, el desarrollo de modelos de inteligencia artificial generativa (IA). Estos avances permiten a los docentes y estudiantes explorar conceptos matemáticos de manera interactiva y fomentar un aprendizaje basado en la indagación. Estudios previos han demostrado que estas tecnologías facilitan la formulación de conjeturas y la identificación de patrones matemáticos que no siempre emergen en enfoques tradicionales (Hernández, Perdomo-Díaz & Camacho-Machín, 2019). Sin embargo, la introducción de modelos de IA generativa, como ChatGPT, plantea interrogantes sobre su aplicabilidad y sus limitaciones en contextos educativos.

El problema de estudio se centra en evaluar la capacidad de la inteligencia artificial generativa para asistir en la indagación matemática, a través de la formulación y resolución de problemas matemáticos desde un enfoque formativo. En particular, se analiza cómo modelos como ChatGPT pueden contribuir a la comprensión de las Matemáticas, facilitando el proceso de reflexión y la toma de decisiones.

La relevancia de este estudio radica en la necesidad de explorar cómo la IA puede integrarse con el resto de las herramientas digitales de manera que aporte nuevos enfoques. A medida que la inteligencia artificial se consolida como una herramienta de apoyo, es crucial evaluar sus fortalezas y limitaciones para su aplicación adecuada en contextos educativos. En este sentido, el presente trabajo busca aportar evidencia sobre la influencia de la IA en la formulación y resolución de problemas matemáticos. Así como su potencial para mejorar la enseñanza y el aprendizaje en este campo.

Referencial teórico

La resolución de problemas matemáticos ha sido ampliamente estudiada desde diversas perspectivas. Pólya (1945) propuso un modelo basado en cuatro fases: comprensión, planificación, ejecución y revisión de la solución. Estos principios han sido adaptados a la práctica docente para fomentar el pensamiento matemático en estudiantes de distintos niveles educativos (Schoenfeld, 1985). Sin embargo, estudios más recientes han ampliado esta concepción, abordando la resolución de problemas desde marcos que incluyen otros aspectos que dan especificidad al campo de estudio. El uso coordinado de herramientas digitales, como GeoGebra, ha sido identificado como un factor clave en la resolución de problemas y la indagación matemática (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013; Santos-Trigo, 2023). Estas tecnologías permiten representar visualmente conceptos matemáticos, desarrollar estrategias diversas y establecer relaciones entre elementos geométricos y algebraicos. En este sentido, las herramientas digitales no solo facilitan la exploración de problemas matemáticos, sino que también fomentan la creatividad y permiten que los estudiantes construyan nuevas preguntas a partir de problemas resueltos.

Cai y Rott (2024) han explorado los procesos de formulación de problemas matemáticos, proponiendo una estructura en cuatro fases: orientación, conexión, generación y reflexión. Este modelo proporciona una visión estructurada de cómo se pueden diseñar y plantear problemas en la enseñanza de las Matemáticas, enfatizando la importancia de la conexión entre conocimientos previos y nuevos enfoques para generar problemas matemáticos significativos. Por su parte, Baumanns (2022) adopta una mirada centrada en la actividad y el contexto en el que se lleva a cabo la formulación de problemas. Su enfoque describe cuatro categorías clave en la práctica de la formulación de problemas: reformulación para resolver, reformulación para indagar, generación de nuevos problemas y construcción de tareas para otros. Estas categorías permiten relacionar la actividad de formulación con el proceso subyacente de resolución de problemas y la enseñanza de las Matemáticas. Además, destacan la relevancia de la reformulación como herramienta esencial para la indagación, facilitando la generación de nuevas estrategias y enfoques en el proceso de aprendizaje.

Por otro lado, la inteligencia artificial se ha posicionado como una herramienta emergente con el potencial de proporcionar retroalimentación inmediata y generar enfoques novedosos en la resolución de problemas. Investigaciones recientes han señalado que los modelos de lenguaje pueden ofrecer explicaciones detalladas y sugerir estrategias de solución (González-Alcaide, 2024). Sin embargo, estos modelos presentan limitaciones, como la generación de respuestas incorrectas o la necesidad de una supervisión docente para validar sus resultados. Es fundamental evaluar cómo integrar estos sistemas de manera efectiva en la enseñanza, garantizando su uso ético y su alineación con los objetivos educativos.

Método y desarrollo conceptual

Este estudio adopta un enfoque cualitativo basado en el análisis de interacciones con la IA generativa en un contexto de indagación matemática a través de la formulación y resolución de problemas relacionados con mosaicos semirregulares. Este tema se trabajó previamente en una asignatura del Grado en Matemáticas, donde se estudió como punto de partida en una secuencia de innovación didáctica. Para luego plantear y resolver problemas desde dos aproximaciones una algebraica y otra computacional.

La investigación se estructuró en cuatro fases principales:

1. Evaluación del problema sin IA: Se tomaron como referencia los problemas planteados en la asignatura del Grado y resueltos por los estudiantes. Se documentaron las aproximaciones y estrategias utilizadas.
2. Interacción con ChatGPT: Se realizaron varias conversaciones con ChatGPT, en sus versiones 4o y o1, en dos contextos distintos uno enfocado a la indagación sobre mosaicos y la formulación de problemas y otro para la resolución de problemas en su aproximaciones algebraica y computacional.
3. Análisis de respuestas y comparación: Se evaluaron las estrategias propuestas por la IA en comparación con las soluciones desarrolladas por los estudiantes. Se analizaron la coherencia, precisión y utilidad de las respuestas en un contexto educativo. Se identificaron patrones en la generación de respuestas, la presencia de "alucinaciones" y la necesidad de refinamiento en las instrucciones para mejorar la calidad de las soluciones.

4. Reflexión sobre la integración de IA y herramientas digitales: Se discutió el uso coordinado de la IA con otras herramientas digitales como GeoGebra y Google Colab para su aplicación en la enseñanza de las Matemáticas.

Resultados

En el curso de Matemáticas para la Enseñanza del Grado en Matemáticas, una de las tareas tiene como objetivo reflexionar sobre la manera en que se presentan los contenidos matemáticos en la educación media y explorar nuevas estrategias pedagógicas que permitan fortalecer la enseñanza. Como ejemplo de ello, el profesor partió de los conceptos de mosaicos regulares y semirregulares (Figura 1) para generar una unidad innovadora.



Figura 1. Ejemplo ilustrativo usado por el profesor para presentar los mosaicos regulares y semirregulares.

El profesor mostró que la secuencia de enseñanza debía incluir inicialmente una exploración activa de los mosaicos, combinando herramientas físicas (modelos de cartón, madera o plástico) y digitales (pizarras digitales, Polypad o GeoGebra). Estos recursos permitirían analizar patrones y comprender cómo ciertos polígonos pueden teselar el plano, validando así la existencia de los mosaicos regulares y semirregulares. Además del análisis geométrico, la secuencia incluyó la formulación y resolución de problemas matemáticos relacionados con mosaicos, dedicando especial atención al problema de identificar todos los diferentes mosaicos regulares y semirregulares existentes. Junto con el profesor, los estudiantes modelizaron la situación, reformulando el problema a uno con ecuaciones diofánticas (Figura 2). Esta actividad se puede categorizar como una reformulación de un problema dado para resolverlo (Baumanns, 2023). Luego, este nuevo problema fue trabajado por los estudiantes, quienes lo abordaron de forma algebraica y aplicando un enfoque computacional donde ejecutaron un algoritmo en Python, mostrando así su capacidad para resolver problemas por múltiples aproximaciones y coordinar diferentes herramientas digitales (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013; Santos-Trigo, 2023).

El planteamiento de las ecuaciones parte de que la suma de la amplitud de los ángulos de los polígonos entorno a un vértice (que pueden ser 3, 4, 5 o 6) es de 360° .

$$\sum_{j=1}^3 180 \left(1 - \frac{2}{n_j} \right) = 360$$

$$180 \left(1 - \frac{2}{n_1} \right) + 180 \left(1 - \frac{2}{n_2} \right) + 180 \left(1 - \frac{2}{n_3} \right) = 360^\circ$$

Figura 2. Ecuaciones diofánticas para resolver el problema dado

El equipo de investigadores abordó la interacción con ChatGPT en distintos momentos, con diferentes usuarios y en múltiples conversaciones. Este enfoque permitió evaluar la coherencia y variabilidad de las respuestas de la IA sin que el sistema pudiera cruzar información entre conversaciones previas. La segmentación de las interacciones tuvo como objetivo identificar patrones en la formulación de respuestas, evaluar la consistencia de los conceptos matemáticos generados y detectar posibles errores en las explicaciones proporcionadas.

Una de las interacciones se llevó a cabo con ChatGPT-4o (4o), en la que se abordaron preguntas relacionadas con los mosaicos regulares y semirregulares. En esta conversación, se analizó la capacidad de la IA para definir correctamente estos conceptos, describir sus propiedades y presentar ejemplos relevantes. Se observó que, si bien 4o ofreció explicaciones generalmente precisas, en algunas ocasiones presentó afirmaciones ambiguas o incorrectas, lo que evidenció la necesidad de una supervisión crítica por parte del usuario. Por ejemplo, sus representaciones de mosaicos regulares no eran adecuadas al inicio, y tras algunas intervenciones por nuestra parte se corrigieron (Figura 3a y 3b).

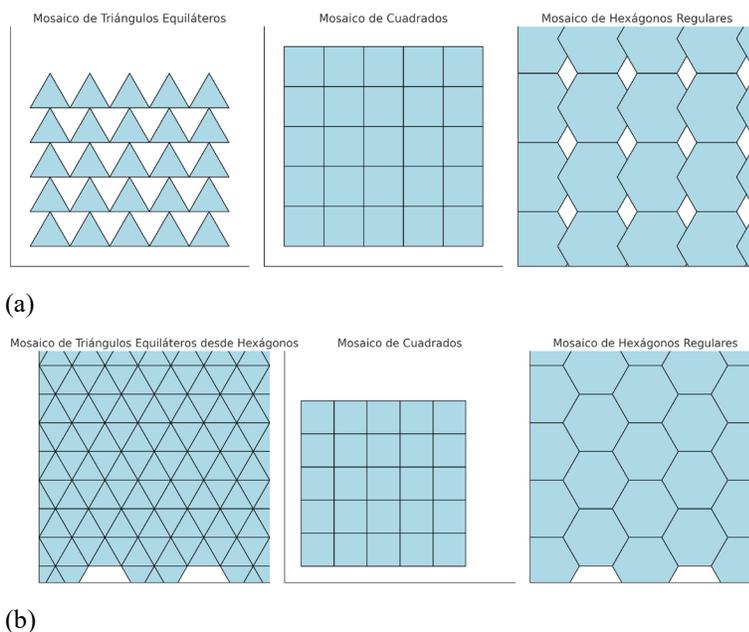


Figura 3. (a) Representación inicial. (b) Representación después de refinar la respuesta.

Tras preguntar en la conversación varios aspectos conceptuales y refinar sus respuestas, se le pidió a 4o lo siguiente: "Con esta información plantea algún problema de Matemáticas". Este respondió con un problema basado en un caso particular, en el que un arquitecto deseaba cubrir un suelo con una configuración de mosaicos (3,5,4,6), es decir, que un vértice coincidiese los polígonos regulares de la manera: triángulo-pentágono-cuadrado-hexágono. Y invitaba, con varias cuestiones, a discutir si era posible hacerlo. En términos de Baumanns (2023) entramos en una actividad de generar un nuevo problema.

Para conectarlo con la secuencia de innovación realizada, se le planteó a 4o la instrucción: "Como plantearías un problema que me llevara a encontrar todos los mosaicos semirregulares".

En la respuesta 4o, organiza un breve enunciado, unas preguntas que podrían guiar la indagación e ideas para verificar los avances o encontrar la solución.

Con estos ejemplos se pudo verificar la capacidad del ChatGPT para formular problemas y ofrecer una lista de preguntas relacionadas. Buscar las respuestas y abordar el problema permitirían a un usuario desarrollar su conocimiento sobre mosaicos regulares como se le solicitó, relacionamos estas preguntas propuestas con la actividad de resolver problemas para indagar (Baumanns, 2023). Para terminar esta conversación y antes de iniciar una nueva conversación con o1, se le solicitó a 4o que: "Genera un prompt para o1 en el que analice los semirregulares analíticamente", obteniendo la respuesta de la Tabla 1:

Tabla 1

Prompt generado por ChatGPT 4o para preguntar a o1 por los mosaicos semirregulares

Título: Análisis Analítico de los Mosaicos Semirregulares

Descripción: Quiero realizar un análisis matemático de los mosaicos semirregulares en el plano euclidiano. Estos mosaicos están formados por combinaciones de polígonos regulares que se ensamblan de tal forma que cada vértice tiene la misma disposición y la suma de sus ángulos internos es exactamente 360° .

Tareas:

Definir restricciones geométricas:

- ¿Cuáles son los polígonos regulares que pueden formar mosaicos sin dejar huecos?
- ¿Cómo se calcula el ángulo interno de un polígono regular de n lados?
- ¿Qué condiciones deben cumplir los ángulos internos en un vértice para que el mosaico sea válido?

Explorar combinaciones posibles de polígonos:

- Determinar combinaciones de polígonos como triángulos, cuadrados, hexágonos, octágonos y dodecágonos.
- Verificar si la suma de ángulos en cada vértice es exactamente 360° .

Demostrar el conjunto completo de mosaicos semirregulares:

- ¿Cuántos tipos distintos de mosaicos semirregulares existen?
- ¿Cómo demostrar que no hay más soluciones aparte de las conocidas?

Representaciones analíticas y gráficas:

- Obtener ecuaciones o algoritmos que modelen los mosaicos.
- Generar visualizaciones matemáticas o simulaciones computacionales.

Objetivo final:

- Obtener un listado completo y justificado matemáticamente de los mosaicos semirregulares en el plano euclidiano, con explicaciones analíticas y representaciones gráficas que validen los resultados.

La respuesta de o1 se estructuró en un estudio analítico sobre los mosaicos semirregulares, abordando su caracterización dentro de la geometría euclidiana. Primero, estableció las restricciones geométricas necesarias para que un conjunto de polígonos regulares pueda teselar el plano sin dejar huecos. Luego, exploró combinaciones viables de polígonos, justificando

matemáticamente la existencia de estos mosaicos. Posteriormente, enumeró la lista completa de mosaicos semirregulares conocidos, explicando por qué no hay más soluciones posibles.

Además, propuso representaciones analíticas mediante ecuaciones y criterios geométricos que validan su existencia. Finalmente, destacó el uso de herramientas computacionales para visualizar y analizar las teselaciones, sugiriendo algoritmos para su modelización. La respuesta sigue un enfoque estructurado y riguroso, aunque requiere supervisión para verificar la precisión de sus deducciones matemáticas.

En otros dos chats con o1, se plantearon los problemas modelizados previamente, pero sin incluir información específica sobre los mosaicos. Esto permitió evaluar cómo la IA resolvía las ecuaciones diofánticas por diferentes estrategias. En una conversación, se abordó el problema de manera algebraica, mientras que en la otra se utilizó un enfoque computacional, implementando código para obtener soluciones numéricas. En ambas interacciones, o1 presentó *alucinaciones*, es decir, respuestas incorrectas pero formuladas de manera plausible. Estas inconsistencias se manifestaron en la manipulación de expresiones algebraicas muy simples y en el uso de operaciones en Python que produce errores numéricos. Sin embargo, la experiencia previa de los investigadores en el problema y su conocimiento matemático permitieron refinar ambos procesos, corrigiendo errores y ajustando los planteamientos para lograr soluciones matemáticamente o computacionalmente válidas.

Para complementar el análisis, GeoGebra se utilizó para representar gráficamente los ejemplos obtenidos en las conversaciones con ChatGPT, facilitando la visualización geométrica de las soluciones. Paralelamente, Google Colab se empleó para ejecutar el código en Python generado en las distintas interacciones con o1, permitiendo verificar la validez de los resultados obtenidos. Siguiendo el enfoque de Santos-Trigo (2023) sobre el uso coordinado de herramientas digitales, estas tecnologías no solo facilitaron la exploración matemática, sino que también permitieron contrastar diferentes aproximaciones. Además, como señala Schoenfeld (1985), el papel del usuario fue fundamental al adoptar una visión crítica sobre las respuestas proporcionadas por la IA, usando GeoGebra y Google Colab como instrumentos de control para detectar errores, validar estrategias y refinar el proceso de resolución.

Conclusiones

Los resultados de esta investigación evidencian que la inteligencia artificial generativa puede desempeñar un papel relevante en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, particularmente en la formulación y resolución de problemas. Sin embargo, su uso requiere de una supervisión crítica, dado que los casos analizados presentan *alucinaciones* e interpretaciones no justificadas, lo que destaca la importancia del papel del usuario que debe cuestionar las respuestas formulando nuevas preguntas.

El análisis de los mosaicos semirregulares permitió evaluar cómo ChatGPT, en su versión 4o y o1, genera explicaciones matemáticas y resuelven problemas por diferentes estrategias. A través de interacciones estructuradas en múltiples sesiones, se identificó que la IA puede ser una herramienta útil para el planteamiento de problemas y su resolución. En ocasiones es necesario complementar la información recibida y revisar las respuestas. En este sentido, el uso de

herramientas digitales como GeoGebra y Google Colab fue clave para verificar y corregir los resultados obtenidos, lo que nos permite ampliar la propuesta de Santos-Trigo (2023) sobre el uso coordinado de la tecnología en la enseñanza matemática. Se observó que la IA provoca un cambio de roles en el usuario y el resto de las herramientas digitales. En vez de generar conjeturas para luego valorar su veracidad con las herramientas, el usuario ahora debe analizar las conjeturas realizadas por la IA. Para ello, recurre a sus propios conocimientos y se apoya en otras herramientas como elementos de control.

La interacción con la IA también permitió reflexionar sobre la enseñanza de los mosaicos regulares y semirregulares. Esto ofrece una nueva estrategia metacognitiva para un estudiante o docente, que debe preguntarse a sí mismo si comprende la información que responde la IA y plantearle nuevas cuestiones que le permitan revisar su veracidad. Es una forma de desarrollar la indagación matemática a través de la formulación y resolución de preguntas y problemas.

En términos generales, esta investigación confirma que la integración de la IA en la Educación Matemática es prometedora, pero debe combinarse con herramientas tradicionales y digitales, y con la intervención activa del docente y el estudiante, garantizando un aprendizaje sólido y fundamentado en la validación matemática.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido subvencionada por el Proyecto de Investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el M CIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE, que lleva por título: Formulación de problemas matemáticos con herramientas digitales en la formación inicial de profesorado (ForDiMat). Así como, por el Vicerrectorado de Investigación y Transferencia de la Universidad de La Laguna.

Referencias y bibliografía

- Baumanns, L. (2023). *Mathematical Problem Posing*. Springer Spektrum Wiesbaden. doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-658-39917-7>
- Cai, J., & Rott, B. (2024). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM Mathematics Education*, 56, 61-71. doi:<https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w>
- González-Alcaide, G. (2024). *I d. C. (después de ChatGPT): Inteligencia artificial generativa en la educación superior*. Universidad de Valencia.
- Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2019). Mathematical understanding in problem solving with GeoGebra: a case study in initial teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:[10.1080/0020739X.2019.1587022](https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587022)
- Pólya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press.
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast*, 10(1&2), 279-302. doi: [10.54870/1551-3440.1268](https://doi.org/10.54870/1551-3440.1268)
- Santos-Trigo, M. (2023). Trends and Developments of Mathematical Problem-Solving Research to Update and Support the Use of Digital Technologies in Post-confinement Learning Spaces. En T.L. Toh, M. Santos-Trigo, P.H. Chua, N.A. Abdullah y D. Zhang (Eds.), *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 7-32). Springer, Singapur. doi: [10.1007/978-981-99-7205-0_2](https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_2)
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.