



Actividades abiertas para crear Matemática. Un estudio basado en la taxonomía de la generalización

Verónica Easton
Universidad CLAEH
Uruguay
veaston@claeu.edu.uy

Resumen

En esta comunicación se expondrá una breve revisión de la literatura sobre la generalización en Matemática y se mostrará una secuencia de actividades abiertas que fueron diseñadas para una investigación sobre la generalización en geometría. El objetivo principal de la investigación fue categorizar las formas, tipos y subtipos de acciones generalizadoras (Ellis et al., 2021) en estudiantes de formación de maestros en Uruguay, utilizando actividades abiertas que trasladan conceptos y definiciones de figuras planas al espacio tridimensional. Según Ellis et al. (2021) para comprender mejor las formas y los tipos de generalizaciones desarrolladas por los estudiantes son útiles los problemas o actividades abiertas. Considerando este marco se identificaron las diferentes formas y tipos de generalizaciones para la generación de nuevos conceptos en figuras del espacio.

Palabras clave: Proceso de generalización; Geometría; Actividades abiertas; Pensamiento matemático; Formación de maestros.

Definición y relevancia del problema

Varios investigadores de la Matemática educativa (Dreyfus, 1991; Kaput, 2008; Mason, 1996, entre otros) señalan la importancia de la generalización en Matemática por su incidencia en el desarrollo del pensamiento matemático y por ser uno de los elementos centrales en la actividad matemática. Así mismo, indican que existe evidencia de que la generalización permite la generación de nuevo conocimiento matemático.

La generalización en Matemática es considerada por algunos investigadores como un proceso (Dörfler, 1991; Harel & Tall, 1991; Kaput, 1999; Mason, 1982; Polya, 1954). Se ha

detectado el proceso de generalización a partir de ver lo general a través de lo particular, a partir de la identificación de elementos comunes en un conjunto de objetos, o por la ampliación de un dominio matemático o un razonamiento. También se ha documentado que este proceso depende de las construcciones mentales de cada individuo en el contexto social que es producido.

En la literatura se pueden observar numerosos trabajos sobre el proceso de generalización en álgebra (Pérez, 2005; Radford, 2002; Strachota et al., 2017; Trujillo, 2008), particularmente por el alcance de la generalización de patrones para introducir el pensamiento algebraico. Ciertos estudios realizados se han focalizado en las estrategias de los estudiantes al generalizar, otros en la generación de conjeturas y algunos en las representaciones que utilizan los estudiantes a la hora de generalizar.

Existe una variedad bastante más acotada sobre los estudios realizados sobre el proceso de generalización en el contexto geométrico. En 1993, Yerushalmy investigó sobre la generalización en geometría con estudiantes de secundaria a través del uso de un software que permitía a los estudiantes explorar con figuras geométricas planas para establecer conjeturas. A partir de los datos obtenidos, se observó que los alumnos se desempeñaron en dos tipos de generalizaciones en geometría: 1) generalizaciones de ejemplos, donde los estudiantes establecieron generalizaciones basándose en casos particulares o ejemplos de un conjunto dado, y 2) generalizaciones de ideas, donde los alumnos construyeron declaraciones más generales a partir de ideas más específicas.

Otros trabajos como los de Presmeg y McCrone y Brunheira y da Ponte, centraron la atención en las argumentaciones de generalizaciones geométricas y los aspectos que contribuyeron al aprendizaje del proceso de validación. Por otro lado, Yao en 2018 estudió los tipos de generalización al explorar con isometrías en un entorno de geometría dinámica y clasificó las generalizaciones por ser limitadas a un contexto, por basarse en la percepción, en procedimientos o en teorías.

Referencial teórico

Existen estudios (Ellis, 2007; Ellis et al., 2021) que señalan al proceso de generalización como una herramienta potente para el desarrollo del pensamiento matemático. Ellis et al. (2021), refinaron y ampliaron la taxonomía de la generalización descrita por Ellis en 2007 para estudiar cómo generalizan los estudiantes en otras áreas de la Matemática, como por ejemplo en álgebra avanzada, trigonometría, precálculo y combinatoria. Para esto propusieron un marco denominado Relacionar-Formar-Extender (RFE), en el cual se identifican nuevamente tres categorías principales de generalización denominadas formas de generalización: relacionar, formar, y extender. Estas formas se basan en las acciones descritas por Ellis en 2007 con algunos ajustes. Este marco ofreció una manera de caracterizar y comprender las acciones de los estudiantes cuando se involucran en problemas o actividades abiertas en otros contextos matemáticos.

El marco Relacionar- Formar -Extender (RFE) desarrollado por Ellis et al. (2021) fue seleccionado para llevar a cabo esta investigación ya que lo consideramos adecuado porque fue diseñado para analizar cómo generalizan los estudiantes en diversos contextos. Y, por otro lado,

fue utilizado en problemas o actividades abiertas que permitieron una exploración y no limitaron posibles generalizaciones.

La categoría Relacionar refiere a la identificación de similitudes entre situaciones, problemas o estrategias que el alumno percibe como contextos distintos. La categoría Formar indica la identificación de una relación dentro de un mismo contexto y determina el desarrollo de una generalización inicial, a veces tentativa, y la categoría de Extender es el uso de una generalización establecida a un dominio más amplio. Estas tres formas no son necesariamente jerárquicas en sofisticación o en ocurrencia temporal; la relación no necesariamente tiene que ocurrir antes de formar y extender.

Para esta investigación se elaboró una tabla (Tabla 1) donde se pueden observar las formas, los tipos y subtipos de generalización descritos en el marco de Ellis et al. (2021). Debido a que este marco se utilizó en diversas áreas es que consideramos necesario elaborar indicadores más precisos para la identificación de cada forma, tipo y subtipo en geometría. Por ejemplo, dentro de la forma de generalizar Formar, el tipo asociación de objetos se identificó cuando los estudiantes asociaron una figura plana con una figura del espacio mediante una representación figural o descripción escrita.

MARCO RELACIONAR- FORMAR- EXTENDER CON INDICADORES					
FORMAS DE GENERALIZAR	INDICADOR DE FORMAS	TIPOS DE GENERALIZACIÓN	INDICADOR DE TIPOS	SUBTIPOS	INDICADOR DE SUBTIPO
RELACIONAR	Establecen una relación de similitud a partir de la representación de dibujos de objetos que no refieren al contexto geométrico	Relacionar situaciones	Relacionan un cuadrado con un dado (contexto cotidiano)	Invencción de una analogía	Relacionan los objetos por su similitud en el aspecto físico
FORMAR	Establecen una relación de similitud a partir de la representación de dibujos de objetos que refieren al mismo contexto.	Asociación de objetos	Asocian una figura plana con una figura del espacio (o viceversa) mediante una representación figural o descripción escrita	Operativa	Asocian una figura plana con una figura del espacio (o viceversa) porque se fija en la estructura (es al menos una cara del poliedro)
		Búsqueda de una similitud o regularidad	Buscan una similitud, propiedad o patrones en la figura del espacio definida	Figurativa	Asocian una figura plana con una figura del espacio (o viceversa) porque es similar en su forma (es la cara que más relevancia tiene)
		Establecimiento de una forma de operar	Describen un procedimiento que permite determinar figuras del espacio a partir de figuras del plano		
		Identificación de una regularidad	Identifican una regularidad para todas las figuras del plano o para todas las figuras del espacio	Extraído	La identificación se observa a partir de los casos ofrecidos y de caso que construyen los estudiantes
EXTENDER	Escriben una descripción y/o representan con dibujos un nuevo objeto matemático en el espacio a partir de un objeto matemático en el plano	Continuación	Mantienen el objeto matemático definido para el plano en el espacio		
		Operación	Modifican el objeto matemático definido en el plano en el espacio a través de una operación mental	Alojamiento principal	La modificación realizada implica una acomodación significativa según la perspectiva de los estudiantes
		Transformación	Transforman el objeto matemático definido en el plano en el espacio (los cambios se ven en acto de ampliar)		

Figura 1. Marco conceptual con indicadores (Adaptado de Ellis et al., 2021).

Diseño de las actividades

Para el diseño de las actividades se consideraron las recomendaciones de Ellis et al. (2021) para comprender mejor las formas y los tipos de generalizaciones desarrolladas por los estudiantes mediante problemas abiertos:

- deben permitir realizar una exploración por parte de los estudiantes para analizar las diferentes formas y tipos en que generalizan.
- que no limiten posibles generalizaciones y que no tengan un fuerte efecto regulador sobre la generalización de los estudiantes, como es el caso de las tareas típicas de generalización de patrones (Dörfler, 2008; Ellis et al., 2021).

Se consideraron las indicaciones anteriores y se diseñaron cuatro actividades que incluyen tablas para completar y preguntas abiertas para responder. Estas actividades incluyeron: (i) tareas de comparar y contrastar (Zaslavsky, 2008), y (ii) tareas de proponer objetos matemáticos (Maldonado et al., 2015). Las tareas de comparar y contrastar se identifican como tareas que atienden a similitudes y diferencias. En este tipo de tareas se presentan dos o más objetos matemáticos con la consigna de investigar en qué son similares y/o en qué difieren, permiten examinar dos objetos matemáticos abiertamente y posibilitan la conexión entre ellos, el establecimiento de relaciones y la comparación de casos concretos. Por otro lado, las tareas de proponer objetos matemáticos consisten en tareas que invitan a los estudiantes a proponer un objeto matemático que mantenga similitudes y diferencias con otro dado. En este tipo de tareas el estudiante debe crear los objetos matemáticos a partir del análisis de las condiciones dadas.

Se consideró que las características de las actividades se definen por ser potencialmente abiertas para que los estudiantes puedan explorar y hacer Matemática. Además, las tareas de comparar y contrastar propuestas por Zaslavsky (2008) pretenden que el estudiante investigue a partir de la búsqueda de similitudes y diferencias de ciertos objetos matemáticos. La autora distingue que este tipo de tareas permiten conocer las formas en las que los conocimientos se relacionan entre sí, generar distintos puntos de vista con respecto a estructuras matemáticas e identificar características comunes de familias de objetos, entre otras, habilitando atraer la atención y la toma de conciencia por parte del estudiante. Por otro lado, ambos tipos de tareas: las tareas de proponer objetos matemáticos (Maldonado et al., 2015) y las de comparar y contrastar, se enmarcan en las tareas que atienden a similitudes y diferencias propuestas por Zaslavsky (2008). Además, se considera que implementar este tipo de tareas y promover las distintas resoluciones, actuando el docente como regulador, guía y organizador o promotor de la discusión grupal, es una metodología posible que enriquece los procesos de enseñanza y de aprendizaje al momento de llevar a cabo dichas tareas.

Desde la perspectiva que consideran Ellis et al. (2021), este tipo de tareas pueden generar múltiples soluciones y ser potentes para analizar distintas formas y tipos de generalización que llevan a cabo los estudiantes frente a las mismas.

Descripción y objetivos de las actividades

Las siguientes actividades se llevaron adelante en un grupo de estudiantes de la asignatura Matemática II de la carrera de Maestro de Primaria en los Institutos Normales de Montevideo en Uruguay (Consejo de Formación en Educación).

Objetivo de la actividad 1. Identificar qué aspectos consideran relevantes los estudiantes para determinar la generalización de una figura del plano a una figura análoga en el espacio.

Tabla 1
Actividad 1

ACTIVIDAD 1

A partir de las siguientes figuras del plano, ¿cómo imaginas una figura que tuviera una forma similar o análoga a cada una de ellas, pero en el espacio?

En el espacio en blanco puedes dibujar como también hacer una descripción escrita de la figura que imaginas.

FIGURA DEL PLANO	FIGURA DEL ESPACIO

Responde para cada caso:

¿Por qué crees que la figura que elegiste representa una figura similar a la del plano, pero en el espacio?

¿Qué la hace similar? ¿En qué aspectos es similar o análoga?

Fuente: organización del autor.

Objetivo de la actividad 2. Identificar qué aspectos consideran relevantes los estudiantes para determinar una asociación de una figura del espacio a una figura análoga en el plano.

Tabla 2
Actividad 2

ACTIVIDAD 2

A partir de las siguientes figuras del espacio, ¿cómo imaginas una figura que tuviera una forma similar o análoga a cada una de ellas, pero en el plano?

En el espacio en blanco puedes dibujar como también hacer una descripción escrita de la figura que imaginas.

FIGURA DEL PLANO	FIGURA DEL ESPACIO

Responde para cada caso:

¿Por qué crees que la figura que elegiste representa una figura similar a la del espacio, pero en el plano?

¿Qué la hace similar? ¿En qué aspectos es similar o análoga?

Fuente: organización del autor.

Preguntas entre la actividad 2 y la actividad 3.

Preguntas entre la actividad 2 y la actividad 3

¿Qué figuras del plano conocen?
¿Qué elementos o propiedades de dichas figuras del plano conocen?

Fuente: organización del autor.

Objetivo de la actividad 3. Identificar los aspectos relevantes que consideran los estudiantes al definir un concepto en el espacio equivalente a otro definido en el plano.

Tabla 3

Actividades 3A y 3B

ACTIVIDAD 3A Define un concepto equivalente al de mediana en la figura del espacio análoga o similar al triángulo de la actividad 1.
ACTIVIDAD 3B Define un concepto equivalente al de paralela media en la figura del espacio análoga o similar al rectángulo de la actividad 1.

Fuente: organización del autor.

Objetivo de la actividad 4. Identificar qué aspectos consideran relevantes los estudiantes al buscar propiedades sobre la figura que definieron en la actividad anterior.

Tabla 4

Actividad 4

ACTIVIDAD 4 Indica algunas propiedades que verifique la figura definida en la actividad 3.

Fuente: organización del autor.

Conclusiones

El uso de la secuencia didáctica propuesta permitió identificar las formas y tipos de generalizaciones en el trabajo con las actividades propuestas y se vincularon con lo establecido en el marco el marco RFE de Ellis et al. (2021). Además, se pudo comprender la actividad de generalización de los grupos de estudiantes cuando trabajaron con las actividades que implicaron una transferencia del plano al espacio. Esto evidenció el logro del objetivo de esta investigación, expresado como categorizar formas, tipos y subtipos de acciones generalizadoras en el trabajo de un grupo de estudiantes, de la formación de maestros del Uruguay, en actividades abiertas que involucran conceptos y definiciones de figuras del plano que deben ser transferidas al espacio.

En relación con las características de las actividades que se propusieron a los estudiantes, se observaron conexiones entre las formas y tipos de generalización que se establecieron en cada una de ellas. La actividad 1, promovió que los estudiantes establecieran relaciones entre figuras del plano y figuras del espacio, pero además permitió que generaran una forma de crear figuras del espacio a partir de figuras del plano. Se considera que este punto fue posible gracias a que la actividad se ideó de manera que fuera lo más abierta posible. Es decir, sin guiar o dar algún tipo de clave figurativa o explicativa para que los estudiantes pudieran expresar su propio pensamiento.

La actividad 2, sirvió para que los estudiantes revisaran las relaciones que habían establecido en un sentido inverso. Nuevamente, permitió el establecimiento de nuevas relaciones y dejó entrever a partir de las producciones de los estudiantes que pensar del espacio al plano implicaba una limitación mayor que del plano al espacio.

La actividad 3, fue potente para que los estudiantes realicen el salto para extender una definición conocida del plano al espacio. Se pudo observar que la mayoría de los grupos en esta actividad se enfrentaron a un desafío superior que llevó a un desarrollo cognitivo significativo. Esto se evidenció que en el proceso realizaron operaciones mentales que permitieron generar nuevo conocimiento. Además, las operaciones mentales no siempre concluyeron en una misma definición, esto indicó que la transferencia fue habilitada desde la perspectiva del actor, sin el interés de juzgar si la generalización fuera correcta o incorrecta.

Por otro lado, se vio que las relaciones establecidas en las actividades 1 y 2 fueron utilizadas como apoyo para la realización de las actividades 3 y 4. En otras palabras, la implicación de las relaciones detectadas cobró sentido en la generación de definiciones y propiedades. Por ejemplo, se identificó la relación la figura plana representaba al menos una cara o base del poliedro. Por lo que, a la hora de generar una definición de mediana de un tetraedro o de paralela media de un prisma, se utilizó el objeto definido en el plano en las caras del poliedro para realizar dicha transferencia. Es decir, la relación establecida funcionó como soporte y, por otro lado, como detonador para la extensión.

En la actividad 4, se pudo identificar que la búsqueda de propiedades propició la formación de generalizaciones de las formas formar y extender. En comparación con las actividades anteriores, esta fue la actividad que combinó formas de generalización y donde se vieron los ciclos de generalizaciones. El uso de herramientas digitales en esta actividad fue alto y potenció a que los estudiantes formaran conjeturas y extendieran hacia otros poliedros. Por otro lado, las actividades 3 y 4 contribuyeron a incluir herramientas más diversas: software GeoGebra, maquetas 3D, estructuras con cajas, etc. Estas herramientas se vieron utilizadas como forma de comprobar las conjeturas que los estudiantes proponían, tanto para definir como para analizar propiedades. Lo que diferenció las comprobaciones en material concreto de los que usaron GeoGebra fueron el tipo de herramientas utilizadas. Aquellos grupos que utilizaron material concreto se valieron de mediciones con regla, y los que utilizaron el software pusieron en juego otras herramientas además de la medida; conceptos de perpendicularidad y paralelismo, entre otros.

En resumen, por lo descrito anteriormente se evidencia que los resultados obtenidos son significativos ya que contribuyen a explicar de manera efectiva el desarrollo del conocimiento geométrico, en particular sobre las formas, tipos y subtipos de acciones generalizadoras que vinculan el plano con el espacio. Este proceso ha permitido una comprensión más profunda y una mayor apreciación de las relaciones y conceptos geométricos, consolidando así el logro del objetivo principal de esta investigación.

Referencias y bibliografía

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

- Brunheira, L., y da Ponte, P. (2019). Justificación de las generalizaciones geométricas en la formación inicial del profesorado de primaria. En *Undécimo Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática*, Universidad de Utrecht, Países Bajos. Recuperado de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02402127>
- Davydov, V. (1990). *Soviet studies in mathematics education: Vol. 2. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (J. Kilpatrick, Ed., & J. Teller, Trans.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Obra original publicada en 1972).
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop (Ed.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63–85). Erlbaum.
- Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and reflections. *ZDM Mathematics Education*, 40(1), 143–160.
- Ellis, A. B. (2007). A Taxonomy for Categorizing Generalizations: Generalizing Actions and Reflection Generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221–262. <https://doi.org/10.1080/10508400701193705>
- Ellis, A.B., Lockwood, E., Tillema, E., y Moore, K. (2021). Generalization Across multiple mathematical areas: The relating-forming-extending Framework. *Cognition and Instruction*, 40(3), 351 – 384. <https://doi.org/10.1080/07370008.2021.2000989>
- Harel, G., y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 38–42.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fenema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). LEA.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–18). Erlbaum.
- Kaput, J. y M. Blanton (2000). Generalizing and Progressively Formalizing in a Third-Grade Mathematics Classroom: Conversations about Even and Odd Numbers. [Conferencia] *PME-NA XXII*, Tucson, Estados Unidos.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65–86). Kluwer.
- Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Prentice Hall.
- Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Prentice Hall.
- Maldonado, A., Medina, L., Mesa, V., Molfino, V., Ochoviet, C., Pagés, D. y Rivero, F. (2015). Tareas enfocadas a similitudes y diferencias como motor para el aprendizaje de la matemática: nuevas categorías. En Buendía, G., Molfino, V., Ochoviet, C. *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Vol. II*. Consejo de Formación en Educación. Departamento de Matemática. Uruguay.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics* (Vol. 1). NCTM.
- Presmeg, N., Barrett, J., y McCrone, S. (2007). Fostering generalization in connecting registers of dynamic geometry and euclidean constructions. En Woo, JH, Lew, HC, Park, KS y Seo, DY (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81–88). Seúl: PME.
- Yao, X. (2018). An exploration of the interplay among teacher intervention, dynamic geometry software and students' mathematical generalizing practices about properties of geometric transformations [Tesis doctoral, Universidad de Ohio]. Recuperado de http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1530616428632192.
- Yerushalmy, M. (1993). Generalization in geometry. En J. Schwartz, M. Yerushalmy, & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What is it a case of?* (pp. 57–84). Erlbaum.
- Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. *Topic Study Group 34: Research and development in task design and analysis*, ICME, 11.