Reforzar el sentido de la demostración en un curso de Análisis matemático

Analía **Bergé**
Université du Québec à Rimouski
Canadá
analia_berge@uqar.ca
Alexandra **Fregueiro**
Consejo de Formación en Educación (CFE)
Uruguay
suresmeralda@hotmail.com

Resumen

Este taller está dirigido a docentes de matemática del nivel postsecundario, especialmente a quienes enseñan a futuros matemáticos o profesores. Se centra en la transición del Cálculo al Análisis, un momento en el que los estudiantes deben modificar sus prácticas pasando de enfoques operatorios a razonamientos más rigurosos y abstractos. En el taller se abordará una dificultad de los estudiantes, documentada, que se pone de manifiesto cuando tienen que probar, en un curso de Análisis, afirmaciones que admitirían una validación apoyada en representaciones gráficas en cursos de Cálculo. A menudo esta situación se hace presente cuando está en juego la propiedad de completitud del sistema de números reales. Durante el taller, se propondrán actividades para explorar esta propiedad y se analizarán tres demostraciones distintas de un teorema que requiere de esa propiedad para su demostración, haciendo explícita la necesidad de pasar de la intuición gráfica a la formalización rigurosa.

Palabras clave: Didáctica del Análisis; Educación postsecundaria; Formación docente; Propiedad de completitud; Rigor matemático; Transición Cálculo-Análisis; Validación sin gráficos.

1. Introducción y objetivo general del taller

Varias investigaciones en didáctica de la matemática (Bergé 2008, 2010; Durand-Guerrier 2016, 2022; Fregueiro 2024), destacan la dificultad que representa, para la mayoría de los estudiantes, la transición del Cálculo al Análisis, esto es, la disposición que supone el aprendizaje de los aspectos más bien operatorios del Análisis matemático en contraste con el aprendizaje de los aspectos más teóricos, abstractos y rigurosos del mismo. En efecto, la entrada al Análisis superior implica nuevas exigencias de abstracción, precisión y formalidad matemáticas que los cursos de Cálculo que habitualmente los preceden.

Para ilustrar con ejemplos, en Análisis superior ya no es el objetivo calcular una integral definida, sino entender la validación de su definición y su posible generalización a otras definiciones de integral; los estudiantes siguen tal vez calculando límites pero la utilización de la definición de límite en términos de épsilon y delta marca un estándar de validación más exigente y refinado; considerar un esbozo de una sucesión y decidir que un cierto valor es el límite u apoyar una respuesta en una representación gráfica ya no es considerado como una justificación válida, entre otros.

Para estudiantes que han apoyado sus respuestas en representaciones gráficas en los primeros cursos, elevar el estándar de rigor con el objetivo de escribir la demostración de un resultado que puede deducirse de un gráfico, puede ser percibido como innecesario, carente de sentido. Asumimos que es posible recuperar ese sentido si la demostración ayuda a entender tanto el proceso de demostrar como el contexto matemático en juego.

En Análisis de variable real, tomar distancia de las representaciones gráficas para entrar en modos de validación basados en la aritmética, está relacionado con la comprensión de la propiedad de completitud del conjunto de los números reales; esta idea, con diferentes matices, se encuentra en varios artículos y trabajos didácticos Bergé y Sessa (2003), Bergé (2008), Durand-Guerrier (2022), Fregueiro (2024), Fregueiro y Bergé (2024). Recordemos la definición del sistema de números reales $\mathbb{R}$: es un cuerpo ordenado y completo. Los axiomas de cuerpo (suma y multiplicación: cada una de esas operaciones es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro y un elemento inverso, salvo en el caso de la multiplicación para el elemento neutro de la suma, y la propiedad distributiva que relaciona ambas operaciones) y de orden (compatibles con las operaciones de cuerpo) son verificados igualmente por el sistema de los números racionales ($\mathbb{Q}$). La propiedad de completitud distingue esos dos cuerpos ordenados. Esta propiedad admite muchas maneras diferentes de ser expresada en $\mathbb{R}$, siendo las más frecuentes:

- Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente, tiene un supremo real
- Toda sucesión real fundamental (o de Cauchy) es convergente a un valor real.

El objetivo general de este taller es proponer a los participantes actividades matemáticas organizadas que han sido pensadas para reforzar el sentido de la demostración en Análisis matemático cuando se trata, justamente, de probar resultados que “se ven” en el marco de una representación gráfica y cuya demostración analítica está lejos de ser evidente. La propiedad de completitud del sistema de los números reales será puesta en evidencia a lo largo del trabajo propuesto.

2. Referencias teóricas

Michèle Artigue (1998) afirmó que, en Cálculo, como en otros dominios matemáticos, se trabaja al principio sobre objetos preconstruidos, a los que se trata de dar un sentido por un conjunto de prácticas. Para esta investigadora, es solamente al final de un cierto recorrido que esos objetos tomarán el estatus de objetos construidos sujetos a definiciones. Podemos tener presente esa afirmación cuando observamos que las primeras materias de Cálculo se apoyan a menudo en una idea preconstruida del sistema de números reales que es eficiente en relación con el tipo de tareas que en general se demandan (Bergé 2010). En efecto, las ideas de que los números reales son todos los números (racionales e irracionales), que son los números que sirven para denotar las medidas de las longitudes y sus opuestos, y, finalmente, que son los que se pueden representar por una recta numérica, alcanzan para poder pasar a través de un curso de Cálculo, de una o varias variables. Una reconstrucción del sistema real y una significación de su definición son necesarias cuando se busca otro tipo de validación en los cursos de Análisis.

Precisamente, en un escrito reciente, Balacheff (2019) reafirma la importancia de la validación como cimiento de la cultura científica y ciudadana, resaltando que la demostración, que forma parte de esta problemática, está en el corazón de la actividad matemática misma. Con una mirada epistemológica, el interés de demostrar afirmaciones del Análisis más allá de su evidencia gráfica llevó a los matemáticos del pasado a precisar las condiciones necesarias para poder producir una prueba. Ese trabajo dio nacimiento, en la segunda mitad del siglo 19, a las definiciones del sistema de números reales elaboradas por Dedekind (a partir de cortaduras racionales) y por Cantor (a partir de sucesiones racionales fundamentales) que sentaron las bases de la definición del sistema de los números reales que utilizamos actualmente, como cuerpo ordenado completo, tal como es descripto en los trabajos de Durand-Guerrier (2016, 2024) y de Bergé y Sessa (2003) entre otros.

Durand-Guerrier (2024) menciona que en el sistema francés se da poca atención a lo que puede ser probado en un cuerpo ordenado no completo, como es el caso de $\mathbb{Q}$. Para esta investigadora, este hecho puede explicar por qué entender la noción de completitud es muy difícil para una proporción importante de estudiantes. Ella destaca que la evidencia gráfica de la recta refuerza la idea de que, para los conjuntos numéricos, sólo hay dos posibilidades, son discretos o continuos, excluyendo así los conjuntos que son densos en sí mismos. Como Durand-Guerrier (2016) menciona, no existe una representación adecuada del conjunto de números decimales ni del conjunto de números racionales en la recta numérica: unos puntos aislados sugieren un conjunto discreto, una línea sugiere la continuidad; pero no hay una representación intermedia.

Con respecto al aprendizaje de la propiedad de completitud del sistema real, investigaciones recientes han tomado como hipótesis que la comprensión de esta propiedad favorece el trabajo en Análisis (Fregueiro, 2024; Fregueiro y Bergé, 2024; Vivier y Durand-Guerrier, 2016). Otros trabajos constatan que los estudiantes no retienen el carácter de herramienta de esta propiedad, (Bergé, 2010, 2016). Por su parte, Fregueiro (2024) habiendo propuesto y testeado, en el marco de su tesis doctoral, una secuencia de enseñanza de la completitud mediante la convergencia de sucesiones monótonas y acotadas, se centra en la distinción del carácter de herramienta y el carácter de objeto de esta propiedad, ampliando estas categorías.

La cuestión que nos interesa puede pensarse como un cambio de racionalidad de empírica a teórica en el sentido de Lecorre (2016). Este investigador distingue tres tipos de racionalidades: pragmática, empírica y teórica. La racionalidad pragmática, que consiste en examinar de cerca casos específicos, sin intentar generalizar las observaciones se basa en la no-contradicción y la validación de afirmaciones pasa por la verificación concreta. Para la racionalidad empírica, no hace falta precisar los objetos matemáticos mediante definiciones; en esta racionalidad se usan los hechos para deducir generalizaciones, la misma responde a un modelo inductivista. Finalmente, en el marco de la racionalidad teórica se definen los objetos y se establece la veracidad o falsedad de las afirmaciones a partir de axiomas o resultados ya instituidos, y de una lógica matemática dada. Interpretamos la validación de afirmaciones mediante una representación gráfica incluida en la esfera de la racionalidad empírica, distinguiéndola del tipo de validación que observamos en un curso de Análisis correspondiente a una racionalidad teórica.

Para cerrar esta sección, deseamos mencionar que Brousseau (1994) modeliza el trabajo del profesor, haciendo énfasis en el hecho de que su trabajo va en sentido inverso del trabajo del científico: el profesor contextualiza un saber, para después descontextualizarlo. En este taller la propiedad de completitud será contextualizada en la demostración en Análisis de enunciados que pueden parecer evidentes, dando lugar, esperamos, a reflexiones y aprendizajes significativos para la práctica docente y matemática de los participantes.

3. Desarrollo del taller

Trabajaremos sobre el Teorema del Valor Intermedio (TVI). El enunciado del TVI que será utilizado en el taller es: Sea f : A™ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y sean a, b ™A tal que $f(a)\cdot f(b)<0$; existe entonces un c™ $(a;b)$ para el que $f(c)=0$. La elección de este teorema no es al azar: es justamente un resultado que parece evidente o transparente a partir de la lectura que se puede hacer de una representación gráfica. Como docentes, buscamos convencer a los estudiantes de que una prueba de este teorema es necesaria, que lo que una representación gráfica deja ver no es fiable o no se adapta a un cierto valor de precisión; buscamos igualmente hacer explicita la riqueza de la prueba de este teorema, que permite potencialmente percibir la propiedad de completitud como una condición necesaria para desarrollar el Análisis. Esto dos aspectos serán considerados en el taller.

Propondremos entonces, en un primer momento, actividades para percibir la necesidad de producir una prueba del teorema separándose de la certeza empírica que puede procurar una representación gráfica del mismo. En un segundo momento analizaremos tres demostraciones distintas del teorema, comparando las distintas estrategias que despliegan, destacando las nociones que cada una pone en juego y analizando la relación entre ellas. Nos parece importante que un futuro profesor o matemático pueda acceder a este uso flexible de las nociones como herramienta de demostración rescatando la importancia de la validación. Necesariamente la propiedad de completitud del sistema real se hará explícita como herramienta para confeccionar las pruebas como fruto del trabajo en el taller.

Para el segundo tiempo nos inspiramos en Battie (2021), quien designa mediante la expresión "actividad multidemostración" [*multipreuve*, en el original] a un tipo de trabajo en clase de matemática sobre la base de proponer a los estudiantes el estudio de varias demostraciones de un mismo enunciado. El trabajo de esta investigadora inspiró igualmente a Durand-Guerrier (2024) quien, con el objetivo de profundizar la comprensión conceptual de la completitud de R, propone una actividad *multidemostración* para el Teorema de Bolzano-Weierstrass. A nuestro conocimiento, esa actividad no ha sido experimentada en clase aún. Sus hipótesis son que el análisis lógico de una demostración cumple tres funciones principales: controlar su validez, comprender la estrategia del autor de la demostración y contribuir tanto al desarrollo de habilidades de demostración como a la apropiación del contenido matemático en cuestión; hipótesis a las que hemos adherido en la concepción de este taller.

El taller comenzará con una presentación de los participantes y de su estructura (máximo 10 minutos); será seguida de la presentación del TVI y del análisis didáctico interactivo de actividades que tienen por objetivo convencer(se) de la pertinencia de elaborar una prueba del teorema (40 minutos). El taller continuará con la actividad "multidemostracion": siguiendo una guía de análisis que será propuesta y explicada, los participantes analizarán, completarán y compararán las pruebas que serán distribuidas por las personas responsables del taller, y podrán producir sus propias pruebas si lo desean (40 minutos). Las dos personas responsables del taller responderán preguntas y guiarán a los participantes. El taller finalizará con una discusión general (20 minutos) en la que se pondrán de relevancia los aspectos de la completitud y de la definición de $\mathbb{R}$ trabajados. Los participantes podrán conservar el material que se les entregue.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en didactique des Mathématiques*, Vol 18, n°2, (231-262)

Battie, V. (2021). *Pouvoir générique d'une preuve*. Actes du colloque CORFEM 2021, Strasbourg, France.

Balacheff, N. (2019). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. *XXVIe Colloque CORFEM*, Jun 2019, Strasbourg, France. ⟨hal-02981131⟩

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 217–235. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9101-5

Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(2), 217–227. https://doi.org/10.1080/00207390903399638

Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos: aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 6, núm. 3, noviembre, 2003, pp. 163-197

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra C. y Saiz, I. (comps) *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós Educador.

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the continuum an educational challenge for undergraduate students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(3), 338–361. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0033-2

Durand-Guerrier, V. (2022) Analysing proofs of the Bolzano-Weierstrass theorem. A mean to improve proof skills and understanding of completeness. *Fourth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics,* Leibnitz Universität (Hanover), Oct 2022, Hannover, Germany. pp.283-292. ⟨hal-04026543⟩

Durand-Guerrier, V. (2024). Contribution to didactic research on the completeness/incompleteness of ordered fields of numbers. *ZDM Mathematics Education* **56**, 1503–1515. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01635-2

Fregueiro, A. (2024). Una propuesta para el aprendizaje de la propiedad de completitud del sistema de los números reales (Tesis de doctorado). Instituto Politécnico Nacional. CICATA, México https://www.researchgate.net/publication/379086283_Una_propuesta_para_el_aprendizaje_de_la_propiedad_de_completitud_del_sistema_de_los_numeros_reales_Tesis_de_doctorado

Fregueiro, A. & Bergé, A. (2024). La propiedad de completitud del sistema real: una introducción vía la convergencia de sucesiones. *Boletim de Educaçao Matemática* Vol 38. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

Lecorre, T. (2016, March). Rationality and concept of limit. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*. https://indrum2016.sciencesconf.org/

Vivier y Durand-Guerrier (2016). Densité de D, Complétude de R et analyse reélle. En E. Nardi, C. Winslow & T.Hausberger (Eds). *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 31 March-2April 2016)* (pp 143-152). Montpellier, France: Université de Montpellier and INDRUM